Rozdział 5

Optymalizacja dostaw w sieciach transportowych

5.1. Problemy marszrutyzacji i ich klasyfikacja

Funkcjonowanie przedsiębiorstw i całych łańcuchów dostaw wymaga czynności transportowych, niwelujących dysproporcje przestrzenne wynikające z miejsc występowania popytu i podaży. Każdorazowe dostarczenie produktów od dostawców do odbiorców wymaga odpowiedniego zaplanowania tras przewozów, tak by czas i koszty były jak najmniejsze. W ostatnich dziesięcioleciach w planowaniu (marszrutyzacji) tras przewozu wykorzystuje się metody oparte na badaniach operacyjnych oraz programowania matematycznego. Wyznaczanie optymalnych tras w problemach transportowych jest jednym z głównych problemów, z jakimi spotykają się logistycy w swojej pracy operacyjnej. Decyzje w zakresie wyznaczania tras przewozowych dla określonej liczby środków transportu podejmowane są przy zachowaniu pewnych ograniczeń, a głównym kryterium optymalizacji jest całkowity koszt transportu, wyrażony w jednostce czasu, odległości lub ceny.

Klasyczny problem marszrutyzacji pojazdów polega na wyznaczeniu optymalnych tras, na których odbywa się zaopatrzenie kilku odbiorców przez jednego dostawcę. Zakłada się jednakową ładowność pojazdów, znajomość wielkości zapotrzebowania oraz lokalizacji odbiorców. Celem rozwiązania zadania marszrutyzacji jest zoptymalizowanie łącznej długości wszystkich tras dostaw do odbiorców. Problem marszrutyzacji jest rozwinięciem problemu komiwojażera (*traveling salesman problem)* – zagadnienia optymalizacyjnego, polegającego na znalezieniu minimalnego cyklu Hamiltona w pełnym grafie ważonym. Nazwa pochodzi od typowej ilustracji problemu, przedstawiającej go z punktu widzenia wędrownego sprzedawcy (komiwojażera), który chce dotrzeć do *n* miast. Komiwojażer każdorazowo będzie dążył do znalezienia najkrótszej (najtańszej lub najszybszej) drogi łączącej wszystkie miasta, a zaczynającej i kończącej się w określonym punkcie.

Rozważając problem komiwojażera w grafie, identyfikuje się węzły, przedstawiające klientów oraz krawędzie odzwierciedlające powiązania między miejscowościami, po których przemieszcza się komiwojażer. Każda krawędź ma przyporządkowaną liczbę, określającą uogólnioną odległość pomiędzy miejscowościami (węzłami grafów), tak że dla trzech dowolnych węzłów i, j, k zachodzi nierówność trójkąta wyrażona formułą:

$$\mathrm{d_{ik}} \leq \mathrm{d_{ij}} + \mathrm{d_{jk}} \tag{5.1}$$

W rozpatrywanym grafie jeden z węzłów jest wyróżniony jako punkt startu komiwojażera i jednocześnie punkt końcowy, przy czym powrót następuje dopiero po odwiedzeniu przez komiwojażera wszystkich miejscowości (węzłów). Rozwiązanie problemu polega na wskazaniu ciągu krawędzi, z których pierwsza zaczyna się w węźle startowym i tworzy łańcuch połączeń zawierający wszystkie węzły grafu. Ostatnia krawędź kończy się w punkcie startowym. Wykreślona w ten sposób trasa nosi miano trasy okrężnej i jest optymalną, ponieważ łączna długość krawędzi jest minimalna. W rozwiązaniu problemu komiwojażera znajduje zastosowanie teoria grafów, a w szczególności poszukiwanie w grafie cyklu Hamiltona, czyli takiego połączenia pomiędzy węzłami, aby każdy węzeł znalazł się na trasie i wystąpił w nim dokładnie jeden raz (poza węzłem startowym, który jest jednocześnie węzłem końcowym). Matematyczny zapis poszukiwań tras w cyklu Hamiltona przyjmuje postać:

$$\mathrm{x_{ij}} = \begin{cases} 0, \text{ gdy krawędź [i, j] należy do cyklu Hamiltona (H)} \\ 1, \text{ w przeciwnym wypadku} \end{cases} \tag{5.2}$$

Z powyższego wynika, że zmienna x_{ij} jest zmienną binarną, a jej wartość uzależniona jest od tego, czy krawędź grafu należy, czy nie należy do cyklu Hamiltona, tzn. czy spełniony jest warunek jednokrotnego wystąpienia miejscowości na trasie. Dany węzeł tylko jeden raz może być węzłem początkowym krawędzi i wówczas przyjmuje postać:

$$\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_{ij}} = 1 \quad \text{j=1,2,…,n} \tag{5.3}$$

jednocześnie węzły mogą być jedynie raz węzłem końcowym krawędzi:

$$\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_{ij}} = 1 \quad \text{i=1,2,…,n} \tag{5.4}$$

Funkcja kryterium mówiąca o minimalizacji długości trasy przedstawia się następująco:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} d_{ij} x_{ij}^{k} \rightarrow \min \tag{5.5}$$

W przypadku gdy lokalizacja dwóch miejscowości nie pozwala na wyznaczenie bezpośredniego połączenia, przyjmuje się, że $d_{ij} = \infty$. W celu wykluczenia „dreptania w miejscu" zakłada się również, że $d_{ii} = \infty$.

Aby uzyskane w grafach cykle były cyklami Hamiltona należy rozpatrzyć wszystkie k-elementowe permutacje węzłów $[i_1, i_2, \ldots, i_k]$, przy czym jeśli liczba węzłów jest parzysta, wówczas k = 2, 3, …, (n-1)/2, zaś gdy nieparzysta k = 2, 3, …, n/2. Dodatkowo należy mieć na uwadze układ ograniczeń dla każdego k:

$$x_{i_1 i_w} + x_{i_2 i_3} + \ldots + x_{i_k i_1} \leq k-1 \tag{5.6}$$

Z powyższego mamy $\binom{n}{k}(k-1)!$ ograniczeń[1].

Do rozwiązania problemu komiwojażera można wykorzystać jeden z dwóch algorytmów:

1) droga do najbliższego sąsiada,
2) sukcesywnie dołączanych węzłów.

W algorytmie pierwszym (droga do najbliższego sąsiada) węzeł startowy oznaczamy przez a, natomiast długość drogi okrężnej– przez z, tak że $k_1 = a$, $z = 0$. Następnie wskazujemy węzeł k_j taki, że:

$$d_{k_{j-1},k_j} = \min\left\{d_{k_{j-1}.i}\right\} \text{ przy czym } i \neq k_1, k_2, \ldots, k_{j-1} \tag{5.7}$$

co pozwala na stworzenie ciągu węzłów $[k_1, \ldots, k_{j-1}, k_j]$. Na tej podstawie przyjmujemy:

$$z = z + d_{k_{j-1},k_j} \tag{5.8}$$

po *n* powtórzeniach do ciągu $[k_1, \ldots, k_{n-1}, k_n]$ dołączamy węzeł startowy k_1, co skutkuje utworzeniem drogi okrężnej $H = [k_1, \ldots, k_{n-1}, k_n, k_1]$, której długość wynosi:

$$z = z + d_{k_n,k_1} \tag{5.9}$$

[1] Liczba ograniczeń wzrasta bardzo szybko, i tak dla n=6 mamy 55 ograniczeń, a dla n=14 jest ich już prawie 3 miliony.

Przedstawiony sposób pozwala na uzyskanie rozwiązania, które może nie jest optymalne, ale akceptowalne. Dla łatwiejszego zrozumienia problemu rozważmy przykład kuriera, który musi rozwieźć przesyłki. Punktem startowym jest Opole (baza firmy kurierskiej), a odbiorcy przesyłek zlokalizowani są odpowiednio w Brzegu, Nysie, Krapkowicach, Kędzierzynie-Koźlu i Strzelcach Opolskich. Zakładamy, że uwzględniono tylko czas przejazdu między miejscowościami, do których istnieje bezpośredni dojazd. Wynika z tego, że odległość między Opolem a Kędzierzynem-Koźlem będzie wynosić ∞, ponieważ do miejscowości tej można dotrzeć zarówno przez Krapkowice, jak i Strzelce Opolskie. Tabela 5.1. zawiera odległości między miastami[2].

Tabela 5.1. Czas przejazdu w rejonie dystrybucji przesyłek kurierskich (min)

		Opole	**Brzeg**	**Nysa**	**Krapkowice**	**Kędzierzyn-Koźle**	**Strzelce Opolskie**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Opole	1	∞	42	55	31	∞	35
Brzeg	2	42	∞	48	75	77	64
Nysa	3	55	48	∞	77	75	66
Krapkowice	4	31	75	77	∞	31	25
Kędzierzyn-Koźle	5	∞	77	75	~~31~~	∞	~~25~~
Strzelce Opolskie	6	35	64	66	~~25~~	25	∞

Źródło: Opracowanie własne.

Postępując zgodnie z opisanymi zasadami, należy rozpocząć poszukiwanie najbliższego sąsiada od wiersza pierwszego:

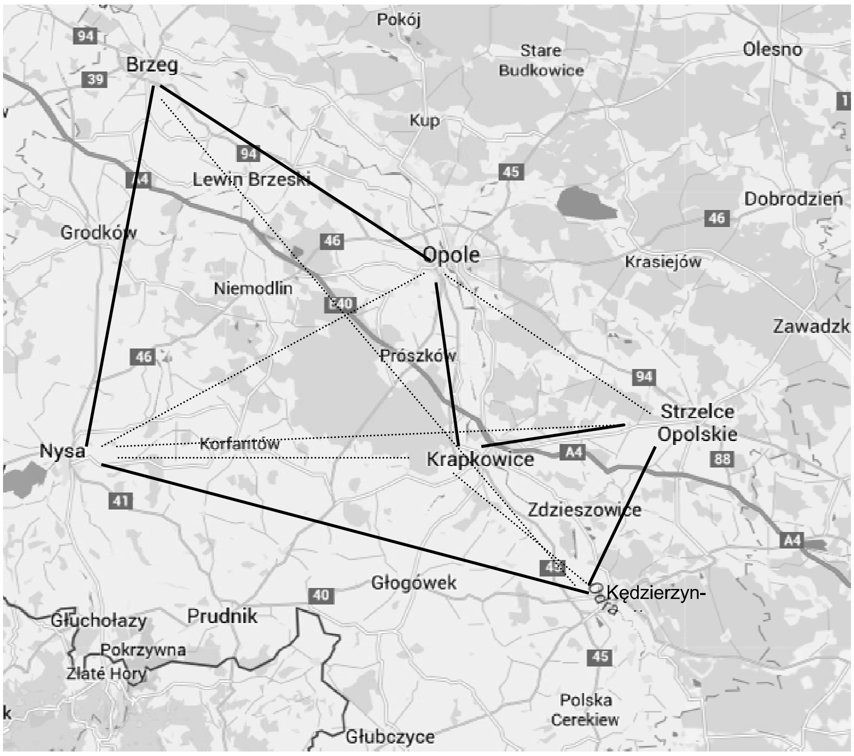
- w wierszu pierwszym wybieramy najkrótsza drogę, jaką ma do pokonania kurier z Opola → droga do Krapkowic (31 min),
- w wierszu czwartym (Krapkowice są węzłem nr 4) wyszukujemy najkrótszej drogi → do Strzelec Opolskich (25 min),
- w wierszu szóstym (Strzelce Opolskie są węzłem nr 6) najkrótsza droga to droga do Kędzierzyna-Koźla (25 min); tak samo długa jest droga do Krapkowic, ale to połączenie zostało już wykorzystane,
- w wierszu piątym (Kędzierzyn-Koźle to 5 węzeł) najkrótszą drogą jest droga do Nysy (75 min),
- w wierszu trzecim (Nysa to 3 węzeł) najkrótsze połączenie jest z Brzegiem (48 min) który jest węzłem nr 2,

[2] Odległość może być wyrażona na różne sposoby, w przykładzie przyjęto jako miarę odległości czas podróży pomiędzy miastami.

– ostatecznie w wierszu drugim najkrótsza droga, jaką udaje się zidentyfikować, to droga łącząca Brzeg z Opolem (42 min), tym samym kurier wrócił do punktu startowego, czyli do węzła nr 1 reprezentującego Opole.

Sumując czas przejazdu między miejscowościami, otrzymujemy łączny czas przejazdu 246 minut. Przejazd odbywa się w kolejności Opole – Krapkowice – Strzelce Opolskie – Kędzierzyn-Koźle – Nysa – Brzeg – Opole. Trasę komiwojażera wyznaczona algorytmem drogą do najbliższego sąsiada przedstawia rysunek 5.1.

Rysunek 5.1. Trasa komiwojażera wyznaczona metodą drogi do najbliższego sąsiada



.... rozpatrywane połączenia
—— wybrane połączenia

Źródło: Opracowanie własne.

Problem komiwojażera można rozwiązać, również wykorzystując algorytm sukcesywnego dołączania węzłów. W tym przypadku należy z góry ustalić węzeł startowy oraz węzeł najbardziej oddalony od startowego, z którym wspólnie utworzy on drogę początkową. W trakcie postępowania droga jest modyfikowana poprzez dołączanie nowych węzłów. Oznaczmy przez:

- a – węzeł startowy,
- b – węzeł najbardziej oddalony od a,
- z – określaną długość drogi okrężnej,
- H – cykl węzłów tworzących drogę okrężną.

Na starcie postępowania przyjmujemy, że:

$$k_1=a;\ k_2=b;\ H = [k_1, k_2]\ \text{oraz}\ z = d_{k_1k_2} + d_{k_2k_1} \tag{5.10}$$

Postępowanie iteracyjne rozpoczynamy od j = 3,…, n, gdyż j = 1,2 → dwie pierwsze miejscowości (węzły) arbitralnie przyjęte zostały jako droga początkowa. Ponadto zakłada się, że w iteracji j-1 otrzymano częściową drogę okrężną:

$$H=[k_1, k_2,\dots, k_{j-1}, k_j]$$

Długość drogi wynosi z. Ze względu na stosowane w dalszej części algorytmu wzory, ostatni z węzłów oznaczony został przez k_j, choć w rzeczywistości jest nim węzeł k_1, zatem $k_j=k_1$.

W każdej iteracji należy wskazać kolejny, nieuwzględniony dotychczas węzeł i rozstrzygnąć, pomiędzy które węzły już istniejącej trasy go włączyć. Przy wyborze węzła należy kierować się zasadą wyboru tego węzła, którego najmniejsza odległość od węzłów $k_1, k_2,\dots, k_{j-1}$ jest największa. Opisane pokrótce postępowanie sprowadza się do następujących kroków:

- dla każdego węzła $p \neq k_1, k_2, \dots, k_{j-1}$ obliczamy

$$d_p = \min(d_{k_1p}, d_{k_2p}, \dots, d_{k_{j-1}p})$$

- określamy

$$d_i = \max_p d_p \tag{5.11}$$

gdzie i-ty węzeł jest wówczas dołączony do drogi,

- rozstrzygamy, pomiędzy które węzły znajdujące się już w drodze umieścić i-ty węzeł. Wstawienie węzła zmienia drogę, pojawiają się nowe krawędzie, a znikają niepotrzebne. Dołączenie nowego węzła zmienia długość drogi, którą można obliczyć według formuły:

$$s_t = d_{k_ti} + d_{ik_{t+1}} - d_{k_tk_{t+1}} \tag{5.12}$$

– dołączanie kolejnych węzłów sprowadza się do wyznaczenia $mins_t$ i tylko taki węzeł, dla którego spełniony jest powyższy warunek może być dołączony do drogi,
– tworzymy nową drogę okrężną $H = [k_1, k_2, \ldots, i, k_{t+1}, \ldots, k_j]$ i obliczamy

$$z = z + s_t \tag{5.13}$$

– sprawdzamy, czy wszystkie węzły zostały uwzględnione; jeśli nie, przechodzimy do kroku 1 i rozpoczynamy iterację od początku. Jeśli tak wyznaczona trasa jest ostateczną, wówczas tworzy cykl Hamiltona.

Dla zobrazowania sposobu postępowania w algorytmie dołączania kolejnych węzłów posłużmy się wcześniejszym przykładem kuriera dostarczającego przesyłki na terenie województwa opolskiego. Dla przypomnienia – punktem startowym jest Opole (baza firmy kurierskiej), a odbiorcy znajdują się w Brzegu, Nysie, Krapkowicach, Kędzierzynie-Koźlu i Strzelcach Opolskich. Przyjmijmy dodatkowo, że wartość ∞ z tabeli 5.1., która oznacza, że pomiędzy danymi miastami nie ma połączeń bezpośrednich, odpowiada liczbie 10 000.

Jak już zaznaczono w przykładzie, punkt startowy kuriera to Opole, zatem ta miejscowość jest węzłem nr 1. Węzeł nr 3 (Nysa) to miejscowość, która jako pierwsza będzie dołączona do punktu startowego. Wybrano tę miejscowość, ponieważ odległość od Opola jest tu największa. Niemniej ta sama odległość (55 min) jest pomiędzy Opolem a miejscowością (węzłem) nr 5 (Kędzierzyn-Koźle), nie ma znaczenia, którą jako pierwszą włączymy do drogi.

Mamy zatem:

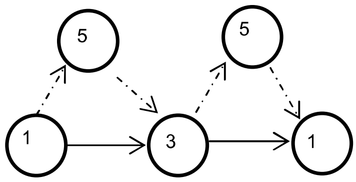
$$A = 1;\ b = 3;\ H_1 = [1, 3, 1];\ z = d_{13} + d_{31} = 55 + 55 = 110$$

Należy teraz wskazać węzeł, który zostanie dołączony do drogi okrężnej H_1. Wykorzystany zostanie symbol r_{pj}, gdzie p oznacza numer rozpatrywanego węzła, niebędącego jeszcze częścią składową drogi okrężnej H, j odpowiada numerowi drogi okrężnej. Zatem mamy:

$$r_{21} = \min(d_{21}, d_{23}) = \min(42, 48) = 42$$
$$r_{41} = \min(d_{41}, d_{43}) = \min(31, 77) = 31$$
$$r_{51} = \min(d_{51}, d_{53}) = \min(55, 77) = 55$$
$$r_{61} = \min(d_{61}, d_{63}) = \min(35, 66) = 35$$

Z uzyskanych wartości wybieramy największą $r_{51} = 55$ i na tej podstawie węzeł nr 5 będzie włączony do drogi okrężnej. Ponieważ nieznane jest jeszcze dokładne jego położenie, należy rozpatrzeć wszystkie możliwości, które przedstawione są na rysunku 5.2.

Rysunek 5.2. Alternatywa dołączenia węzła 5



Źródło: Opracowanie własne.

Należy obliczyć przyrost czasu, jaki wynika z przyłączenia węzła nr 5. W oznaczeniach s_t, t oznacza numer węzła poprzedzającego dodawany węzeł. Zatem:

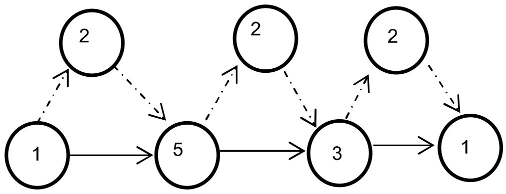
$$s_1 = d_{15} + d_{53} - d_{13} = 55 + 77 - 55 = 77$$
$$s_3 = d_{35} + d_{51} - d_{31} = 77 + 55 - 55 = 77$$

Z dwóch wartości należałoby wybrać tę, która jest najmniejsza. W tym przypadku uzyskano jednak pozorną alternatywę, gdyż wyróżnione miejsce dołączenia węzła nr 5 nie ma znaczenia. Wybrano s_1, co oznacza, że utworzono drogę okrężną H_2 = [1, 5, 3, 1]. Dla drogi H_2 należy teraz sprawdzić możliwość dołączenia kolejnych węzłów:

$$r_{22} = \min(d_{21}, d_{25}, d_{23}) = \min(42, 75, 48) = 42$$
$$r_{42} = \min(d_{41}, d_{45}, d_{43}) = \min(31, 31, 77) = 31$$
$$r_{62} = \min(d_{61}, d_{65}, d_{63}) = \min(35, 25, 25) = 25$$

Do drogi H_2 dołączyć należy węzeł nr 2. Rysunek 5.3. przedstawia możliwości dołączenia węzła do drogi.

Rysunek 5.3. Alternatywa dołączenia węzła 2



Źródło: Opracowanie własne.

Ponownie dla uzyskanych połączeń obliczyć należy wielkości przyrostów będących następstwem dołączenia węzła nr 2:

$$s_1 = d_{12} + d_{25} - d_{15} = 42 + 75 - 55 = 62$$
$$s_5 = d_{52} + d_{23} - d_{53} = 75 + 48 - 77 = 46$$
$$s_3 = d_{32} + d_{21} - d_{31} = 48 + 42 - 55 = 35$$

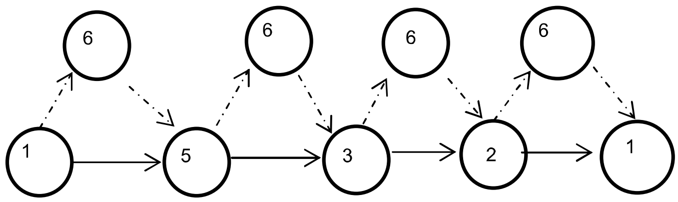
Węzeł nr 5 wstawić należy pomiędzy węzły nr 3 i nr 1, otrzymując w ten sposób drogę H_3 = [1, 5, 3, 2, 1], dla której czas przejazdu wynosi z = 55 + 77 +48 +42 = 222.

Mając drogę H_3, należy sprawdzić dwa pozostałe poza nią węzły:

$$r_{43} = \min (d_{41}, d_{45}, d_{43}, d_{42}) = \min (31, 31, 77, 75) = 31$$
$$r_{63} = \min (d_{61}, d_{65}, d_{63}, d_{62}) = \min (35, 25, 66, 64) = 25$$

Należy zastanowić się, w którym miejscu dołączyć węzeł nr 6 do drogi H_3. Możliwości dołączenia przedstawia rysunek 5.4.

Rysunek 5.4. Alternatywa dołączenia węzła 6



Źródło: Opracowanie własne.

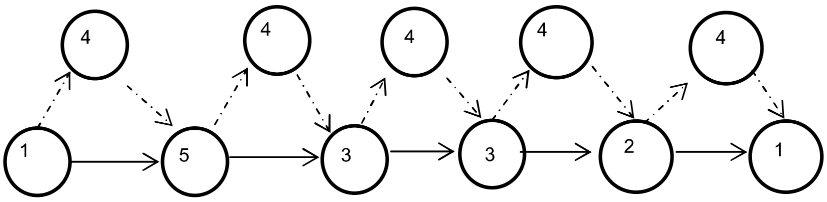
Następnie obliczyć należy przyrosty będące konsekwencją przyłączenia węzła nr 6:

$$s_1 = d_{16} + d_{65} - d_{15} = 35 + 25 - 55 = 5$$
$$s_5 = d_{56} + d_{63} - d_{53} = 25 + 66 - 77 = 14$$
$$s_3 = d_{36} + d_{62} - d_{32} = 66 + 64 - 48 = 82$$
$$s_2 = d_{26} + d_{61} - d_{21} = 64 + 35 - 42 = 57$$

Węzeł 6 wstawić należy pomiędzy 5 i 3, otrzymując tym samym drogę okrężną H_4 = [1, 5, 6, 3, 2, 1], dla której czas przejazdu wynosi z = 55 + 25 + 66 + 48 +42 = 236.

Ponieważ został już tylko jeden węzeł do dołączenia, jest to węzeł nr 4, nie trzeba wyliczać wartości wskaźników r_{ps}, należy jedynie zastanowić się, gdzie dołączyć ów węzeł. Możliwości przyłączenia go prezentuje rysunek 5.5.

Rysunek 5.5. Alternatywa dołączenia węzła 4



Źródło: Opracowanie własne.

Przyrosty będące następstwem dołączenia węzła nr 4 wynoszą odpowiednio:

$$s_1 = d_{14} + d_{45} – d_{15} = 31 + 31 – 55 = 7$$
$$s_5 = d_{54} + d_{46} – d_{56} = 31 + 25 – 25 = 31$$
$$s_6 = d_{64} + d_{43} – d_{63} = 25 + 77 – 66 = 36$$
$$s_3 = d_{34} + d_{42} – d_{32} = 77 + 75 – 48 = 104$$
$$s_2 = d_{24} + d_{41} – d_{21} = 75 + 31 – 42 = 64$$

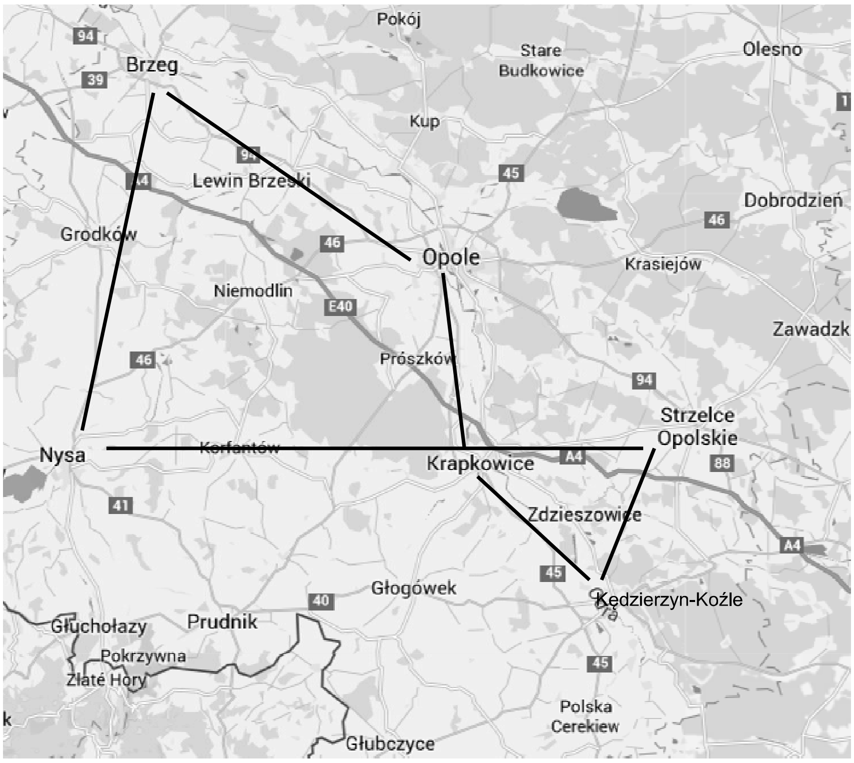
Węzeł nr 4 wstawić należy między węzły 1 i 5, co sprawia, że droga okrężna ma postać H_5 = [1, 4, 5, 6, 3, 2, 1], dla tej trasy czas przejazdu wynosi z = 31 + 31 + 25 + 66 + 48 + 42 = 243. Trasa komiwojażera uzyskana metodą dołączania kolejnych węzłów przedstawiona została na rysunku 5.6.

Jest to droga, która różni się nieznacznie od drogi uzyskanej metodą najbliższego sąsiada. Długości tras mierzone czasem przejazdu również różnią się nieznacznie, w przypadku metody najbliższego sąsiada długość trasy wyniosła 246 min, natomiast wyznaczona metodą dołączania kolejnego węzła 243 min. Ze względu na znikome różnice wybór trasy pozostawiony powinien być kurierowi, który poza czasem, jest prawie jednakowy w obu przypadkach, weźmie jeszcze pod uwagę np. jakość dróg, jakimi przyjdzie mu się poruszać.

W wyznaczaniu najkrótszej drogi posłużyć się możemy również algorytmem chińskiego listonosza (*chinese postman problem*)[3]. Polega ona na znalezieniu najkrótszej, zamkniętej ścieżki (wracającej do wierzchołka początkowego), która co najmniej raz zawiera każdą krawędź grafu i charakteryzuje się minimalnym kosztem, tzn. że suma wag krawędzi jest najmniejsza. Krawędzie oznaczają drogi do odbiorców, a wierzchołki skrzyżowania. W przypadku gdy układ dróg dojazdowych do dostawców posiada cykl Hamiltona, wówczas istnieje taka trasa, która pozwala na przejechanie każdego odcinka dokładnie raz (suma wag krawędzi jest zawsze taka sama).

[3] Problem ten został po raz pierwszy sformułowany w języku chińskim w 1962 przez Kuan Mei-Ko.

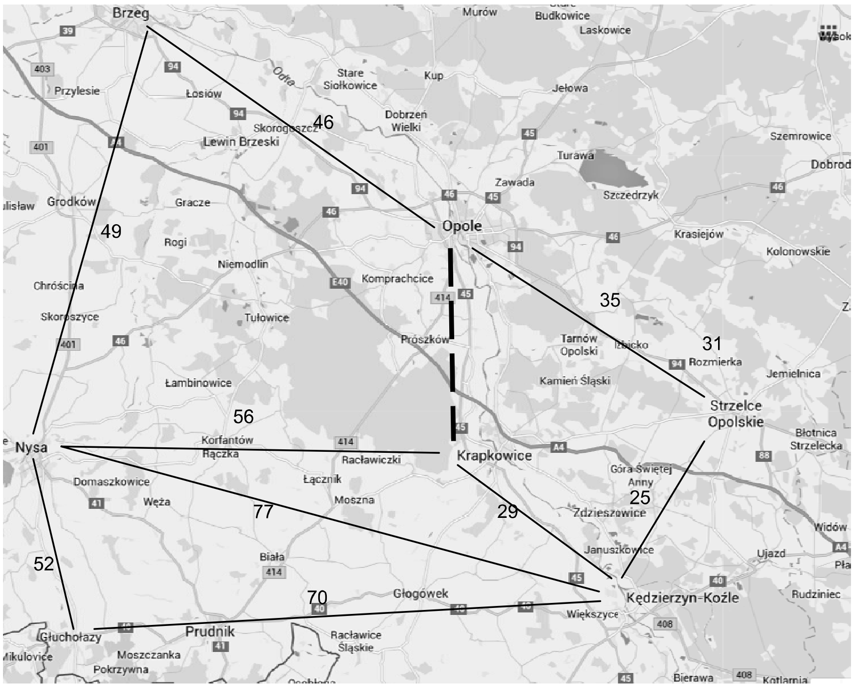
Rysunek 5.6. Trasa komiwojażera wyznaczona metodą dołączania kolejnego węzła



Źródło: Opracowanie własne.

W innym przypadku dostawca będzie zmuszony przejechać niektórymi odcinkami dróg co najmniej dwukrotnie. Rozwiązując problem chińskiego listonosza, będziemy poszukiwali takiego połączenia, w którym suma długości krawędzi będzie najmniejsza. Rozważając ponownie trasę, jaką ma pokonać kurier, rozwożąc przesyłki z Opola do różnych miast województwa opolskiego, przeanalizujmy sieć połączeń przedstawioną na rysunku 5.7., na którym zaznaczono orientacyjny czas przejazdu w minutach pomiędzy miejscowościami. Na początku należy zauważyć, że rozważana sieć połączeń nie posiada cyklu Hamiltona, gdyż występują w sieci takie miasta jak Opole i Krapkowice, z których wychodzi nieparzysta liczba krawędzi do pozostałych miejscowości.

Rysunek 5.7. Trasa komiwojażera wyznaczona metodą dołączania kolejnego węzła



Źródło: Opracowanie własne.

Postępując zgodnie z algorytmem rozwiązania problemu chińskiego listonosza, kurier z przykładu ma do pokonania trasę:

- Opole – Krapkowice – Nysa – Kędzierzyn-Koźle – Krapkowice – Opole – Brzeg – Nysa – Głubczyce – Kędzierzyn-Koźle – Strzelce Opolskie – Opole.

Odcinek trasy, jaki pokona dwukrotnie, to trasa Opole – Krapkowice – Opole, zaznaczona na rysunku 5.7. linią przerywaną. Łączny czas przejazdu wynosi: 31 + 56 + 77 + 29 + 31 + 46 + 49 + 52 + 70 + 25 + 35 = 501.

Proste wyznaczanie trasy przewozu nie wyczerpuje problematyki marszrutyzacji. Choć większość przypadków bazuje na dopasowaniu tras przejazdów (najczęściej taboru homogenicznego, choć niekoniecznie) do lokalizacji klientów, to często planowanie marszrut musi następować z uwzględnieniem wielu ograniczeń. Wymienić tu należy przede wszystkim wielkość (ładowność, pojemność) pojazdów (w przypadku taboru niehomogenicznego) oraz wymagane godziny realizacji dostaw czy odbioru ładunków od klientów (*Time Windows*). Gotowość przyjęcia przesyłki przez odbiorców w określonym czasie sprawia, że wyznaczanie trasy musi uwzględniać nie tylko drogę najkrótszą (najtańszą), ale również czas przejazdu, a raczej dotarcia do odbiorcy. Dostarczenie przesyłki w czasie niedostosowanym do pracy klienta może spowodować przestój, a w konsekwencji wzrost kosztów. Oznacza to, że celem dopasowania tras przejazdu uwzględniającego ograniczenia jest obsłużenie całego popytu (wszystkich klientów) przy minimalnych kosztach (czasie) lub maksymalnym stopniu wykorzystania taboru[4]. Matematyczny model zagadnienia marszrutyzacji przedstawia się wówczas następująco[5]:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{m} d_{ij} x_{ij}^{k} \rightarrow \min \tag{5.14}$$

gdzie:

x_{ij}^{k} – może przyjąć wartość 1, gdy klient j-ty znajduje się na trasie k-tego pojazdu po kliencie i-tym; 0 w przeciwnym wypadku,
d_{ij} – długość ścieżki od klienta i-tego do klienta j-tego.

Zakłada on limit odwiedzin lokacji (każdy klient zostanie odwiedzony tylko jeden raz) oraz występowanie jednego punktu wysyłkowego (pojazd rozpoczyna i kończy trasę w tym samym punkcie). Ponadto z modelu wynikają dodatkowo następujące ograniczenie:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{oj}^{k} = 1 \quad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots,m \tag{5.15}$$

mówiące o tym, że pojazd opuści punkt centralny i dotrze do klienta. Kolejne ograniczenie, gwarantujące, że pojazd po odwiedzeniu klienta opuści go i na koniec powróci do punktu wysyłkowego może być zapisane w postaci:

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ip}^{k} - \sum_{j=0}^{n} x_{nj}^{k} = 0 \quad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots,m \quad \text{oraz} \quad p=0,1,\ldots,n \tag{5.16}$$

W modelu występuje również ograniczenie dotyczące wejść i wyjść przepływu, zgodnie z którym pojazd po odwiedzeniu danego klienta opuści go i powróci do punktu wysyłkowego, a zlecenie zostanie zrealizowane u klienta w określonym oknie czasowym:

[4] A. Redmer, M. Kiciński, R. Rybak, *Zarządzanie samochodowym taborem ciężarowym – metody*, „Gospodarka Materiałowa i Logistyka" 2014, nr 4, s. 11–18.
[5] D. Żelazny, *Optymalizacja wielokryterialna w problemie marszrutyzacji (VRP), Automatyzacja procesów dyskretnych: teoria i zastosowania,* T. 1, pod red. A. Świerniaka i J. Krystek, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2012, s. 157–163.

$$e_i \le b_i^k \le l_i \quad \text{dla} \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{5.17}$$

gdzie:

b_i^k – moment rozpoczęcia usługi u klienta i-tego przez k-ty pojazd.

Przekroczenie wyznaczonego na realizację dostawy okna czasowego pociąga za sobą zwiększenie liczby przekroczonych okien czasowych (zasada domina). Przedstawione równania modelu operują na grafie problemu. Zbiorem wartości funkcji celu jest zestaw wszystkich możliwych podziałów na K cykli w grafie G. Funkcje ograniczające wybierają tylko te rozwiązania, które spełniają warunki problemu marszrutyzacji. Minimalizacja funkcji celu pozwala deterministycznie znaleźć rozwiązanie optymalne. Cel określony jest jako minimalizacja całkowitego kosztu transportu w rozwiązaniu:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{m} d_{ij}x_{ij}^{k} \rightarrow \min \tag{5.18}$$

Wyznaczanie trasy z uwzględnieniem okna czasowego (*Vehicle Routing with Time Windows*). W metodzie tej dopuszcza się przypadek dotarcia transportu do odbiorcy wcześniej, niż czas rozpoczęcia jego pracy, wówczas konieczny jest czas oczekiwania na rozładunek lub załadunek. Ponadto naruszony może zostać czas rozpoczęcia obsługi u odbiorców; pojazdy wcześniej też mogą być obsłużone, ale to może pociągnąć za sobą konieczność zapłaty kar konwencjonalnych, z tytułu niewywiązania się z przyjętych terminów dostaw.

Poza wspomnianymi metodami marszrutyzacji w literaturze opisywanych jest wiele innych, których wykorzystanie wymaga jednak zaawansowanych technik obliczeniowych, a efektywność uzyskanych wyników maleje przy rozwiązywaniu dużych problemów bez wspomagania komputerowego. Wśród najciekawszych z nich wymienić należy:

- *Vehicle Routing Problem with Backhauling* (VRPB),
- *Mixed Pickup and Delivery Problem* (MPDP),
- *Periodic Vehicle Routing Problem* (PVRP).

Metoda VRPB jest odmianą klasycznego problemu marszrutyzacji, w której poza głównym centrum dystrybucji uwzględniane są dwa typy lokalizacji – odbiorcy, zaopatrywani przez centrum, i dostawcy (np. producenci), zaopatrujący centrum. Oprócz klasycznych ograniczeń dotyczących np. liczby i pojemności środków transportu zakłada się, że załadunek może odbyć się dopiero po pełnym wyładunku towarów znajdujących się w samochodzie. To powoduje możliwość pojawienia się pustych przebiegów.

Modyfikacją zagadnienia marszrutyzacji dostaw typu VRPB jest metoda *Mixed Pickup and Delivery Problem* (MPDP). Na poszczególnych trasach dopuszcza ona możliwość mieszanego (naprzemiennego) załadunku u dostawców i wyładunku u odbiorców.

W przypadku planowania dostaw dla wielu odbiorców zastosowanie znajduje metoda *Periodic Vehicle Routing Problem.* Zakłada ona znajomość dnia dostawy do klienta i trasę, jaką ma się odbyć transport. W tym przypadku rozwiązanie problemu marszrutyzacji polega na znalezieniu takich marszrut, których suma odległości w całym okresie planistycznym jest najmniejsza.

5.2. Planowanie tras dostaw dla wielu pojazdów

Każde przedsiębiorstwo dystrybuujące swoje produkty napotyka na problemy ograniczoności zasobów (dostępnego taboru samochodowego), którymi dostarcza wytworzone dobra do odbiorców finalnych. Dąży jednocześnie do zachowania terminów realizacji dostaw, gdyż w innym przypadku odbiorcy będą niezadowoleni, a to oznacza utracone korzyści. W dystrybucji produktów mamy do czynienia najczęściej z problemem wielu komiwojażerów. Wynika to z faktu, że realizacja dostaw wymaga z reguły wykorzystania większej liczby samochodów. Ponadto każda trasa musi spełniać nałożone na nią ograniczenia związane m.in. z czasem pracy kierowców, ograniczoną pojemnością i ładownością pojazdów czy wspomnianymi już oknami czasowymi, w jakich towar musi zostać dostarczony do odbiorców.

Analizując zagadnienia tworzenia tras dla wielu pojazdów, należy przyjąć następujące założenia i oznaczenia:

- występuje jednorodność produktów,
- L_0 – magazyn producenta, z którego pobierane są produkty i dostarczane do n – odbiorców,
- B_i – potencjalni odbiorcy,
- b_i – wielkość zamówienia,
- Q – ładowność środków transportowych,
- b_i, $i=1,2,\ldots,n$,
- dopuszczalny czas trwania przewozu przez jeden środek transportu nie może przekroczyć T jednostki czasu,
- czas wyładowania ładunku jest równy zero.

Zadanie optymalizacyjne polega na wyznaczeniu ilości środków transportowych oraz trasy ich przejazdów, tak aby wszystkie zamówienia klientów zostały zrealizowane, a łączny czas obsługi wszystkich klientów był minimalny. Tak sformułowane zadanie składa się z dwóch części: przydziału klientów do określonego środka transportu oraz wyznaczenia tras dla każdego z nich.

Niech H oznacza dowolną trasę rozpoczynającą się w punkcie L_0 (magazyn producenta), trasa ta przebiega przez punkty i_1, i_2...i_r, a kończy się ponownie w punkcie L_0. Niech t_{ij} oznacza czas przejazdu z punktu i do punktu j. Z przyjętego założenia mamy:

$$t_{0i} + t_{i0} \leq T \tag{5.19}$$

Rozważając trasę H=[0, i_1, i_2, ..., i_r, 0], należy uwzględnić czas przejazdu:

$$t(H) = t_{0i_1} + t_{i_1 i_2} + ... + t_{i_r 0} \tag{5.20}$$

oraz łączną wielkość zamówień odbiorców tej trasy:

$$b(H) = b_{i_1} + ... + t_{i_r} \tag{5.21}$$

Trasę H należy uznać za dopuszczalną, gdy

$$b(H) \leq Q \text{ i } t(H) \leq T \tag{5.22}$$

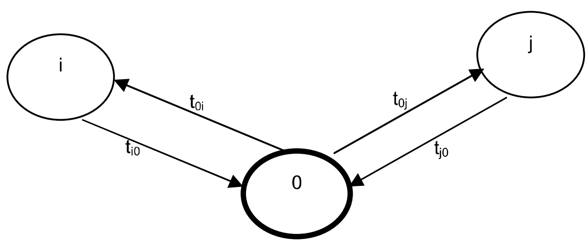
Poszukiwanie rozwiązania rozpocząć można od założenia, że każdy klient jest obsłużony indywidualnie. Oznacza to, że pojazdów powinno być tyle, ilu klientów. Wówczas każdy pojazd pokonuje trasę z punktu L_0 do swojego klienta i z powrotem. Łączny czas trwania dostaw wynosi wtedy:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \left(t_{0i} + t_{i0} \right) \tag{5.23}$$

Rozpatrując kolejno dwóch odbiorców i oraz j, których mógłby obsłużyć jeden pojazd w ramach całej trasy, można wyliczyć łączny czas trwania dostaw przy indywidualnej obsłudze według wzoru:

$$t_0 = (t_{0i} + t_{i0}) + (t_{0j} + t_{j0}) \tag{5.24}$$

Rysunek 5.8. Indywidualna obsługa dwóch odbiorców

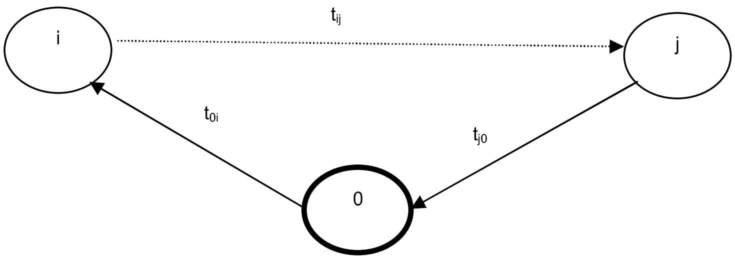


Źródło: Opracowanie własne.

Jeśli w miejsce dwóch odrębnych tras rozważymy jedną wspólną od 0 do i potem do j i z powrotem do 0, wówczas czas obsługi wyniósłby:

$$t_1 = t_{0i} + t_{ij} + t_{j0} \tag{5.25}$$

Rysunek 5.9. Połączenie obsługi dwóch odbiorców



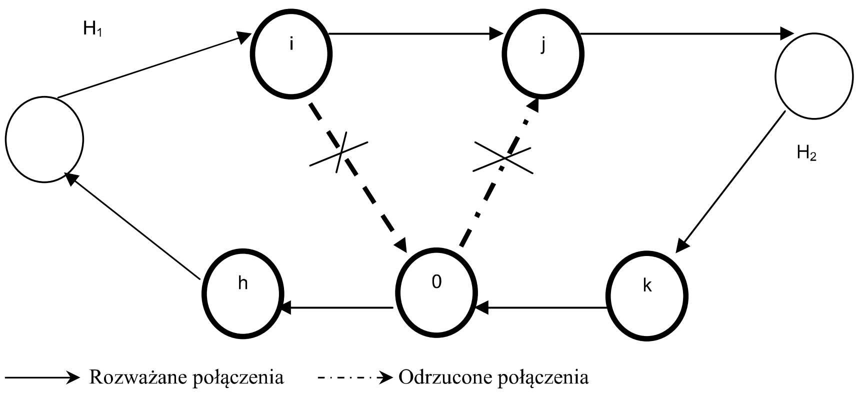
Źródło: Opracowanie własne.

Obliczając różnicę czasów, otrzymujemy:

$$s_{ij} = t_0 - t_1 = t_{i0} + t_{0j} - t_{ij} \tag{5.26}$$

Dodatnie wartości różnicy s_{ij} oznaczają, że sumaryczny czas indywidualnej obsługi trwa dłużej niż czas obsługi w ramach połączonej trasy. Wartość ta określa wielkość zaoszczędzonego czasu. Ujemne wartości s_{ij} oznaczają ujemną oszczędność, tzn. że tras indywidualnych nie powinno się łączyć.

Rysunek 5.10. Graficzne odzwierciedlenie dwóch tras dostaw do dwóch odbiorców



Źródło: Opracowanie własne.

Uogólniając powyższe rozważania, weźmy pod uwagę przypadek dwóch tras H_1 = [0, h, …, i, 0] oraz H_2 = [0, j, ..., k, 0]. W każdej z tych tras wyróżniono dwóch klientów, którzy są obsługiwani jako pierwsi (h,j) oraz dwóch, którzy są obsługiwani jako ostatni (i,k). Można ich nazwać odbiorcami krańcowymi w swoich trasach. Pozostali to odbiorcy pośredni. Połączenie tras w jedną spowoduje, że po odwiedzeniu klienta z pierwszej trasy (kiedy to powinien nastąpić powrót do punktu startu) następuje wizyta u pierwszego klienta drugiej trasy i kontynuacja odwiedzin zgodnie z wytyczoną drugą trasą. Wskazanie trasy H_1 i H_2 na rysunku 5.10. ma jedynie znaczenie ilustracyjne, podobnie jak zaznaczone strzałki.

Nowa trasa H* = [0, h, …, i, j, …., k, 0] wymaga realizacji dostaw o łącznej ładowności:

$$b(H^*) = b(H_1) + b(H_2) \tag{5.27}$$

a czas jej przejazdu wynosi:

$$t(H^*) = t(H_1) + t(H_2) - t_{0i} - t_{0j} + t_{ij} = t(H_1) + t(H_2) - s_{ij} \tag{5.28}$$

Gdy nastąpi skrócenie łącznego czasu przejazdu i będą zachowane warunki dopuszczalności przejazdu:

$$b(H^*) \le Q \text{ oraz } t(H^*) \le T \tag{5.29}$$

to trasę H* uznamy za oszczędną. Wraz z oszczędnością czasu przejazdu zmniejsza się liczba środków transportu, gdyż w miejsce dwóch można wysyłać na trasę tylko jeden pojazd. Liczba tras będzie równoznaczna z liczbą pojazdów potrzebnych do obsługi klientów. W konsekwencji przedsiębiorstwa powinny dążyć do łączenia tras, tak by można było osiągnąć korzyści kosztowe. Dla łatwiejszego zrozumienia problematyki oszczędnościowego łączenia tras rozpatrzmy zadanie.

Przyjmijmy, że znane są czasy przejazdów t_{ij}, i, j=0,1,…,n, na podstawie których obliczane są potencjalne oszczędności czasowe s_{ij}. Te należy uporządkować malejąco, odrzucając wcześniej wszystkie $s_{ij} \le 0$.

Jako założenie startowe przyjmujemy zindywidualizowaną obsługę odbiorców, co oznacza, że do obsługi kierujemy *n* pojazdów i dopuszczamy *n* tras. Dalsze postępowanie odbywa się w kolejnych iteracjach, uwzględniając jednak szczególne przypadki.

1. W pierwszym kroku dla max$\{s_{ij}\}$ wskazujemy numery odbiorców. W przypadku gdy zbiór numerów jest pusty → kończymy postępowanie. Wyróżnione trasy, a tym samym wskazana liczba środków transportu stanowią propozycję rozwiązania.

2. W kroku drugim ustalamy, jaką pozycję zajmują odbiorcy *i* oraz *j* w swych trasach; podejmujemy decyzję o ewentualnym połączeniu tras. Tutaj możliwe są trzy przypadki:
   - Przypadek I – Parametry *i* oraz *j* nie są odbiorcami należącymi do jednej grupy odbiorców obsługiwanych wspólnie, co świadczy o tym, że są obsługiwani indywidualnie. Wówczas należy utworzyć grupę {i, j} i sprawdzić czy trasa [0, i, j, 0] spełnia warunki dopuszczalności przewozu. Gdy wspomniane warunki są spełnione, wówczas należy utworzyć trasę [0, i, j, 0]. W przypadku przeciwnym powinno się skreślić s_{ij} z listy i przejść do kolejnego wskaźnika oszczędności.
   - Przypadek II – Jeśli *i* należy do pewnej grupy, a odbiorca *j* jest obsługiwany indywidualnie, należy zwrócić uwagę na miejsce odbiorcy *i* na trasie. I tak, jeżeli odbiorca *i* jest odbiorcą pośrednim, to nie należy łączyć tras. Natomiast w przypadku, gdy odbiorca *i* jest odbiorcą krańcowym, należy sprawdzić, czy dołączenie odbiorcy *j* do trasy nie naruszy warunków dopuszczalności przewozu. Przy spełnionych warunkach przewozu odbiorcę *j* można dołączyć do trasy, w której znajduje się odbiorca *i*, ale odbiorca *j* będzie dołączony przed odbiorcę *i*, jeśli ten występował w trasie jako pierwszy, czyli trasa ma postać [0, j, i, …, 0]. Odbiorca *j* natomiast będzie dołączony za odbiorcą *i*, jeśli ten występował jako ostatni w trasie [0,…, i, j ,0].
   - Przypadek III – Odbiorcy należą do różnych tras, *i* należy do H_1 a odbiorca *j* do H_2. W tym przypadku połączenie ma sens, jeśli obaj odbiorcy są krańcowymi, a po połączeniu tras spełnione są warunki przewozu.
3. W trzecim kroku po połączeniu tras wykreśla się te, które zostały połączone, a do zbioru tras dołącza się nową powstałą po połączeniu. W ten sposób ulega redukcji liczba pojazdów przewidywanych do obsługi klientów. Rozpatrzona wartość s_{ij} zostaje wykreślona, a w postępowaniu należy przejść do kolejnej iteracji.

Dla zobrazowania metody oszczędności łączenia tras rozważmy znany już przykład firmy kurierskiej, która ma swój magazyn w Opolu, a jej odbiorcy zlokalizowani są w różnych miejscach województwa opolskiego. W tabeli 5.2. przedstawiony jest czas przejazdu między miejscowościami w minutach oraz wielkość dostawy do danej miejscowości z magazynu. Jednostką dostawy jest paczka. Podstawową jednostką transportową jest samochód mogący przewieźć Q = 30 paczek produktów, a czas przebywania kierowcy w trasie nie może przekroczyć T = 3 godziny, czyli 180 minut.

Zakładamy, że mamy określony czas przejazdu między każdymi dwiema miejscowościami, nawet gdy nie ma między nimi bezpośredniego połączenia. Z mapy połączeń (rysunek 5.1.) można odczytać, że z Opola do Kędzierzyna-Koźla można dojechać przez Krapkowice albo przez Strzelce Opolskie. Pierwsza trasa ma czas przejazdu 31 + 31 = 62 min, natomiast druga 35 + 25=60 min. W tabeli czasów przejazdu uwzględniana jest krótsza, druga trasa.

Tabela 5.2. Czas przejazdu w rejonie dystrybucji

		Opole	**Nysa**	**Krapko-wice**	**Kędzie-rzyn-Koźle**	**Strzelce Opolskie**	**Brzeg**	b_j
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
Opole	0	0	54	31	57	35	46	0
Nysa	1	54	0	56	77	67	49	8
Krapkowice	2	31	56	0	29	25	52	7
Kędzierzyn-Koźle	3	57	77	29	0	25	75	14
Strzelce Opolskie	4	35	67	25	25	0	48	6
Brzeg	5	46	49	52	75	48	0	5

Źródło: Opracowanie własne.

Wyznaczamy teraz macierz S, której elementy określone są wzorem 5.27. Następnie należy wybrać wartość maksymalną max$\{s_{ij}\}$ i odczytać wskazania numerów odbiorców. Jeżeli zbiór tych wartości jest pusty – postępowanie się kończy.

Tabela 5.3. Macierz S dla przewozów w rejonie dystrybucji

		Opole	**Nysa**	**Krapko-wice**	**Kędzie-rzyn-Koźle**	**Strzelce Opolskie**	**Brzeg**
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Opole	0	0	0	0	0	0	0
Nysa	1	0	0	29	34	22	51
Krapkowice	2	0	29	0	59	41	25
Kędzierzyn-Koźle	3	0	34	59	0	67	28
Strzelce Opolskie	4	0	22	41	67	0	33
Brzeg	5	0	51	25	28	33	0

Źródło: Opracowanie własne.

Dla przykładu, na podstawie wzoru 5.27, wyliczone zostaną 3 dowolne wartości s_{ij}:

$$s_{12} = t_{10} + t_{20} - t_{12} = 54 + 31 - 56 = 29$$
$$s_{24} = t_{20} + t_{40} - t_{24} = 31 + 35 - 25 = 41$$
$$s_{35} = t_{30} + t_{50} - t_{35} = 57 + 46 - 75 = 28$$

Z uzyskanych wartości s_{ij} należy utworzyć ciąg malejących wartości (należy uwzględnić tylko wartości dodatnie):

$$67 > 59 > 51 > 41 > 34 > 33 > 29 > 28 > 25 > 22$$
$$s_{34} > s_{23} > s_{15} > s_{24} > s_{13} > s_{45} > s_{12} > s_{35} > s_{14}$$

Rozwiązaniem startowym jest indywidualna obsługa każdego z klientów, co oznacza, że powinniśmy dysponować 5 samochodami. W kolejnych iteracjach będziemy sprawdzać, czy można zmniejszać liczbę tras i tym samym liczbę samochodów.

ITERACJA 1

Z uzyskanych wartości s_{ij} mamy, że $\max\{s_{ij}\}=s_{34} = 67$. Zarówno odbiorca 3, jak i 4 są obsługiwani indywidualnie, a więc można wziąć pod rozwagę trasę H=[0, 3, 4, 0]. Należy sprawdzić, czy trasa ta spełnia warunki dopuszczalności przewozu określone wzorem 5.30. Mamy zatem:

$$T = t_{30} + t_{34} + t_{40} = 57 + 25 + 35 = 117 < 180 \text{ – dopuszczalny czas przewozu}$$
$$b = 14 + 6 = 20 < 30 \text{ – ładowność}$$

Trasa spełnia warunki dopuszczalności. Przyjmujemy zatem: H_1=[0,6,7,0].

ITERACJA 2

Kolejną wartością s_{ij}, jaką trzeba rozważyć, jest $s_{23} = 59$. Odbiorca nr 3 należy do drogi H_1 i jest odbiorcą krańcowym, a w szczególności jest odbiorcą pierwszym, natomiast odbiorca nr 2 jest obsługiwany indywidualnie. Można rozpatrywać trasę H_1=[0, 2, 3, 4, 0]. Dla tak utworzonej trasy mamy:

$$T = 31 + 29 + 25 + 35 = 120 < 180$$
$$b = 7 + 14 + 6 = 27 < 30$$

Odbiorca 2 jest dołączony do trasy i otrzymujemy ostatecznie H_1 = [0, 2, 3, 4, 0].

ITERACJA 3

Kolejno mamy s_{15}=51. Zarówno odbiorca 1, jak i 5 są obsługiwani indywidualnie i żaden z nich nie należy do trasy H_1. Rozpatrywana może być trasa H=[0, 1, 5, 0], dla której otrzymano:

$$T = 54 + 49 + 46 = 149 < 180$$
$$b = 8 + 5 = 13 < 30$$

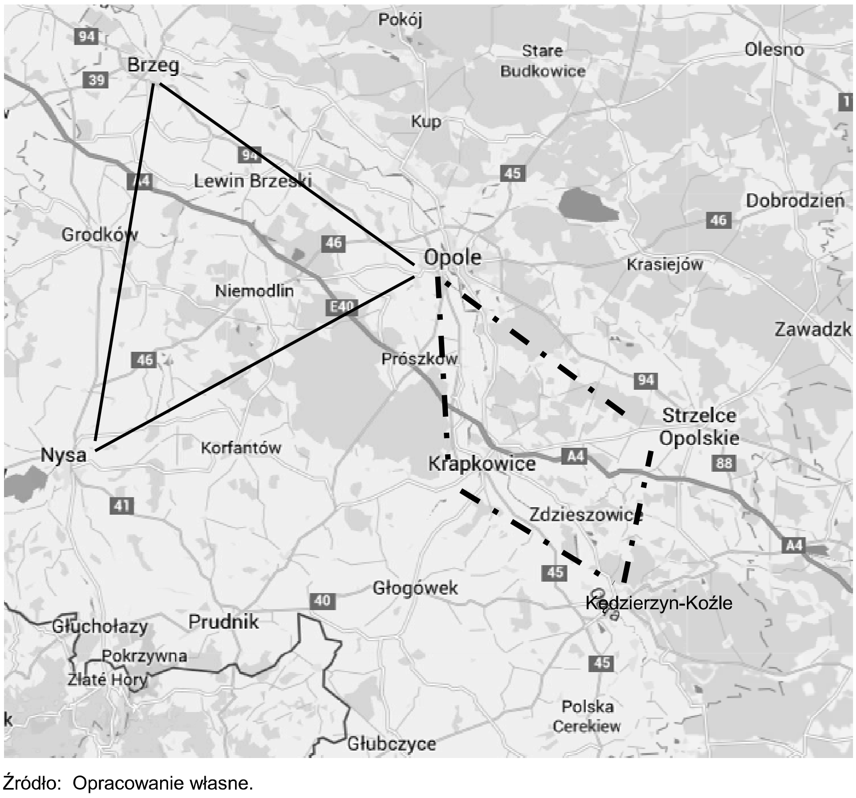
Zatem oba warunki dopuszczalności trasy są spełnione, można przyjąć, że H_2=[0, 1, 5, 0].

Ponieważ lista możliwych oszczędności została wyczerpana, należy stwierdzić, że zasadnymi są:

H_1 = [0, 2, 3, 4, 0] dla której T = 120 min, b = 27 paczek
H_2 = [0, 1, 5, 0] dla której T = 149 min, b=13 paczek.

Obydwie trasy wyznaczone są na rysunku 5.11.

Rysunek 5.11. Optymalne trasy dowozu przesyłek z magazynu firmy kurierskiej do odbiorców



Źródło: Opracowanie własne.

5.3. Problemy optymalizacji sieci dostaw

Najważniejszym problemem w każdej sieci dystrybucji jest zachowanie wysokiej jakości produktów przez nią przepływających oraz ich dostarczenie do odbiorców w jak najkrótszym czasie. Optymalizacja działania sieci dystrybucji polega na analizie posiadanych zasobów magazynowych i środków transportu oraz całej infrastruktury, a następnie na analizie kosztów oraz poprawie jakości samej dystrybucji. Optymalizacja sieci dystrybucji odbywa się poprzez tworzenie nowych sieci lub modernizację już istniejących. Ma to na celu nie tylko obniżenie kosztów dystrybucji, ale także poprawę bezpieczeństwa, terminowości dostaw, wzrost konkurencyjności i optymalizację wizerunku sieci, a także rzetelne i sprawne dostarczanie towarów. Decyzje dotyczące struktury sieci dystrybucji mają znaczenie strategiczne i długoterminowe konsekwencje. Wybór konkretnego rozwiązania niejednokrotnie wiąże przedsiębiorstwo długofalowo, gdyż projektowanie sieci jest zadaniem złożonym i skomplikowanym. Właściwe ukształtowanie sieci dystrybucji determinuje liczbę obiektów sieci, ich lokalizację, wielkość, funkcje, zakres oraz sprawność przepływu zapasów i informacji. Gospodarka rynkowa wymusza na podmiotach gospodarczych tworzenie wielu różnych form organizacyjnych sieci dystrybucji. Są one zależne od specyfiki obsługi klientów rozproszonych i skupionych, a także od czynników ekonomicznych charakterystycznych dla dzielnic, małych, średnich miast oraz wielkich aglomeracji o złożonych potrzebach logistycznych. Determinuje to potrzebę właściwego, pod względem poziomu i złożoności zadań oraz funkcji, doboru obiektów dystrybucyjnych, w tym magazynów, hurtowni, centrów logistycznych. Wybór odpowiedniej struktury sieci dystrybucyjnych powinien być podyktowany nie tylko względami przestrzennymi, technicznymi, technologicznymi, lecz także wymogami ekonomicznymi.

Jednym z ważniejszych zadań optymalizacji sieci jest obliczanie przepustowości tras w sieci połączeń dróg. Zagadnienie to jest wykorzystywane do jak najlepszego planowania tras przewozu oraz ustalania maksymalnego przepływu sieci na danej trasie. Jednym z algorytmów służących do wyznaczania maksymalnej przepustowości tras jest algorytm Forda-Fulkersona, który opiera się na twierdzeniu o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju. Twierdzenie to brzmi: „Dla dowolnego grafu G minimalny przekrój i maksymalny przepływ mają taka samą wartość". Metoda ta w głównej mierze opiera się na znajdywaniu kolejnych ścieżek z początkowego do końcowego wierzchołka grafu. Przed właściwym omówieniem algorytmu należy przedstawić kilka pojęć podstawowych, które ze względu na podręcznikowy charakter książki są omówione w dość okrojonej postaci.

Siecią przepływową nazywamy graf skierowany $G = (V, E)$, w którym każda krawędź $(u, v) \in E$ ma przyporządkowaną nieujemną przepustowość

$c(u, v) \geq 0$. Jeżeli $(u, v) \notin E$ to przyjmujemy, że $c(u, c) = 0$. W sieci wyróżniamy dwa wierzchołki: źródło ($s \in V$) oraz ujście ($t \in V$).

Niech $G = (V, E, c, s, t)$ będzie siecią. Przepływem w sieci G nazywamy każdą funkcję $f : V \times V \to R$ spełniającą następujące warunki:

1) $\bigwedge_{u,v \in V} f(u,v) \leq c(u,v)$ [warunek przepustowości] (5.30)

2) $\bigwedge_{u,v \in V} f(u,v) = -f(v,u)$ [warunek skośnej symetrii] (5.31)

3) $\bigwedge_{u,v \in V \setminus \{s,t\}} \sum_{u \in V} f(u,v) = 0$ [warunek zachowania przepływu] (5.32)

Wartością przepływu f nazywamy liczbę:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) \tag{5.33}$$

Mamy daną sieć $G = (V, E, c, s, t)$ oraz przepływ f w G. Dla dowolnych $u, v \in V$ definiujemy $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v) \geq 0$. Funkcję $c_f : V \times V \to R$ nazywamy przepustowością residualną. Sieć $G_f = (V, E_f, c_f, s, t)$ nazywamy siecią residualną sieci G wyznaczoną przez f.

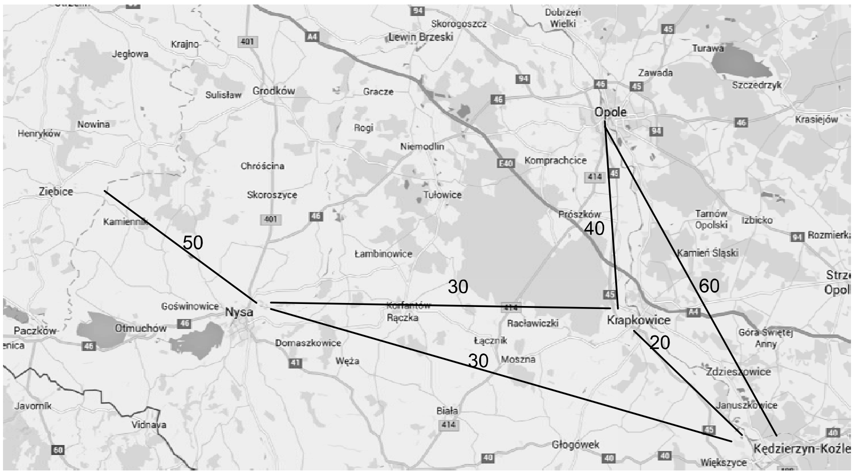
Niech $G = (V, E, c, s, t)$ będzie siecią, zaś f – przepływem. Ścieżkę powiększającą dla f nazywamy dowolną drogę z s do t w G_f. Przepustowością residualną ścieżki p nazywamy liczbę $c_f(p) = \min\{c_f(u, v); (u, v) \in p\}$. Przepływ f jest maksymalny w G wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje ścieżka powiększająca w G.

W algorytmie Forda-Fulkersona zakładamy, że mamy daną sieć $G = (V, E, c, s, t)$. Wynikiem w algorytmie jest maksymalny przepływ f w sieci G.

1. $\bigwedge_{u,v \in V x V}$ podstawiamy $f(u,v) = 0$
2. Dopóki istnieje ścieżka powiększająca w G_f wykonujemy następujące czynności:
   a) $c_f(p) := \min\{c_f(u, v); (u, v) \in p\}$ (5.34)
   b) dla każdej krawędzi $(u, v) \in p$ wykonujemy:
      (*) $f(u, v) := f(u, v) + c_f(p)$ (5.35)
      (**) $f(v, u) := -f(u, v)$ (5.36)
   c) skonstruuj nową sieć residualną G_f
3. Koniec algorytmu. Otrzymujemy wynik: f.

Zastosowanie opisanego algorytmu przedstawimy na przykładzie. Załóżmy, że kurier jedzie z Opola do Ziębic, ale po drodze musi zabrać przesyłki z 4 magazynów. Potencjalne trasy przejazdu oraz wielkości przepustowości przedstawione są na rysunku 5.12. Wyruszając z Opola, kurier może wybrać jedną z dwóch tras: Opole – Kędzierzyn-Koźle – Krapkowice – Nysa – Ziębice lub Opole – Krapkowice – Kędzierzyn-Koźle – Nysa – Ziębice. Kierując się wartością maksymalnego przepływu, powinien wybrać tę trasę, dla której przepływ będzie większy.

Rysunek 5.12. Potencjalne trasy przejazdu z głównego magazynu w Opolu do finalnego odbiorcy w Ziębicach wraz z zaznaczonymi wielkościami przepustowości



Źródło: Opracowanie własne.

Rozważając trasę pierwszą, mamy kolejne wartości przepustowości:

60, 20, 30, 50

z wartości tych należy wybrać najmniejszą (w rozważanym przykładzie jest to 20) i odjąć ją od każdej przepustowości:

60 – 20 = 40

20 – 20 = 0

30 – 20 = 10

50 – 20 = 30

Wśród uzyskanych liczb (poza zerem, które przepisujemy) ponownie wybieramy najmniejszą (jest nią 10) i odejmujemy ją od uzyskanych wyników:

40 – 10 = 30

0

10 – 10 = 0

30 – 10 = 20

Procedurę powtarzamy tak długo, aż wszystkie uzyskane różnice będą zerami. Zatem w kolejnym kroku najmniejszą liczbą będzie 20, a różnice wyniosą odpowiednio:

30 – 20 = 10
0
0
20 – 20 = 0

Ostatnia liczba, jaka nam pozostała to 10, którą odejmujemy i otrzymujemy:

10 – 10 = 0
0
0
0

Postępowanie zakończyło się, można przystąpić do wyliczania maksymalnej przepustowości. Na trasie pierwotnej najmniejszą wartością było **20**. Po pierwszym odjęciu, najmniejszą liczbą było **10**, po drugim odjęciu, **20** i po ostatnim ponownie **10**. Teraz te wszystkie najmniejsze liczby, po kolejnych odjęciach, należy dodać, a otrzymamy wynik jest maksymalnym przepływem w sieci na trasie Opole – Ziębice:

20 + 10 + 20 + 10 = 60

Maksymalny przepływ w sieci na trasie Opole – Kędzierzyn-Koźle – Krapkowice – Nysa – Ziębice wynosi 60.

Postępując analogicznie, można sprawdzić, że maksymalny przepływ na trasie Opole – Krapkowice – Kędzierzyn-Koźle – Nysa – Ziębice wynosi 40. Ponieważ metoda zakłada maksymalizację przepływu, kurier powinien wybrać trasę z większymi możliwościami, czyli trasę Opole – Kędzierzyn-Koźle – Krapkowice – Nysa – Ziębice.

Czas wykonywania metody Forda-Fulkersona zależy od wyboru ścieżki. Pamiętać należy, że zły jej wybór może doprowadzić do niezakończenia się algorytmu. Jeżeli przepływ jest mały, algorytm działa szybko, choć i w takich sytuacjach może wystąpić konieczność wykonywania szeregu iteracji.