B A D A N I A   O P E R A C Y J N E   I   D E C Y Z J E

Nr 2 1993

Marek WALESIAK*

POMIAR EFEKTÓW ODDZIAŁYWANIA CZYNNIKÓW NA WYRÓŻNIONE ZJAWISKO EKONOMICZNE

W pracy omówiono metodę — opartą na rachunku różniczkowym i całkowym — służącą do oceny wpływu czynników na wyróżnione zjawisko ekonomiczne. Ukazano związki tej metody ze znanymi z literatury statystyczno-ekonometrycznej miernikami elastyczności. Przedstawiono ponadto propozycję pojęcia elastyczności (innego typu niż w ujęciu klasycznym), którą można stosować przy dużych przyrostach badanego czynnika.

W literaturze z zakresu analizy ekonomiczno-finansowej funkcjonuje wiele metod, zwanych metodami przyczynowymi (metoda kolejnych podstawień, metoda różnic cząstkowych i metody od niej pochodne, np. funkcyjna, metody podziału odchyleń, logarytmiczna), służących do oceny wpływu czynników na wyróżnione zjawisko ekonomiczne. Wszystkie te metody w pracach [10], [11], [12] — na podstawie sformułowanych tam warunków poprawności — zostały poddane krytycznej ocenie ich przydatności w analizie zjawisk ekonomiczno-finansowych. W pracach tych autor przedstawił także (częściowo na podstawie pracy [7]) i zanalizował metodę, praktycznie nie znaną w polskiej literaturze z tego zakresu, opartą na rachunku różniczkowym i całkowym i służącą do oceny wpływu czynników na wyróżnione zjawisko ekonomiczne.

Celem tego artykułu jest ukazanie związków tej metody ze znanymi z literatury statystyczno-ekonometrycznej miernikami elastyczności. Ponadto przedstawiono propozycję zdefiniowania elastyczności (innego typu niż w ujęciu klasycznym), którą można stosować w przypadku dużych przyrostów badanego czynnika.

---

* Akademia Ekonomiczna im. Oskara Langego, ul. Komandorska 118/120, 53–345 Wrocław.

1.

Dane jest zjawisko ekonomiczne Y będące przedmiotem badania o wynikach obserwacji w postaci wektora

$$[Y_r] = [Y_1, \ldots, Y_k]^T, \quad r = 1, \ldots, k \tag{1}$$

Na wielkość zjawiska Y wpływają z różną siłą i kierunkiem czynniki (zmienne) $X_1, \ldots, X_n$. Macierz wyników obserwacji na zmiennych $X_1, \ldots, X_n$ jest następująca:

$$[X_{1r}, \ldots, X_{nr}] = \left[\frac{X_{11} \ldots X_{n1}}{X_{1k} \ldots X_{nk}}\right] \tag{2}$$

Zależność wyróżnionego zjawiska ekonomicznego Y od czynników na niego wpływających $X_1, \ldots, X_n$ może się przejawiać m.in. w postaci funkcyjnych i statystycznych związków przyczynowo-skutkowych. Przedmiotem badań w niniejszej pracy są przyczynowo-skutkowe związki funkcyjne łączące zmienne Y i $X_1, \ldots, X_n$

$$Y = f(X_1, \ldots, X_n) \tag{3}$$

gdzie f — znana a priori (np. z teorii ekonomii) postać analityczna.

Czynniki $X_1, \ldots, X_n$ występujące w funkcji (3) mogą być niezależne bądź zależne (w tym przypadku można jeszcze rozróżnić zależności funkcyjne i statystyczne [4]).

W pracy przyjęto założenie o niezależności czynników $X_1, \ldots, X_n$, a więc rozpatruje się sytuacje, w których zmianie ulega tylko jeden spośród badanych czynników, pozostałe natomiast utrzymują się na stałym poziomie. Założenie to jest pewnym uproszczeniem, gdyż często się zdarza, że czynniki są ze sobą powiązane w określony sposób, tak że zmiana wartości jednego z nich pociąga za sobą zmiany wartości innych czynników, a te z kolei oddziałują na badane zjawisko. Sytuacja, w której dopuszcza się zależność badanych czynników $X_1, \ldots, X_n$ będzie przedmiotem osobnego opracowania.

Proces badania analitycznego można podzielić na dwa etapy. W pierwszym etapie ustala się odchylenie badanego zjawiska ekonomicznego w dwóch porównywanych stanach r oraz s:

$$\Delta Y = Y_r - Y_s, \quad \text{odchylenie bezwzględne} \tag{4}$$

$$100\frac{\Delta Y}{Y_s} = 100\frac{Y_r - Y_s}{Y_s}, \quad \text{odchylenie względne} \tag{5}$$

W drugim etapie badań analitycznych wyodrębnia się (np. za pomocą metody opartej na rachunku różniczkowym i całkowym) wpływ (tzn. skalę i kierunek wpływu) przyrostów czynników $X_1, \ldots, X_n$ na przyrost badanego zjawiska.

Jeśli w pierwszym etapie ustalono odchylenie bezwzględne (względne), to wpływ przyrostów czynników $X_1, \ldots, X_n$ na przyrost badanego zjawiska jest wyrażony w wielkościach mianowanych (niemianowanych).

Można wskazać ważniejsze kierunki zastosowania tych badań i płynące z nich korzyści:

a) na podstawie analizy przeszłości pozwalają one odpowiedzieć na pytanie, jakie zmienne (czynniki) i w jakim stopniu (w sensie skali i kierunku wpływu) oddziałują na badane zjawisko ekonomiczne;

b) ten typ analiz, określony w punkcie a), może również dotyczyć prognozowanych wyników obserwacji na zmiennych Y i $X_1, \ldots, X_n$;

c) na ich podstawie można badać, czy ilościowe związki między zmiennymi zmieniają się w czasie;

d) dzięki temu, że w metodzie opartej na rachunku różniczkowym i całkowym wpływ przyrostu czynnika X_i w przedziale od stanu $(X_{1s}, \ldots, X_{ns})$ do stanu $(X_{1r}, \ldots, X_{nr})$ jest sumą wpływów przyrostu czynnika X_i w poszczególnych podprzedziałach (co wykazano w pracy [12]), istnieje możliwość kontrolowania i elastycznego reagowania na skutki wywołane przez zmiany czynników;

e) mogą być one również przydatne w analizie konsekwencji określonej polityki gospodarczej. Tego typu wnioskowanie ma duże znaczenie tam, gdzie istnieje wiele możliwych wariantów działania i chodzi o wybór najkorzystniejszego z nich. Na przykład zakładając, że w okresie prognozowanym znane będą wielkości Y i $X_1, \ldots, X_n$ ustalamy najkorzystniejszy wariant drogi zmian wartości czynników $X_1, \ldots, X_n$ od stanu badanego (wyjściowego) do stanu prognozowanego.

2.

ΔY określone we wzorze (4) oraz w liczniku wyrażenia (5) można przedstawić jako

$$\Delta Y = f(X_{1s}+\Delta X_1; \ldots; X_{ns}+\Delta X_n) - f(X_{1s}, \ldots, X_{ns}) \tag{6}$$

gdzie: $\Delta X_i = X_{ir} - X_{is}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Z uwagi na to, że ΔY jest zwykle skomplikowaną funkcją $\Delta X_1, \ldots, \Delta X_n$ dokonujemy różniczkowania funkcji (3) w punkcie $(X_{1s}, \ldots, X_{ns})$. Funkcja ciągła wielu zmiennych jest różniczkowalna w punkcie $(X_{1s}, \ldots, X_{ns})$, jeśli ma w danym punkcie ciągłe pochodne cząstkowe względem wszystkich zmiennych [5, s. 333], [3, s. 392]. Otrzymuje się wzór określający przyrost funkcji o postaci [5, s. 335]

$$\Delta Y = dY + o(\Delta X_1, \ldots, \Delta X_n)\,\rho \tag{7}$$

gdzie: dY – różniczka zupełna funkcji:

$$\begin{aligned} dY &= f'_{X_1}(X_{1s}, \ldots, X_{ns})\Delta X_1 + \ldots + f'_{X_n}(X_{1s}, \ldots, X_{ns})\Delta X_n = \\ &A_{X_1} + \ldots + A_{X_n} \\ \rho &= ((\Delta X_1)^2 + \ldots + \Delta X_n)^2)^{0,5} \end{aligned} \tag{8}$$

A_{X_i} – wpływ przyrostu czynnika X_i (*ceteris paribus*) na przyrost badanego zjawiska Y.

W ogólnym przypadku zamiast $\Delta X_1, \ldots, \Delta X_n$ we wzorze (8) można pisać $dX_1, \ldots, dX_n$ (wynika to z równości $dX_i = \Delta X_i$, dla $i = 1, \ldots, n$ [5, s. 336]).

Korzyść wynikająca z takiego przedstawienia przyrostu funkcji ΔY polega na tym, że dY zależy od $\Delta X_1, \ldots, \Delta X_n$ liniowo.

We wzorze (7) o zależy od $\Delta X_1, \ldots, \Delta X_n$ i dąży do zera, gdy $\Delta X_1 \to 0, \ldots, \Delta X_n \to 0$, lub krócej, gdy $\rho \to 0$.

Wynika stąd, że jeśli $\Delta X_1 \to 0, \ldots, \Delta X_n \to 0$, to przyrost funkcji można z dowolnie małym błędem zastąpić jej różniczką zupełną:

$$\Delta Y \simeq dY \tag{9}$$

Jeśli przyjmiemy przybliżenie (9) oraz podstawimy za dY prawą stronę równania (8), to wzór określający odchylenie względne można wyrazić jako

$$\begin{aligned} 100\frac{\Delta Y}{Y_s} &\simeq 100\frac{f'_{X_1}(X_{1s}, \ldots, X_{ns})\Delta X_1}{Y_s} + \ldots + \frac{f'_{X_n}(X_{1s}, \ldots, X_{ns})\Delta X_n}{Y_s} = \\ &= W'_{X_1} + \ldots + W_{X_n}, \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie: W_{X_i} — wpływ przyrostu względnego czynnika X_i (*ceteris paribus*) na przyrost względny badanego zjawiska Y (w procentach).

$\Delta X_i = a_i X_{is}$; $a_i = (X_{ir} - X_{is})X_{is}^{-1}$.

Jeśli $\Delta X_i = 0{,}01\ X_{is}$ ($a_i = 0{,}01$; $i = 1, \ldots, n$), to wyrażenie (por. [6, s. 200])

$$W_{X_i} = 100\frac{f'_{X_i}(X_{1s}, \ldots, X_{ns})0{,}01\ X_{is}}{Y_s} = f'(X_{1s}, \ldots, X_{ns})\frac{X_{is}}{Y_s} \tag{11}$$

jest klasyczną definicją elastyczności zmiennej Y względem zmiennej X_i (por. np. prace [1], [2], [8], [9]).

3.

Posługiwanie się w badaniach ekonomicznych klasycznym wzorem określającym elastyczność oraz wzorami (9) i (10) jest nieuzasadnione, bowiem czynniki $X_1, \ldots, X_n$ zwykle otrzymują istotnie różne od zera przyrosty. W takim przypadku, aby zachodziła sytuacja (9), należy proces zmian czynników od punktu $(X_{1s}, \ldots, X_{ns})$ do punktu $(X_{1r}, \ldots, X_{nr})$ przedstawić w postaci m kroków. Po każdym kroku czynniki $X_1, \ldots, X_n$ otrzymują przyrosty $\Delta X_{1(s+j-1)}; \ldots; \Delta X_{n(s+j-1)}$ $(j = 1, \ldots, m)$.

W tej sytuacji przyrost funkcji (3) można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} \Delta Y = &\sum_{j=1}^{m} f'_{X_1}(X_{1(s+j-1)}; \ldots; X_{n(s+j-1)})\Delta X_{1(s+j-1)} + \ldots + \\ &\sum_{j=1}^{m} f'_{X_n}(X_{1(s+j-1)}; \ldots; X_{n(s+j-1)})\Delta X_{n(s+j-1)} + u \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie: $\Delta X_{i(s+j-1)} = X_{i(s+j)} - X_{i(s+j-1)}$;

u – błąd oceny, który wraz ze wzrostem m maleje.

$A_{X_i}^{(m)} = \sum_{j=1}^{m} f'_{X_i}(X_{1(s+j-1)}; \ldots ; X_{n(s+j-1)})\Delta X_{i(s+j-1)}$ – oznacza wpływ przyrostu zmiennej X_i (*ceteris paribus*) na przyrost badanego zjawiska Y.

Niech K oznacza krzywą ciągłą (nie jest to krzywa zamknięta), łączącą punkty o współrzędnych $(X_{1s}, \ldots, X_{ns})$ i $(X_{1r}, \ldots, X_{nr})$.

Obliczmy granicę otrzymanej sumy $A_{X_i}^{(m)}$, gdy $m \to \infty$ (a więc $\Delta X_{i(s+j-1)} \to 0$). Jeśli granica taka istnieje (por. twierdzenie o istnieniu [3, s. 520]), to nazywamy ją całką krzywoliniową drugiego rodzaju (wzdłuż rzutu) po krzywej albo po drodze K funkcji f'_{X_i} po dX_i. Zatem (por. [3, s. 519–521]):

$$A_{X_i}^{(\infty)} = \lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{m} f'_{X_i}(X_{1(s+j-1)}; \ldots ; X_{n(s+j-1)})\Delta X_{i(s+j-1)} = \int_K f'_{X_i} dX_i \tag{13}$$

Ostatecznie otrzymuje się

$$\Delta Y = A_{X_1}^{(\infty)} + \ldots + A_{X_n}^{(\infty)} = \int_K f'_{X_1} dX_1 + \ldots + \int_K f'_{X_n} dX_n \tag{14}$$

Obliczanie całek krzywoliniowych drugiego rodzaju sprowadza się do obliczenia całek oznaczonych. Równania drogi całkowania K mogą być dane w postaci parametrycznej lub jawnej (por. np. [3, s. 520–521]).

Jeśli równania drogi K są dane w postaci parametrycznej $X_1 = X_1(t), \ldots, X_n = X_n(t)$, to całki $A_{X_1}^{(\infty)}, \ldots, A_{X_n}^{(\infty)}$ oblicza się według następującego wzoru (dla $i = 1, \ldots, n$):

$$A_{X_i}^{(\infty)} = \int_K f'_{X_i}(X_1, \ldots, X_n) dX_i = \int_{t_0}^{T} f'_{X_i}[X_1(t), \ldots, X_n(t)] X'_i(t) dt \tag{15}$$

We wzorach tych i_0 i T są wartościami parametru t odpowiadającymi początkowi i końcowi drogi całkowania.

Informacji o postaci krzywej K powinna dostarczać teoria ekonomii. Gdy brak jest takiej informacji, w praktycznych zadaniach analizy ekonomiczno-finansowej przyjmuje się, że zmiany czynników od punktu $(X_{1s}, \ldots, X_{ns})$ do punktu $(X_{1r}, \ldots, X_{nr})$ zachodzą po prostej.

Im założenie to jest bliższe rzeczywistości, tym oczywiście wynik jest dokładniejszy. W celu zmniejszenia skali błędu można zebrać dodatkowe dane o kształtowaniu się czynników $X_1, \ldots, X_n$ wewnątrz badanego przedziału czasowego. Dodatkowe dane pozwalają na dokonanie rozliczeń w poszczególnych podokresach, a nie tylko dla całego okresu globalnie. Zmniejszając długość badanych podokresów można przyjąć, nie popełniając zbyt dużego błędu, że zmiany czynników w poszczególnych podokresach zachodzą po prostej.

Równanie parametryczne odcinka o początku $(X_{1s}, \ldots, X_{ns})$ i końcu $(X_{1r}, \ldots, X_{nr})$ przedstawia układ:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{1s} + \Delta X_1 t = X_{1s}(1+a_1 t); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad t \in [0;\,1] \\ X_n &= X_{ns} + \Delta X_n t = X_{ns}(1+a_n t) \end{aligned} \tag{16}$$

Zakładając, że równanie drogi całkowania K jest dane w postaci równania parametrycznego odcinka, oblicza się całki $A_{X_1}^{(\infty)}, \ldots, A_{X_n}^{(\infty)}$ ze wzorów:

$$\begin{aligned} A_{X_1}^{(\infty)} &= \int_0^1 f'_{X_1}[X_1(t), \ldots, X_n(t)]\, \Delta X_1 dt; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{X_n}^{(\infty)} &= \int_0^1 f'_{X_n}[X_1(t), \ldots, X_n(t)]\, \Delta X_n dt \end{aligned} \tag{17}$$

Po podstawieniu za ΔY prawej strony równania (14), wzór określający odchylenie względne (5) można wyrazić jako

$$100\,\frac{\Delta Y}{Y_s} = 100\,\frac{\int_K f'_{X_1} dX_1}{Y_s} + \ldots + 100\,\frac{\int_K f'_{X_n} dX_n}{Y_s} = W_{X_1}^{(\infty)} + \ldots + W_{X_n}^{(\infty)} \tag{18}$$

gdzie: $W_{X_i}^{(\infty)}$ – wpływ przyrostu względnego czynnika X_i (*ceteris paribus*) na przyrost względny badanego zjawiska (w procentach).

Jeśli $\Delta X_i = 0{,}01\, X_{is}$, to wyrażenie $W_{X_i}^{(\infty)}$ jest elastycznością różnicową zmiennej Y względem zmiennej X_i. Termin ten zaproponował Pawłowski (por. np. [9, s. 37]) definiując własną propozycję miernika elastyczności dla przypadku, w którym rozpatruje się duże przyrosty badanego czynnika X_i.

Jeśli ponadto równanie drogi K jest odcinkiem, to wzór określający elastyczność różnicową zmiennej Y względem zmiennej X_i jest następujący:

$$\begin{aligned} W_{X_i}^{(\infty)} &= 100\,\frac{\int_0^1 f'_{X_i}[X_1(t), \ldots, X_n(t)]\, 0{,}01\, X_{is} dt}{Y_s} = \\ &\frac{X_{is}}{Y_s} \int_0^1 f'_{X_i}[X_1(t), \ldots, X_n(t)]\, dt. \end{aligned} \tag{19}$$

Bibliografia

[1] BARCZAK A., *Makromodele ekonometryczne a planowanie gospodarki narodowej*, PWN, Warszawa 1976.

[2] BARCZAK A., *Pomiar efektów oddziaływania zmiennych egzogenicznych i decyzyjnych*, [w:] Ekonometryczne metody prognozowania wykonania planów gospodarczych, red. Z. Pawłowski, PWN, Warszawa 1979.

[3] BRONSZTEJN I. N., SIEMIENDIAJEW K. A., *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa 1986.
[4] DOBIJA M., *Metoda empirycznych miar prawdopodobieństwa w rachunkowości*, Zeszyty Naukowe AE w Krakowie 1988, Seria specjalna: Monografie nr 84.
[5] FICHTENCHOLZ G. M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*. T. 1, PWN, Warszawa 1976.
[6] HOFFMANN L. D., *Calculus for Business, Economics, and the Social and Life Sciences*, New York: McGraw-Hill Book Company 1986.
[7] *Kurs analiza chozjajstvennoj dejatelnosti*, red. C.K. Tatur, A. D. Šeremet, Ekonomika, Moskva 1974.
[8] PAWŁOWSKI Z., *Ekonometryczna analiza procesu produkcyjnego*, PWN, Warszawa 1976.
[9] PAWŁOWSKI Z., *Elementy ekonometrii. Podręcznik*, PWN, Warszawa 1981.
[10] WALESIAK M., *Metody badań przyczynowych w analizie ekonomiczno-finansowej – próba syntezy w świetle postulowanych własności*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego 1990 (w druku).
[11] WALESIAK M., *Problem aksjomatyzacji metod badań przyczynowych w analizie ekonomiczno-finansowej*, Prace Nauk. AE, Wrocław 1991 (w druku).
[12] WALESIAK M., *Przyczynek do problemu aksjomatyzacji metod badań przyczynowych w analizie ekonomiczno-finansowej*, Prace Nauk. AE, Wrocław 1991 (w druku).

The measurement of variable influence effect on economic phenomenon

In the economic-financial analysis there are methods which are used to measure the variable influence effect on economic phenomenon.

The analysis of all these methods, from the point of view of some corectness conditions is contained in the papers [10], [11], [12]. In these articles the author has proposed a new method of the measurement of variable influence effect on economic phenomenon based on differential and integral calculus.

The article discusses the connection of the new method with the measure of point elasticity.

Further more, the measure of difference elasticity is proposed which can be used in the case of large increment of variables.

Verified by Marzena Łuczkiewicz