

Rozdział V

Niejednorodne, nieliniowe materiały transwersalnie izotropowe i ich implementacja MES

Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI

1. Uwagi wstępne

W klasie anizotropowych relacji konstytutywnych materiałów nieliniowo-sprężystych teorii małych odkształceń (TMO), bardzo ważnym typem ich symetrii względem transformacji ortogonalnych jest transwersalna izotropia (TRI), por. [3,6] i literaturę tam cytowaną. Spośród pięciu podgrup symetrii transwersalnej izotropii, teoretycznie możliwych w zagadnieniach kontinuum materialnego, relacje nieliniowe sprężystości TMO „wyróżniają” tylko dwie [6], które w kwadratowej aproksymacji funkcji jednostkowej energii sprężystości, sprowadzają się do tego samego typu symetrii zewnętrznych tensorów Hooke’a [4,6]. Zwykle mówimy wtedy, że mamy pięć niezależnych stałych sprężystości w związku Hooke’a. Ten rodzaj anizotropii materiału mamy np. w kompozytach o izotropowej macierzy zbrojonej jedną rodziną równoległych włókien i kryształach układu heksagonalnego.

W aplikacjach liniowej teorii sprężystości od lat 50. ubiegłego wieku, np. w mechanice skał i gruntów oraz w mechanice kompozytów, często występują zagadnienia brzegowe z uwzględnieniem tzw. „niejednorodności ciągłych” analizowanego ciała Ω . Tego typu niejednorodność w ciele „z materiałem TRI” występuje wtedy gdy ulega zmianie kierunek wyróżniony lub funkcyjnie zmienia się np. wartość modułów Younga.

Należy zaznaczyć, że podstawowe, lokalne równania TMO (czyli teorii nie uwzględniającej zmian konfiguracji zdeformowanego ciała), tzn. równania równowagi, związki kinematyczne i relacje konstytutywne (RK) są zdefiniowane dla każdej cząstki ciała $\mathbf{x} \in \Omega$. Wobec tego RK muszą być niezmiennicze względem transformacji ortogonalnych, co wynika z zasady obiektywności. Konsekwencją tego jest konieczność uwzględnienia w RK tzw. tensorów struktury rozpatrywanego materiału i jego niejednorodności. Zadanie (np. statyki) nieliniowej sprężystości jest poprawnie sformułowane jeżeli równania lokalne są uzupełnione odpowiednimi warunkami brzegowymi. W celu rozwiązania zadań nieliniowej sprężystości TMO najczęściej stosuje się metodę elementów skończonych (MES) i tzw. przyrostowe relacje konstytutywne. Celem pracy jest wyprowadzenie tego typu związków w przypadku niejednorodnych, nieliniowych materiałów TRI oraz ich implementacja

w programie MES ABAQUS [1,2]. Pokazane zostaną także proste przykłady testowe ilustrujące omawiane zagadnienia.

2. Jednostkowa energia sprężystości i relacje konstytutywne

Rozpatrujemy jednostkową energię sprężystości W jako funkcję tensora odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$, z dodatkowymi parametrami: tensorowym o postaci $\mathbf{M} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$, gdzie wersor $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ jest zgodny z kierunkiem wyróżnionym materiału oraz skalarnymi $p_n(\mathbf{x})$, $n = 1, \dots, N$ (symbol „ \otimes ” oznacza iloczyn tensorowy). Grupa symetrii zewnętrznych tensora \mathbf{M} (por. [3,6]) jest grupą symetrii materiału transwersalnie izotropowego. Rozpatrywany materiał odpowiada grupie symetrii $D_{\infty h}$, por. [6] i jest tylko jednym z typów możliwych materiałów transwersalnie izotropowych.

W tej pracy grupę symetrii definiujemy następująco:

$$S_{tri} = \{ \mathbf{Q} \in O(3) \mid \mathbf{M} = \mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T \}, \quad (2.1)$$

gdzie operacja $\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T$ oznacza obrót (albo obrót z odbiciem lustrzanym) tensora \mathbf{M} . Zauważmy, że $\text{tr}\mathbf{M} = 1$ oraz $\mathbf{M}^i = \mathbf{M}\mathbf{M}^{i-1} = \mathbf{M}$ (gdzie $i = 1, \dots, N$, „tr” - operacja śladu, „T” oznacza transpozycję tensora, $\mathbf{A}\mathbf{B}$ jest prostym nasunięciem tensorów \mathbf{A} i \mathbf{B}).

Uwzględnienie w zbiorze parametrów funkcji W pola tensorowego $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ i pól skalarnych $p_n(\mathbf{x})$ nie zmienia rozpatrywanej grupy symetrii i jest zgodne z zasadą obiektywności teorii małych odkształceń, w której nie rozróżnia się konfiguracji odkształconego ciała. Wobec tego funkcja W spełnia poniższe warunki:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}, p_n) = W(\mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Q}^T, \mathbf{M}, p_n), \quad \forall \mathbf{Q} \in S_{tri}, \quad (2.2)$$

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}, p_n) = W(\mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T, p_n), \quad \forall \mathbf{Q} \in O(3). \quad (2.3)$$

Z wymagań (2.2) i (2.3) oraz twierdzeń o reprezentacji skalarnej transwersalnie izotropowej funkcji tensorowej [3,6] wynika, że funkcja W jest zależna tylko od pięciu transwersalnie izotropowych niezmienników tensora $\boldsymbol{\varepsilon}$ oraz parametrów skalarnych r . Zależność $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ możemy interpretować jako niejednorodność ciała, wynikającą z różnych orientacji włókien materiału względem wybranego układu odniesienia, zgodną z zadanym polem wektorowym $\mathbf{m}(\mathbf{x})$, zaś jedna z funkcji $p_n(\mathbf{x})$ może np. uwzględniać niejednorodność ciała wynikającą z różnej zawartości włókien materiału w stosunku do „materiału matrycy” (np. stosunek objętości włókien do objętości matrycy dla wybranej reprezentatywnej objętości ciała). Należy zaznaczyć, że „prawidłowe” zdefiniowanie (określenie) pojęcia reprezentatywnej objętości ciała nie wynika z teorii mechaniki ośrodków ciągłych lecz obserwacji mikrostruktury ciała.

Ponieważ baza wielomianowa niezmienników anizotropowej funkcji skalarnej zależnej od symetrycznego tensora drugiego rzędu jest jednocześnie bazą funkcyjną (por. [6]), to w ogólności funkcja $W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}, p_n)$ ma postać:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}, p_n) = W^{tri}(I_i, p_n); \quad i = 1, \dots, 5, \quad (2.4)$$

gdzie zbiór niezmienników $\{I_i\}$ można wybrać następująco:

$$I_1 = \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad I_2 = \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^2, \quad I_3 = \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^3, \quad I_4 = \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}, \quad I_5 = \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^2\mathbf{M}. \quad (2.5)$$

Niezmienniki te tworzą nieredukowalne bazy wielomianowe transwersalnie izotropowej funkcji jednostkowej energii sprężystości. W (2.5) zastosowano uproszczoną notację, tzn. $\text{tr}\mathbf{AB} \equiv \text{tr}(\mathbf{AB})$.

W przypadku sprężystości zakładamy, że funkcja W^{tri} jest funkcją wypukłą względem tensora odkształcenia oraz spełnia założenia stanu naturalnego. Ogólną postać relacji konstytutywnej sprężystości niejednorodnych materiałów transwersalnie izotropowych, definiujemy następująco:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left. \frac{\partial W^{tri}(I_i, p_n)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^T}. \quad (2.6)$$

3. Operator czwartego rzędu w związkach przyrostowych

W zadaniach dynamiki pola wektora przemieszczenia i tensorów odkształcenia oraz naprężenia są zależne od \mathbf{x} i czasu t . Wobec tego pochodna po czasie funkcji jednostkowej energii sprężystości jest następująca:

$$\begin{aligned} \dot{W}^{tri} &= \frac{\partial W^{tri}}{\partial I_1} \dot{I}_1 + \frac{\partial W^{tri}}{\partial I_2} \dot{I}_2 + \frac{\partial W^{tri}}{\partial I_3} \dot{I}_3 + \frac{\partial W^{tri}}{\partial I_4} \dot{I}_4 + \frac{\partial W^{tri}}{\partial I_5} \dot{I}_5 \equiv \\ &\equiv W_1^{tri} \dot{I}_1 + W_2^{tri} \dot{I}_2 + W_3^{tri} \dot{I}_3 + W_4^{tri} \dot{I}_4 + W_5^{tri} \dot{I}_5 \end{aligned} \quad (3.1)$$

We wzorze (3.1) wprowadzono oznaczenia $\frac{\partial W^{tri}}{\partial I_2} = W_2^{tri}$, itp. W (3.1) należy pamiętać, że pola $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ i $p_n(\mathbf{x})$ nie są zależne od czasu. Ponieważ:

$$\left. \frac{\partial \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^n}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^T} = n\boldsymbol{\varepsilon}^{n-1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{I}, \quad \left. \frac{\partial \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^T} = \mathbf{M}, \quad \left. \frac{\partial \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^2\mathbf{M}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^T} = \mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}}, \quad (3.2)$$

gdzie \mathbf{I} jest tensorem jednostkowym drugiego rzędu, to równanie (3.1) przekształcimy do postaci:

$$\dot{W}^{tri} = (W_1^{tri}\mathbf{I} + 2W_2^{tri}\boldsymbol{\varepsilon} + 3W_3^{tri}\boldsymbol{\varepsilon}^2 + W_4^{tri}\mathbf{M} + W_5^{tri}\tilde{\mathbf{M}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.3)$$

Wyrażenie w nawiasie określa więc stan naprężenia (gdyż $\dot{W}^{tri} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$):

$$\boldsymbol{\sigma} = W_1^{tri}\mathbf{I} + 2W_2^{tri}\boldsymbol{\varepsilon} + 3W_3^{tri}\boldsymbol{\varepsilon}^2 + W_4^{tri}\mathbf{M} + W_5^{tri}\tilde{\mathbf{M}}. \quad (3.4)$$

Różniczkując po czasie (3.4) otrzymamy:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{W}_1^{tri}\mathbf{I} + 2\dot{W}_2^{tri}\boldsymbol{\varepsilon} + 2W_2^{tri}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + 3\dot{W}_3^{tri}\boldsymbol{\varepsilon}^2 + 6W_3^{tri}\boldsymbol{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{W}_4^{tri}\mathbf{M} + \dot{W}_5^{tri}\tilde{\mathbf{M}} + W_5^{tri}(\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{M}). \quad (3.5)$$

W celu określenia tensora czwartego rzędu, po prawej stronie równania (3.5) należy wyłączyć wielkość $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Korzystając z przemienności różniczkowania ($W_{ij}^{tri} = W_{ji}^{tri}$) i pamiętając o symetrii tensora odkształcenia oraz tensora parametrycznego, wzór (3.5) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\sigma}} = & [W_{11}^{tri} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2W_{12}^{tri} (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) + 3W_{13}^{tri} (\boldsymbol{\varepsilon}^2 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^2) + \\
& + W_{14}^{tri} (\mathbf{M} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}) + W_{15}^{tri} (\tilde{\mathbf{M}} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \tilde{\mathbf{M}}) + \\
& + 2W_2^{tri} \mathbf{1} + \\
& + 4W_{22}^{tri} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} + 6W_{23}^{tri} (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^2 + \boldsymbol{\varepsilon}^2 \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) + 2W_{24}^{tri} (\mathbf{M} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \mathbf{M}) + \\
& + 2W_{25}^{tri} (\tilde{\mathbf{M}} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \tilde{\mathbf{M}}) + \tag{3.6} \\
& + 9W_{33}^{tri} \boldsymbol{\varepsilon}^2 \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^2 + 3W_{34}^{tri} (\boldsymbol{\varepsilon}^2 \otimes \mathbf{M} + \mathbf{M} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^2) + 3W_{35}^{tri} (\boldsymbol{\varepsilon}^2 \otimes \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{M}} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^2) + \\
& + 3W_3^{tri} (\boldsymbol{\varepsilon} \diamond \mathbf{I} + \mathbf{I} \diamond \boldsymbol{\varepsilon}) \\
& + W_{44}^{tri} \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} + W_{45}^{tri} (\mathbf{M} \otimes \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{M}} \otimes \mathbf{M}) + W_{55}^{tri} \tilde{\mathbf{M}} \otimes \tilde{\mathbf{M}} + \\
& + W_5^{tri} (\mathbf{M} \diamond \mathbf{I} + \mathbf{I} \diamond \mathbf{M})]. \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Warto podkreślić, że jest to najogólniejsza postać przyrostowej relacji konstytutywnej transwersalnej izotropii. Relacja ta jest nieliniowa i obowiązuje w przypadku gdy funkcja W^{tri} jest dwukrotnie różniczkowalna względem niezmienników bazy. W (3.6) $\mathbf{1}$ jest jednostkowym tensorem czwartego rzędu (o symetriach wewnętrznych tensorów Hooke'a), w bazach ortonormalnych, składowe tensora czwartego rzędu $\mathbf{A} \diamond \mathbf{B}$ obliczamy następująco: $A_{ik} B_{jl}$. Należy zaznaczyć, że w zadaniu statyki t nie jest czasem tylko dowolnym parametrem skalarnym.

4. Uwagi o implementacji w programie ABAQUS

Nieliniowy materiał transwersalnie izotropowy z relacją przyrostową typu (3.6) nie jest dostępny w żadnym ze znanych autorom programie MES. Wobec tego relacja konstytutywna (3.6) została zaimplementowana w najogólniejszej postaci w ramach procedury użytkownika UMAT programu ABAQUS/Standard. W celu jej wykorzystania w konkretnym przypadku, konieczne jest zdefiniowanie (w języku FORTRAN) pochodnych funkcji JES oraz funkcji $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ i $p_n(\mathbf{x})$. Związki (3.6) dotyczą zagadnień 3D, ale mogą być także stosowane w zadaniach płaskiego stanu odkształcenia (PSO). Ponieważ program MES ABAQUS/Standard został napisany głównie z myślą o badaniu i poszukiwaniu rozwiązań zagadnień geometrycznie i fizycznie nieliniowych mechaniki kontinuum, to w danych zadania nie uwzględniamy opcji NLGEOM, gdyż wtedy obliczenia dotyczą teorii małych odkształceń. **Liniowy materiał transwersalnie izotropowy** jest standardowo dostępny w programie ABAQUS [1,2], poprzez opcję ELASTIC, TYPE=ANISOTROPIC i podanie reprezentacji macierzowej tensora sztywności czwartego rzędu w notacji Voigta. W ramach ogólnych relacji konstytutywnych materiałów transwersalnie izotropowych zaprezentowanych w poprzednim punkcie, mieści się wiele modeli materiałów, w tym także

modele niejednorodnych, izotropowych materiałów nieliniowo-sprężystych (wtedy w (2.4) nie występują niezmienniki I_4 i I_5 , czyli w (3.6) pomijamy wyrazy zależne od \mathbf{M}).

Szczegółowa analiza wszystkich możliwości wynikających z ogólnej relacji (3.6) nie jest celem niniejszego artykułu i będzie przedmiotem dalszych prac. Jeżeli operator czwartego rzędu w (3.6) jest dodatnio określonym tensorem czwartego rzędu i nie jest zależny od $\boldsymbol{\varepsilon}$, to otrzymujemy z (3.6) relacje konstytutywne niejednorodnych, liniowo-sprężystych materiałów transwersalnie izotropowych. Jednym z przykładów tego typu materiałów może być prezentowany w pracy [5] (patrz także rozdział III) model materiału kompozytowego w postaci izotropowej matrycy zbrojonej włóknami, w którym funkcja (2.4) jest następująca:

$$\tilde{W}^{tri}(I_1, I_2, I_4) = (1-p) \left(\frac{1}{2} \lambda I_1^2 + \mu I_2 \right) + p \frac{1}{2} E_z I_4^2 = (1-p) \left(\frac{1}{2} \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^2 \right) + \frac{1}{2} p E_z (\text{tr} \mathbf{M})^2, \quad (4.1)$$

gdzie dane jest pole $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, a $p(\mathbf{x})$ oznacza udział objętościowy włókien. W (4.1), E_z jest modułem Younga zbrojenia, zaś $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ i $\lambda = 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu}$, są stałymi sprężystości matrycy. Z (3.6) i (4.1) wynika, że

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[(1-p)(\lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{1}) + p E_z \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.2)$$

W przypadku płaskiego stanu naprężenia (PSN), zamiast (4.2) mamy:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \left[(1-p) \left(\frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda} \hat{\mathbf{I}} \otimes \hat{\mathbf{I}} + 2\mu \hat{\mathbf{1}} \right) + p E_z \hat{\mathbf{M}} \otimes \hat{\mathbf{M}} \right] \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \quad (4.3)$$

gdzie $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\hat{\mathbf{M}}$ i $\hat{\mathbf{I}}$ są „płaskimi” tensorami drugiego rzędu. Dodatkowa składowa stanu odkształcenia, prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez wektor \mathbf{n} (wektor \mathbf{n} jest prostopadły do płaszczyzny PSN), wyraża się następującym wzorem:

$$\varepsilon = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \text{tr} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{\nu}{1-\nu} \text{tr} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (4.4)$$

który jest analogiczny jak w przypadku materiału izotropowego.

5. Przykłady testowe

Przykłady testów numerycznych, które zamieszczamy w tym punkcie, ilustrują wybrane zadania brzegowe statyki z uwzględnieniem opisu materiałów niejednorodnych o przyrostowych relacjach konstytutywnych (4.2) (czyli zagadnień 3D i PSO) oraz (4.3-4.4) (w przypadku PSN). Są to także propozycje stosunkowo prostych zadań testowych MES i zaprogramowanej procedury UMAT. Ze względu na ograniczoną objętość artykułu prezentujemy tu tylko małą część uzyskanych wyników. Rozpatrujemy testy numeryczne dla tarcz PSO i PSN, w których niejednorodność materiału transwersalnie izotropowego wynika z występowania w kompozycie różnej orientacji włókien, czyli zadanego pola $\hat{\mathbf{M}}(\hat{\mathbf{x}})$ i różnego udziału objętościowego włókien $p(\hat{\mathbf{x}})$.

Zbrojone tarcze kołowe

W przypadku tarcz kołowych, w których wersor $\mathbf{m}(\hat{\mathbf{x}})$ jest zgodny z \mathbf{e}_r albo \mathbf{e}_φ (czyli wersorami lokalnej bazy fizycznej układu biegunowego) i przy warunkach brzegowych niezależnych od kąta φ , mamy zadania o symetrii kołowej. Łatwo w tym przypadku znaleźć rozwiązanie analityczne zadania we współrzędnych biegunowych (a później stosując zamianę zmiennych i reguły transformacji tensorów otrzymać rozwiązania w układzie kartezjańskim). Rozwiązanie wymienionych zadań w przemieszczeniach sprowadza się do badania równania różniczkowego typu Eulera, por. [7], gdzie rozwiązane jest zadanie o tzw. symetrii cylindrycznej. W celu skupienia uwagi rozpatrujemy zadanie tarczy kołowej o promieniu R (z otworem o promieniu αR) i następujących warunkach brzegowych:

$$\sigma_{rr}(\alpha R) = 0, \quad \sigma_{rr}(R) = -q. \quad (5.1)$$

Zakładamy, że siły masowe są zerowe i rozwiązujemy zadanie w czterech podstawowych przypadkach, tzn. PSO albo PSN oraz $\mathbf{m} = \mathbf{e}_r$ albo $\mathbf{m} = \mathbf{e}_\varphi$. W testach MES rozwiązujemy te zadania w kartezjańskim układzie współrzędnych, wg schematu zamieszczonego na rys.5.1 (pola wektorów \mathbf{m} należy zapisać w kartezjańskim układzie współrzędnych, por. także następny przykład z rozciąganą tarczą kwadratową z otworem kołowym). Na przykład, w zadaniu ze zbrojeniem promieniowym: $\mathbf{m} = \mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{b}_1 + \sin \varphi \mathbf{b}_2$ (\mathbf{b}_1 i \mathbf{b}_2 są wersorami układu kartezjańskiego), czyli zadane jest pole:

$$\mathbf{m}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2) \Rightarrow \hat{\mathbf{M}}(x, y) \rightarrow \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

W konsekwencji tensor sztywności jest zależny od zmiennych przestrzennych x i y , co wynika z (4.3) i (5.2).

Także każde z wymienionych zadań rozwiązujemy analitycznie w biegunowym układzie współrzędnych, metodą przemieszczeniową, która (po uwzględnieniu zależności kinematycznych: $\varepsilon_{rr} = du_r/dr$ i $\varepsilon_{\varphi\varphi} = u_r/r$, w (4.2) albo (4.3) i po ich podstawieniu do równania równowagi) prowadzi do jednorodnego równania różniczkowego na funkcję $u_r(r)$ o postaci:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \left(\frac{a}{r}\right)^2 u_r = 0, \quad a > 0, \quad (5.3)$$

którego rozwiązanie jest następujące:

$$u_r(r) = C_1 r^{-a} + C_2 r^a. \quad (5.4)$$

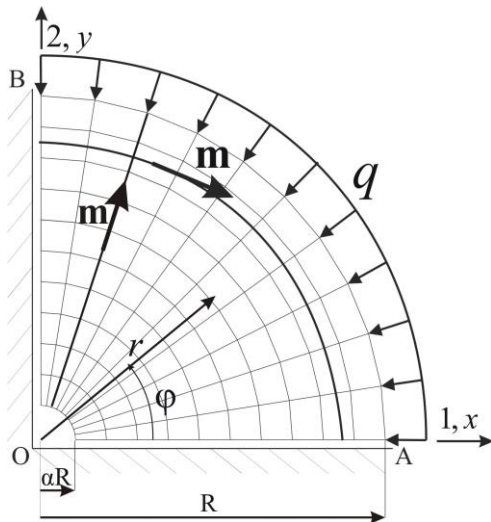
Wzór na parametr a zależy od rozpatrywanego zadania i na przykład w zadaniach PSN wynosi:

$$a = b \equiv \sqrt{1 + \frac{\eta p (1 - \nu^2)}{1 - p}} \quad \text{dla } \mathbf{m} = \mathbf{e}_r \quad \text{albo} \quad a = \frac{1}{b} \quad \text{dla } \mathbf{m} = \mathbf{e}_\varphi. \quad (5.5)$$

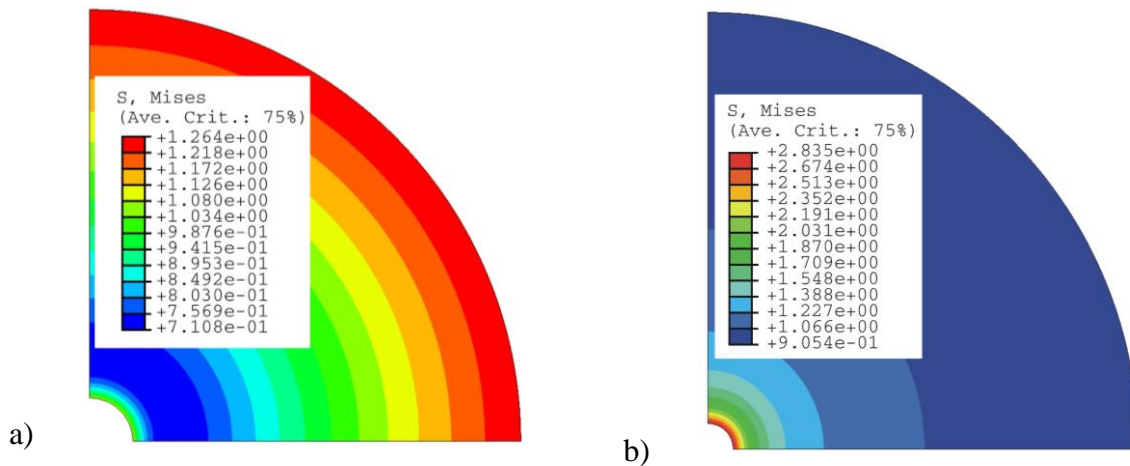
Stałe C_1 i C_2 , po zastosowaniu odpowiednich wzorów na składowe stanu naprężenia, obliczmy z (5.1), otrzymując w PSN:

$$C_1 = \frac{a-v}{a+v} (\alpha R)^{2a} C_2, \quad C_2 = -\frac{q}{E} \frac{(1-p+\eta p)}{(a-v)} \frac{R^{1+a}}{R^{2a} - (\alpha R)^{2a}}. \quad (5.6)$$

Nie podajemy tu wszystkich, niezbędnych do wykonania pełnego porównania z rozwiązaniem MES, wzorów na składowe stanu naprężenia i odkształcenia, ponieważ znajdujemy je w standardowy sposób (co także dotyczy wyników w układzie kartezjańskim). Nie zamieszczamy także w tym rozdziale szczegółowej analizy wyników i wykresów, które wynikają z rozwiązania analitycznego i numerycznego.



Rysunek 5.1. Schemat zadania MES (tarcza PSN albo PSO). Włókna zbrojenia ułożone są pierścieniowo albo obwodowo

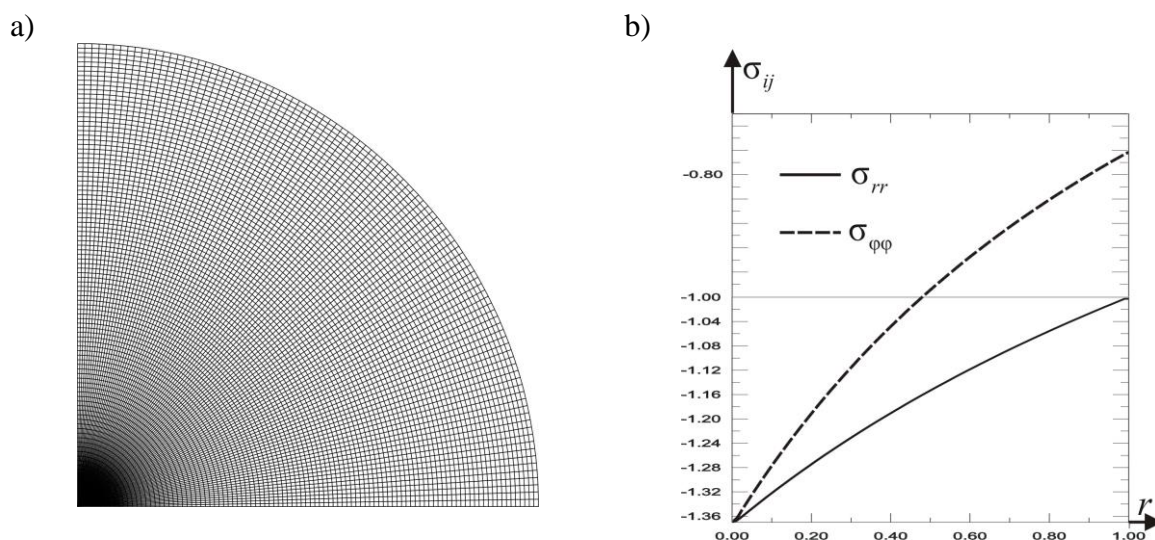


Rysunek 5.2. Wykresy warstwiczne intensywności naprężeń (naprężeń zastępczych Hubera-Misesa) uzyskane dla II siatki MES w przypadku PSN, przy zbrojeniu: a) pierścieniowym, b) promieniowym. Wyniki przeskalowane są przez q i wykonane dla r/R . Pozostałe dane są następujące: $E = 2.6\mu$ (wyniki w naprężeniach nie są zależne od E), $\nu = 0.3$, $\alpha = 0.1$, $\eta = 10$, $p = 0.1$. Błąd w stosunku do rozwiązania analitycznego jest mniejszy niż 1%

W testach MES stosowano siatki I i II, złożone ze 100 oraz 1000 elementów skończonych (10 albo 1000 elementów promieniowo, elementy typu CPS4 albo CPE4).

Dokładność uzyskanych wyników w przemieszczeniach wynosi w przypadkach I i II, odpowiednio ok. 0.1% i 0.01%. Błąd w składowych stanu naprężenia i odkształcenia, w przypadku siatki II, nie przekracza ok. 1%. Należy zaznaczyć, że w rozwiązaniu MES otrzymujemy uporządkowane naprężenia i odkształcenia główne, natomiast w rozwiązaniu analitycznym we współrzędnych biegunowych (w zależności od przyjętych parametrów materiałowych i danych zadania) mamy wielkości nieuporządkowane. Bardzo łatwa jest natomiast interpretacja rozwiązania MES dotycząca intensywności odkształceń i naprężeń (patrz rys.5.2) i ich porównanie z rozwiązaniem analitycznym. Przykładowe wykresy warstwiczne zamieszczone są na rys.5.2. Zauważmy brak jakichkolwiek zaburzeń wyników numerycznych dla kołowych wykresów warstwicznych.

Badano także rozwiązanie zadań w przypadku $\alpha = 0$, zarówno analitycznie jak i numerycznie (z siatkami MES I i II, uzupełnionymi elementami trójwęzłowymi CPS3 albo CPE3, odpowiednio o 110 i 10100 elementach, patrz rys.5.3a). Na przykład w zadaniu ze zbrojeniem promieniowym otrzymuje się wtedy w środku tarczy i z rozwiązania analitycznego, nieskończone ujemne wartości naprężeń promieniowych i obwodowych. Oczywiście tego typu wyniku rozwiązania MES, przy wymienionych typach elementów skończonych, nie można otrzymać i rozwiązanie jest zależne od zastosowanej siatki MES w małym podobszarze punktu O. Wobec tego wykonano także testy numeryczne (ze zbrojeniem promieniowym tarczy), przy założeniu dodatkowej niejednorodności materiału, o postaci: $p = p(r) = p_0 \cdot r$, co oznacza, że dla $r \rightarrow 0$ „materiał niejednorodny dąży do materiału izotropowego o własnościach takich samych jak własności matrycy”. Przykładowe wyniki MES dla równomiernie ściskanej tarczy PSN zbrojonej promieniowo pokazano na rys.5.3b. Przyjęto $p_0 = 0.1$, przy pozostałych danych jak w opisie rys.5.2.

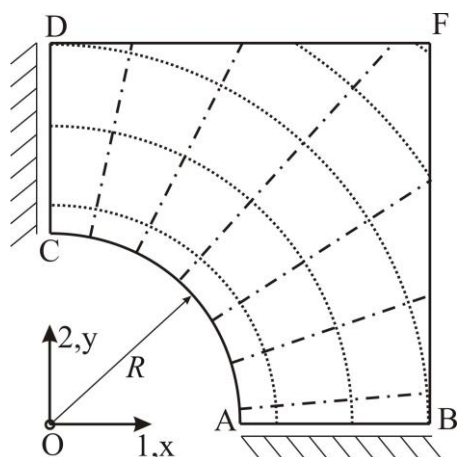


Rysunek 5.3. Równomiernie ściskana tarcza kołowa PSN zbrojona promieniowo, o udziale objętościowym włókien wg wzoru (22): a) siatka MES (10100 elementów), b) naprężenia główne skalowane przez q i ich interpretacja. W zadaniu jednorodnej tarczy izotropowej mamy: $\sigma_{rr} = \sigma_{\phi\phi} = -q$

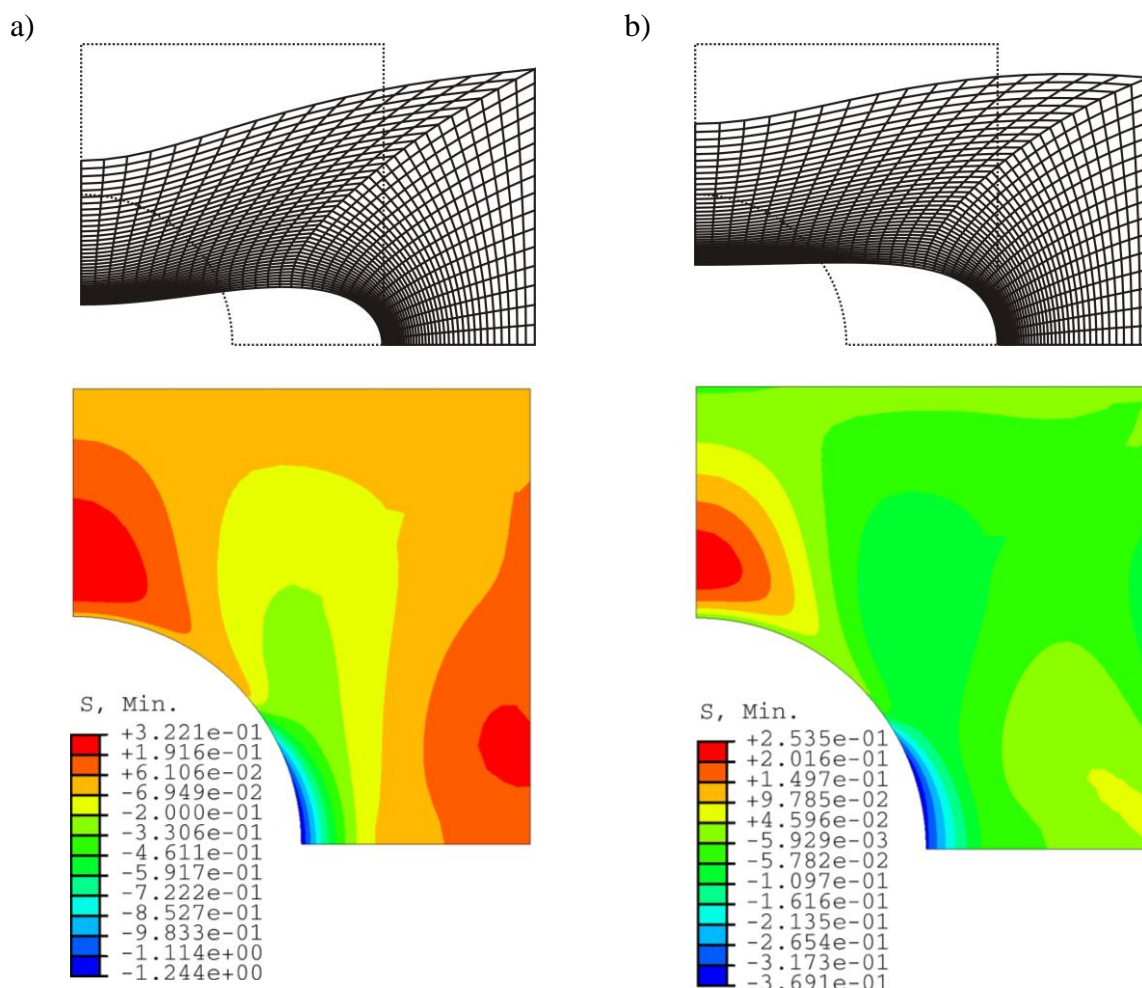
Rozciąganie niejednorodnej, kwadratowej tarczy z otworem kołowym

Rozpatrujemy test MES, rozciąganej, niejednorodnej tarczy PSN wg schematu zamieszczonego na rys.5.4. Niejednorodność tarczy wynika z różnej orientacji kierunku wyróżnionego materiału transwersalnie izotropowego względem boków tarczy, por. np. (18).

Rozpatrujemy dwa zadania brzegowe, które mają symetrię prostokąta względem płaskiej grupy obrotów.



Rysunek 5.4. Geometria i schemat statyczny w zadaniu MES oraz dwa warianty ułożenia włókien zbrojenia (promieniowo albo pierścieniowo) w tarczy kwadratowej o boku $4R$ z otworem o promieniu R . Na boku DF i AC zadane są zerowe naprężeniowe warunki brzegowe, natomiast na boku BF zadane są przemieszczenia: $u_1 = d$, $u_2 = 0$. Pozostałe dane są następujące: $E = 2.6\mu$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 0.1$, $\eta = 10$, $p = 0.1$



Rysunek 5.5. Deformacje siatki MES i minimalne naprężenia główne, tarcza PSN: a) zbrojona włóknami pierścieniowo, b) zbrojona włóknami promieniowo, por. rys.5.4

Na rys.5.5 zamieszczone są deformacje siatek MES dwóch analizowanych tarcz, które zbrojone są promieniowo albo pierścieniowo (względem kołowego otworu tarczy). W celu lepszej wizualizacji wyników przyjęto w warunkach brzegowych $d = R$ (należy pamiętać, że

zadanie jest rozwiązane w ramach TMO). Pomimo zbliżonych wartości pola normy przemieszczenia w tych dwóch zadaniach, wyraźnie widoczny jest inny charakter deformacji tarczy, patrz rys.5.5. Istotnie różne są w tych zadaniach wartości pól naprężeń i odkształceń głównych oraz ich wzajemna orientacja, co wynika zarówno z anizotropii jak i niejednorodności materiału. Przykładowe wyniki pokazane są na rys.5.5 i dotyczą minimalnych naprężeń głównych.

6. Uwagi końcowe

W pracy zaproponowano sposób implementacji numerycznej (tzw. procedur użytkownika UMAT, programu MES ABAQUS/Standard) relacji konstytutywnych nieliniowej teorii sprężystości małych odkształceń, materiałów transwersalnie izotropowych o ciągłej i gładkiej niejednorodności. Rozpatrywana niejednorodność materiału wynika z występowania skalarnych i tensorowych pól parametrycznych, które oprócz znajomości postaci funkcji jednostkowej energii sprężystości (ES), są danymi zadania. Napisane procedury są ogólne i umożliwiają stosunkowo łatwe ich zastosowanie dla dowolnej funkcji ES, dwukrotnie różniczkowalnej względem pięcioelementowej bazy wielomianowej niezmienników tensora odkształceń. Jeżeli w funkcji ES nie występuje tensor parametryczny, to relacje konstytutywne definiują nieliniowy, niejednorodny materiał izotropowy o bazie złożonej z trzech niezmienników.

W pracy pokazano tylko stosunkowo proste testy numeryczne zaprogramowanej procedury UMAT z relacjami konstytutywnymi transwersalnej izotropii, o interpretacji materiałów izotropowych zbrojonych włóknami. Niejednorodność materiału wynika wtedy z różnej, zmieniającej się odpowiednio regularnie, orientacji włókien zbrojenia i ich różnego udziału objętościowego w rozpatrywanym ośrodku o izotropowej matrycy.

Bibliografia/ References

- [1] ABAQUS *Theory manual*, Version 6.3., Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket, 2002.
- [2] ABAQUS/Standard *User's manual*, Version 6.3., Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket, 2002.
- [3] Boehler J.P. [ed]: *Applications of tensor functions in solid mechanics*, CISM Courses and Lectures No. 292, Springer-Verlag, Wien-New York, 1987.
- [4] Jemioło S.: Programy „ut tensio sic vis” Część I. Grupy symetrii materiałów Hooke’a. Moduły Kelvina i projektory, Prace Naukowe Politechniki Radomskiej, Transport Nr 1(17) 2003, Z. Strzyżakowski [red], str. 215-222, Radom 2003.
- [5] Jemioło S., Gajewski M.: Cztery typy symetrii płaskich tensorów Hooke'a na przykładzie modelu kompozytu włóknistego, *Theoretical Foundations of Civil Engineering*, Polish-Ukrainian Transactions, W. Szcześniak [ed], str. 405-416, Oficyna Wydawnicza PW, Dnepropetrovsk-Warszawa 2005.
- [6] Jemioło S., Telega J.J.: Representations of tensor functions and applications in continuum mechanics, *IFTR Reports*, Warsaw 3/1997.
- [7] Лехницкий С.Г.: *Анизотропные пластинки*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва-Ленинград, 1947.

Rozdział w monografii:

Sprężystość i hipersprężystość. Modelowanie i zastosowania,

S. Jemioło [red.],

Oficyna Wydawnicza PW,

Warszawa 2012

ISBN: 978-83-7814-066-5

Publikacje z serii wydawniczej „Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności” są prezentowane w zakładce „Prace naukowe” na stronie internetowej Oficyny Wydawniczej Politechniki Warszawskiej:

www.wydawnictwopw.pl

Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej prowadzi sprzedaż:

- ◆ stacjonarną – w księgarniach OWPW – Gmach Główny Politechniki Warszawskiej przy Placu Politechniki 1 – ul. Noakowskiego 18/20
- ◆ internetową – <http://www.wydawnictwopw.pl>
- ◆ wysyłkową – tel. 22 234-75-03 fax 22 234-70-60 e-mail: oficyna@wpw.pw.edu.pl

SPRĘŻYSTOŚĆ I HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ. Modelowanie i zastosowania



SPRĘŻYSTOŚĆ I HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ

Modelowanie i zastosowania

Monografia
pod redakcją naukową
Stanisława Jemioła



ISBN 978-83-7814-066-5



9 788378 140665

Tom 1

Seria Monografie Zakładu
Wytrzymałości Materiałów,
Teorii Sprężystości i Plastyczności



Seria Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności

TOM 1

SPRĘŻYSTOŚĆ I HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ. MODELOWANIE I ZASTOSOWANIA (pod red. nauk. Stanisława Jemioła)

TOM 2

ZAGADNIENIA STATYKI SPRĘŻYSTYCH PÓŁPRZESTRZENI WARSTWOWYCH (Stanisław Jemioła, Aleksander Szwed)

TOM 3

DEFORMACJE I WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW I ELEMENTÓW KONSTRUKCJI (Stanisław Jemioła, Aleksander Szwed)

TOM 4

HIPERSPRĘŻYSTOPLASTYCZNOŚĆ (Stanisław Jemioła, Marcin Gajewski)

TOM 5

TERMOSPRĘŻYSTOŚĆ I PRZEPŁYW CIEPŁA W MATERIAŁACH ANIZOTROPOWYCH ((pod red. nauk. Stanisława Jemioła)

**Seria wydawnicza
Monografie Zakładu
Wytrzymałości Materiałów,
Teorii Sprężystości
i Plastyczności**

Tom 1



**Wydział Inżynierii Lądowej
Politechniki Warszawskiej**



SPRĘŻYSTOŚĆ I HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ

Modelowanie i zastosowania

Monografia
pod redakcją naukową
Stanisława Jemioła

Seria Monografie Zakładu
Wytrzymałości Materiałów,
Teorii Sprężystości i Plastyczności

Warszawa 2016

Publikacja jest I tomem Serii Wydawniczej
„Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów,
Teorii Sprężystości i Plastyczności”

Opiniodawcy

Dr hab. inż. Aniela Glinicka, prof. PW

Dr hab. inż. Leszek Małyszko, prof. UWM

Redaktor naukowy

Stanisław Jemioło

Projekt okładki

Danuta Czudek-Puchalska

© Copyright by Zakład Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności
Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2012, 2016

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych, w tym nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w Internecie bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich

ISBN 978-83-7814-066-5

Druk i oprawa: Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Warszawskiej, tel. 22 234-55-93
Oficyna Wydawnicza PW, ul. Polna 50, 00-644 Warszawa. Wydanie II uzup. Zam. nr 535/2015

Przedmowa do wydania I

Oddana do rąk Czytelników monografia dotyczy sprężystości i hipersprężystości. Autorami poszczególnych rozdziałów są pracownicy Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności, Instytutu Inżynierii Budowlanej Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej. Cztery pierwsze rozdziały poświęcone są liniowej teorii sprężystości materiałów izotropowych i anizotropowych. Piąty rozdział dotyczy nieliniowej teorii sprężystości małych przemieszczeń i odkształceń materiałów transwersalnie izotropowych. Kolejne rozdziały od szóstego do czternastego dotyczą hipersprężystości i teorii dużych deformacji.

Zagadnienia prezentowane w monografii są od wielu lat przedmiotem zainteresowań naukowych pracowników Zakładu. Są to zarówno zagadnienia klasyczne, takie jak zagadnienie skręcania prętów przyrzmacznych, wyznaczania trajektorii pól tensorowych naprężeń i odkształceń w tarczach oraz momentów zginających w płytach, jak i implementacje numeryczne nieliniowych relacji konstytutywnych sprężystości w systemie metody elementów skończonych ABAQUS. Dalsze rozdziały dotyczą teorii hipersprężystości, której efektywne zastosowania wiążą się z rozwojem metod numerycznych i możliwości obliczeniowej komputerów. Według opinii autorów *podstawową trudnością, która jest niezależna od rozwoju metod numerycznych, jest wybór adekwatnego modelu materiału*, określenie parametrów i funkcji materiałowych oraz ich weryfikacja doświadczalna. Wobec tego w monografii uwypuklone są zagadnienia dotyczące teorii relacji konstytutywnych hipersprężystości.

Stanisław Jemiolo

Przedmowa do wydania II

W wydaniu drugim monografii dodano pięć rozdziałów, trzy z nich dotyczą sprężystości małych odkształceń, natomiast dwa rozdziały są związane z relacjami konstytutywnymi hipersprężystości materiałów anizotropowych.

Stanisław Jemiolo

Spis treści

Rozdział I

Swobodne skręcanie prętów pryzmatycznych o przekroju w kształcie wycinka koła albo pierścienia.....9

Stanisław JEMIOŁO, Aleksander SZWED

Rozdział II

Tarcze i rodzaje anizotropii materiałów liniowo sprężystych35

Stanisław JEMIOŁO

Rozdział III

Cztery typy płaskiej anizotropii na przykładzie modelu kompozytu włóknistego.....45

Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI

Rozdział IV

Trajektorie wartości własnych w zagadnieniach płaskich.....57

Aleksander SZWED, Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI

Rozdział V

Niejednorodne, nieliniowe materiały transwersalnie izotropowe i ich implementacja MES.....73

Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI

Rozdział VI

Optymalne orientacje materiału ortotropowego83

Stanisław JEMIOŁO

Rozdział VII

Drgania własne kamertonu jako przykład testowy MES89

Marcin GAJEWSKI, Stanisław JEMIOŁO

Rozdział VIII

Zagadnienia brzegowe 2D liniowej sprężystości materiałów anizotropowych - zastosowanie systemu PDE MATLAB95

Marcin GAJEWSKI, Stanisław JEMIOŁO

Rozdział IX

Najprostsze modele hipersprężystości materiałów izotropowych.....103

Stanisław JEMIOŁO

Rozdział X	
Przykłady modeli materiałów ściśliwych i mało-ściśliwych.....	115
<i>Stanisław JEMIOŁO</i>	
Rozdział XI	
Implementacja numeryczna w MES modeli CNH i MCNH.....	133
<i>Stanisław JEMIOŁO</i>	
Rozdział XII	
Hipersprężysta kula obciążona własnym ciężarem jako test numeryczny zadania kontaktowego	143
<i>Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI, Cezary AJDUKIEWICZ</i>	
Rozdział XIII	
Ortotropowy materiał Saint-Venanta-Kirchhoffa.....	149
<i>Stanisław JEMIOŁO</i>	
Rozdział XIV	
Szczególne przypadki ortotropowego materiału SVK	161
<i>Stanisław JEMIOŁO</i>	
Rozdział XV	
Przykłady modeli SVK.....	169
<i>Stanisław JEMIOŁO</i>	
Rozdział XVI	
Implementacja MES modeli konstytutywnych hipersprężystych materiałów zbrojonych włóknami.....	179
<i>Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI</i>	
Rozdział XVII	
Symulacja numeryczna i weryfikacja doświadczalna testu rozciągania płaskownika z uwzględnieniem teorii sprężysto – plastyczności dużych deformacji	187
<i>Cezary AJDUKIEWICZ, Marcin GAJEWSKI, Stanisław JEMIOŁO</i>	
Rozdział XVIII	
Uogólnienia modeli konstytutywnych ortotropowego materiału SVK w płaskich zagadnieniach hipersprężystości.....	199
<i>Stanisław JEMIOŁO</i>	
Rozdział XIX	
Porównanie modeli materiałów ortotropowych w zagadnieniach płaskich	215
<i>Stanisław JEMIOŁO</i>	