

# **Rozdział XVI**

## **Implementacja MES modeli konstytutywnych hipersprężystych materiałów zbrojonych włóknami**

*Marcin GAJEWSKI, Stanisław JEMIOŁO*

### **1. Wstęp**

Zagadnienia związane z modelowaniem konstytutywnym hipersprężystych materiałów anizotropowych są ostatnio coraz częściej rozpatrywane, np. w mechanice kompozytów o elastomerowych matrycach, biomechanice miękkich tkanek oraz teorii sprężysto-plastyczności dowolnych deformacji, por. [4,6,7].

Sformułowanie modeli materiałów anizotropowych, z zastosowaniem teorii reprezentacji funkcji tensorowych [3], prowadzi do relacji konstytutywnych, w których oprócz tensorów parametrycznych występuje znaczna liczba stałych materiałowych. Stwarza to znaczne trudności przy ich interpretacji i wyznaczaniu na podstawie, z reguły niekompletnych, wyników badań doświadczalnych, patrz np. [6]. Wobec tego celem pracy jest zaproponowanie i implementacja numeryczna w programie ABAQUS [1,2], najprostszycy modeli hipersprężystych materiałów transwersalnie izotropowych. Analizowane modele mogą być interpretowane jako dwuskładnikowy kompozyt, w którym izotropowa matryca jest zbrojona jedną rodziną włókien. Punktem wyjścia proponowanych modeli jest założenie o addytywnej dekompozycji funkcji jednostkowej energii sprężystości (ES) na dwie części, z których jedna opisuje energię nagromadzoną w matrycy, a druga energię rodziny włókien. Wyznaczenie danych materiałowych w takim przypadku sprowadza się m.in. do określenia stałych sprężystości części składowych kompozytu i ich udziałów objętościowych.

### **2. Propozycja modeli konstytutywnych hipersprężystych materiałów zbrojonych włóknami**

#### **2.1. Zależności podstawowe**

Z zasady zachowania energii mechanicznej oraz zasady zachowania pędu, momentu pędu i masy, otrzymuje się następujące zależności na pochodną materialną funkcji ES:

$$\dot{W} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \quad , \quad (2.1)$$

gdzie  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{T}$ , są odpowiednio tensorami naprężenia Cauchy'ego, Kirchhoffa oraz I i II tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa. Ponadto w (2.1)  $J$  oznacza wyznacznik tensora gradientu deformacji  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{D}$  jest tensorem prędkości deformacji, a tensor  $\mathbf{E}$  jest tensorem odkształcenia Lagrange'a (kropka w (2.1) oznacza iloczyn skalarny tensorów). Z lokalnego sformułowania zasady zachowania energii mechanicznej (2.1), dla dostatecznie regularnego potencjału jednostkowej energii sprężystej  $W(\mathbf{F}, \mathbf{X})$ , wynika, że

$$\mathbf{S}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \frac{\partial W(\mathbf{F}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{F}} \quad , \quad (2.2)$$

gdzie  $\mathbf{X}$  jest wektorem określającym położenie cząstki w ciele (w konfiguracji odniesienia, która w tej pracy jest konfiguracją naturalną). Warto przypomnieć, że między I i II tensorem naprężenia Pioli Kirchhoffa oraz tensorem naprężenia Cauchy'ego zachodzą następujące tożsamości:  $\mathbf{S} = \mathbf{F}\mathbf{T}$ ,  $J\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\mathbf{F}^T$ . Tensory  $\mathbf{S}$  i  $\boldsymbol{\sigma}$  występują odpowiednio w równaniach równowagi w konfiguracji odniesienia i w konfiguracji aktualnej.

Z zasady obiektywności i danej w konfiguracji początkowej symetrii materiału, określonej przez zbiór tensorów parametrycznych  $\{\mathbf{P}_i\}$ , wynika że funkcja JES nie może być bezpośrednio zależna od tensora  $\mathbf{F}$ , jak i od wektora  $\mathbf{X}$ , por. [6]. Spełnienie zasady obiektywności i wymagania symetrii, wymusza rozpatrywanie ES jako funkcji zależnej od nieredukowalnych niezmienników: dowolnego, obiektywnego pola tensora odkształcenia (np.  $\mathbf{E}$ ) lub pola tensora deformacji (np.  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ ) i pól tensorów parametrycznych. Wobec powyższych uwag można rozpatrywać funkcje JES, np. w postaci:

$$W = \tilde{W}(\mathbf{B}, \mathbf{P}_i) = \Psi(I_i); \quad i = 1, \dots, I \quad , \quad (2.3)$$

gdzie  $\{I_i\}$  jest zbiorem niezmienników bazy funkcji ES. Z (2.1)-(2.3) wynika relacja konstytutywna między tensorem Kirchhoffa  $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\mathbf{F}^T$  i tensorem deformacji Cauchy'ego-Greena  $\mathbf{B}$ . Tego typu relacje konstytutywne są wygodne do implementacji w programie MES ABAQUS.

Szczegółową analizę wymagań stawianych funkcji ES można znaleźć np. w pracach [5,6]. Poruszane są tam zagadnienia dotyczące wymagań: wypukłości, poliwypukłości, quasi-wypukłości i wypukłości pierwszego rzędu. Wymagania te zapewniają m.in. istnienie rozwiązań odpowiednich zagadnień brzegowych hipersprężystości, por. [5] i literaturę tam cytowaną.

## 2.2. Propozycje funkcji JES kompozytu o izotropowej macierzy ze zbrojeniem jedną rodziną włókien

Modelowany kompozyt składa się z izotropowej macierzy i włókien, o udziale objętościowym  $p \in [0,1]$ , ułożonych zgodnie z polem  $\mathbf{m}(\mathbf{X})$ . Zakłada się pełną przyczepność między włóknami a matrycą. Dodatkowo przyjmuje się, że włókna „pracują” jednowymiarowo, tzn. tylko wzdłuż wektora  $\mathbf{m}$ . Znajomość pola wektorowego  $\mathbf{m}$  pozwala zdefiniować pole tensorowe  $\mathbf{M} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$ , w którym tensor  $\mathbf{M}$  jest interpretowany jako tensor parametryczny w (2.3). Zakładamy, że ES kompozytu składa się z dwóch części, których udział jest proporcjonalny do udziału objętościowego i ma postać:

$$\Psi = (1-p)\Psi_M + p\Psi_Z \quad , \quad (2.4)$$

gdzie  $\Psi_M$  jest funkcją ES matrycy i zależy tylko od niezmienników izotropowych tensora  $\mathbf{B}$ , natomiast  $\Psi_Z$  jest funkcją ES włókien:

$$\Psi_Z = \frac{E_Z}{4} (I_4 - 1)^2, \quad (2.5)$$

gdzie  $I_4 = \text{tr} \hat{\mathbf{M}}$ , oraz

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{F} \mathbf{M} \mathbf{F}^T. \quad (2.6)$$

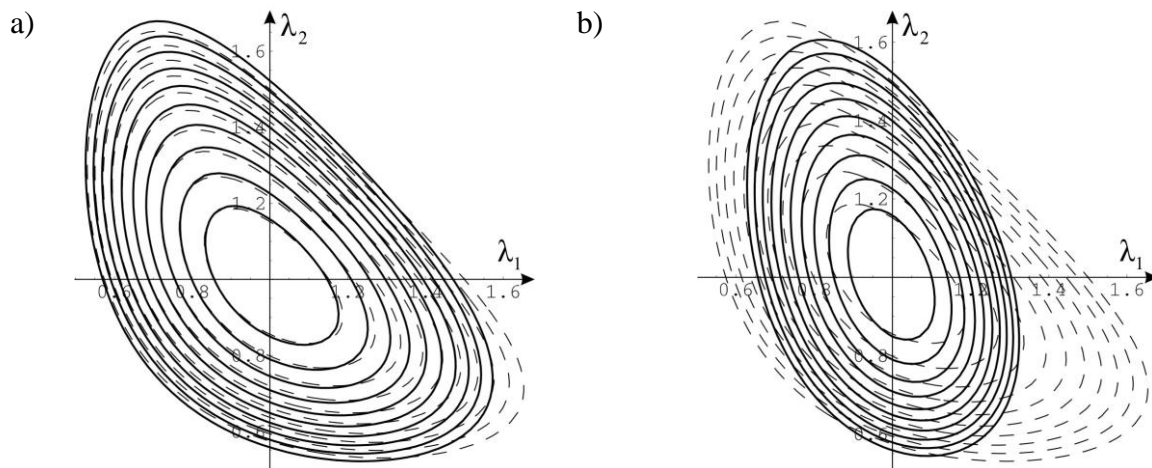
Parametr  $E_Z$  ma interpretację początkowego modułu Younga rodziny włókien.

Funkcja ES materiału matrycy opisana zostanie przy pomocy dwóch znanych w literaturze modeli hipersprężystych materiałów ściśliwych: neo-Hooke'a (NH) i Ciarleta (C), por. [5]. W przypadku modelu NH funkcja ES ma postać:

$$\Psi_M^{CNH} = \frac{\mu_0}{2} (I_1 - 3) + \frac{\lambda_0}{4} (J^2 - 1) - \left( \mu_0 + \frac{\lambda_0}{2} \right) \ln J, \quad (2.7)$$

gdzie  $I_1 = \text{tr} \mathbf{B}$ , zaś  $\mu_0$  i  $\lambda_0$  oznaczają stałe sprężystości (identyczne jak w związku Hooke'a teorii liniowej sprężystości).

Na rys.2.1 przedstawiono wykresy warstwiczne funkcji ES określonej wzorem (2.4) z uwzględnieniem (2.5) i (2.7) (w zależności od wydłużeń głównych  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  (przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia  $\lambda_3 = 1$  (PSO)), w przypadku materiału izotropowego (linie przerywane) oraz materiału kompozytowego (tj.  $p = 0.1$ ) i różnych stosunkach modułu Younga włókien zbrojenia i matrycy (linie ciągłe). Na rys.2.1 włókna zbrojenia mają kierunek zgodny z  $\lambda_1$ . W przypadku deformacji jednorodnych PSO mamy  $S_\alpha = \partial W / \partial \lambda_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ), czyli gradient funkcji ES definiuje stan naprężenia. Na rys.2.1b wyraźnie zauważalna jest „silna” anizotropia materiału. Kierunek wyróżniony materiału zmienia się zgodnie z (2.6), co jest charakterystyczne dla teorii nieliniowej.



**Rysunek 2.1.** Wykresy warstwiczne ES w przypadku PSO w funkcji wydłużeń głównych  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . Materiał izotropowy NH (linie przerywane), kompozyt KNH o matrycy izotropowej ( $\mu_0 = E_M$ ,  $\lambda_0 = 2.6 E_M$ ) zbrojonej rodziną włókien ułożonych w kierunku 1, o udziale objętościowym  $p = 0.1$  (linie ciągłe): a)  $E_Z/E_M = 1$ , b)  $E_Z/E_M = 10$

Ponieważ potencjał  $\Psi_M^{CNH}$  w przypadku materiału NH nie jest funkcją poliwyypukłą, por. [5], to także potencjał materiału kompozytowego (KNH) wg (2.4)-(2.7) nie jest funkcją poliwyypukłą. Wobec tego rozpatrujemy także funkcję ES materiału matrycy w postaci:

$$\Psi_M^C = \frac{\mu_o}{2} \left[ f(I_1 - 3) + (1-f)(\tilde{I}_2 - 3) \right] + \frac{1}{4} \left[ \lambda_o - 2\mu_o(1-f) \right] J^2 + \left[ \frac{1}{2} \lambda_o + \mu_o \right] \ln J - \frac{1}{4} \left[ \lambda_o - 2\mu_o(1-f) \right], \quad (2.8)$$

która wynika z zastosowania modelu C. We wzorze (2.8) występuje niezmiennik:  $\tilde{I}_2 = \text{tr}(\text{cof}\mathbf{B})$ , zaś pozostałe oznaczenia są identyczne jak w (2.7). Funkcja (2.8) jest poliwyypukła i spełnia odpowiednie warunki wzrostu potencjału sprężystości gdy:  $\mu_o > 0$ ,  $f \in (0,1)$  i  $\lambda_o > 2\mu_o(1-f)$ , patrz [5]. Model materiału kompozytowego (KC) otrzymamy podstawiając (2.5) i (2.8) do (2.4).

### 3. Implementacja numeryczna w programie MES ABAQUS

Modele materiałów transwersalnie izotropowych przedstawione w pkt.2 zaimplementowano w programie metody elementów skończonych ABAQUS. W tym celu zaprogramowano w języku FORTRAN tzw. procedurę materiałową UMAT, por. [2]. Oprócz związków konstytutywnych modeli KNH i KC, niezbędna jest również znajomość postaci stycznego operatora czwartego rzędu w związku przyrostowym:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\mathcal{C}} \cdot \mathbf{D}, \quad (3.1)$$

gdzie symbol „ $\overset{\circ}{}$ ” oznacza pełne nasunięcie tensorów. Symbolem „ $\overset{\circ}{}$ ” oznaczono pochodną Jaumana, por. np. [1].

Sposób wyznaczenia operatora w związku (3.1) pokażemy na przykładzie modelu KNH. Funkcja ES w postaci (2.4), przy uwzględnieniu (2.5) i (2.7), jest funkcją trzech niezmienników, czyli:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \dot{I}_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} \dot{I}_4, \quad (3.2)$$

gdzie

$$\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} = (1-p) \frac{\mu_o}{2}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial J} = (1-p) \left( \frac{\lambda_o}{2} J - \frac{1}{J} \left( \frac{\lambda_o}{2} + \mu_o \right) \right), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} = \frac{1}{2} p E_z (I_4 - 1). \quad (3.3)$$

Z kolei pochodne materialne niezmienników  $I_1$ ,  $J$  i  $I_4$  wynoszą odpowiednio:

$$\dot{I}_1 = 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}, \quad \dot{J} = J \text{tr}\mathbf{D}, \quad \dot{I}_4 = 2\hat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{D} \quad (3.4)$$

Po podstawieniu (3.3) i (3.4) do (3.2) i uwzględnieniu zależności (2.1), wyznaczamy relację konstytutywną modelu KNH:

$$\boldsymbol{\tau} = (1-p) \left( \mu_o \mathbf{B} + \left( \frac{\lambda_o}{2} J^2 - \frac{\lambda_o}{2} - \mu_o \right) \mathbf{I} \right) + p E_z (I_4 - 1) \hat{\mathbf{M}}. \quad (3.5)$$

Następnie obliczamy pochodną Jaumana tensora naprężenia Kirchhoffa, prawostronne wyłączamy z otrzymanego wyrażenia tensor  $\mathbf{D}$  i w wyniku otrzymujemy operator czwartego rzędu:



$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} = & (1-p) \left[ \mu_0 (\mathbf{I} \diamond \mathbf{B} + \mathbf{B} \diamond \mathbf{I}) + \lambda_0 J^2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] + \\ & + 2pE_z \hat{\mathbf{M}} \otimes \hat{\mathbf{M}} + pE_z (I_4 - 1) (\hat{\mathbf{M}} \diamond \mathbf{I} + \mathbf{I} \diamond \hat{\mathbf{M}}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

W przypadku modelu KC postępujemy podobnie. Relacja konstytutywna modelu KC ma następującą postać:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & (1-p) f \mu_0 \mathbf{B} + (1-p) \mu_0 (1-f) (I_1 \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) + \\ & + (1-p) \left( \left( \frac{\lambda_0}{2} - \mu_0 (1-f) \right) J^2 - \left( \frac{\lambda_0}{2} - \mu_0 \right) \right) \mathbf{I} + pE_z (I_4 - 1) \hat{\mathbf{M}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Natomiast w (3.1) mamy:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} = & (1-p) \mu_0 (f + I_1 (1-f)) (\mathbf{I} \diamond \mathbf{B} + \mathbf{B} \diamond \mathbf{I}) + 2(1-p) \mu_0 (1-f) \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \\ & - (1-p) \mu_0 (1-f) (\mathbf{I} \diamond \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2 \diamond \mathbf{I}) - 2(1-p) \mu_0 (1-f) \mathbf{B} \diamond \mathbf{B} + \\ & + (1-p) \left( \frac{\lambda_0}{2} - \mu_0 (1-f) \right) J^2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2pE_z \hat{\mathbf{M}} \otimes \hat{\mathbf{M}} + pE_z (I_4 - 1) (\hat{\mathbf{M}} \diamond \mathbf{I} + \mathbf{I} \diamond \hat{\mathbf{M}}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Poprawność implementacji modeli: KNH i KC w programie ABAQUS sprawdzono testami numerycznymi dla jednorodnych pól stanu naprężenia i odkształcenia. W tych przypadkach rozwiązania analityczne zadań wynikają z relacji konstytutywnych (3.5) i (3.7). Stosując zaprogramowaną procedurę UMAT otrzymywano wyniki numeryczne z dokładnością co najmniej do czterech cyfr znaczących w porównaniu do wyników rozwiązań analitycznych.

#### 4. Przykład numeryczny

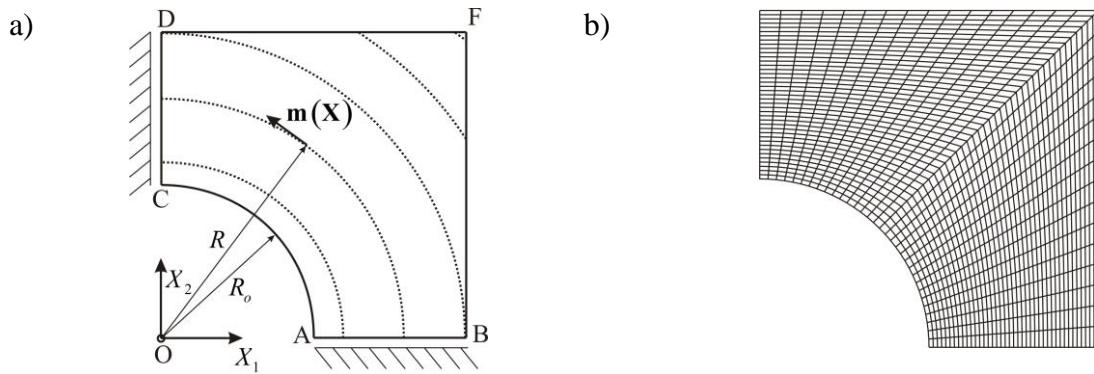
Zadanie dotyczy dwukierunkowego rozciągania hipersprężystej, kwadratowej tarczy (PSO) z otworem kołowym, w której zadane jest następujące pole tensora parametrycznego:

$$\mathbf{m}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} (X_1 \mathbf{b}_1 + X_2 \mathbf{b}_2) \Rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{X}) \rightarrow \frac{1}{X_1^2 + X_2^2} \begin{bmatrix} X_1^2 & X_1 X_2 \\ X_1 X_2 & X_2^2 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

W konsekwencji (4.1) tensory sztywności modeli materiałów transwersalnie izotropowych KNH i KC (odpowiednio (3.6) i (3.8)) są zależne od zmiennej Lagrange'a  $\mathbf{X}$ . Oznacza to, że tarcza zbrojona jest włóknami ułożonymi jak na rys.4.1a. Wobec tego materiał tarczy jest niejednorodny.

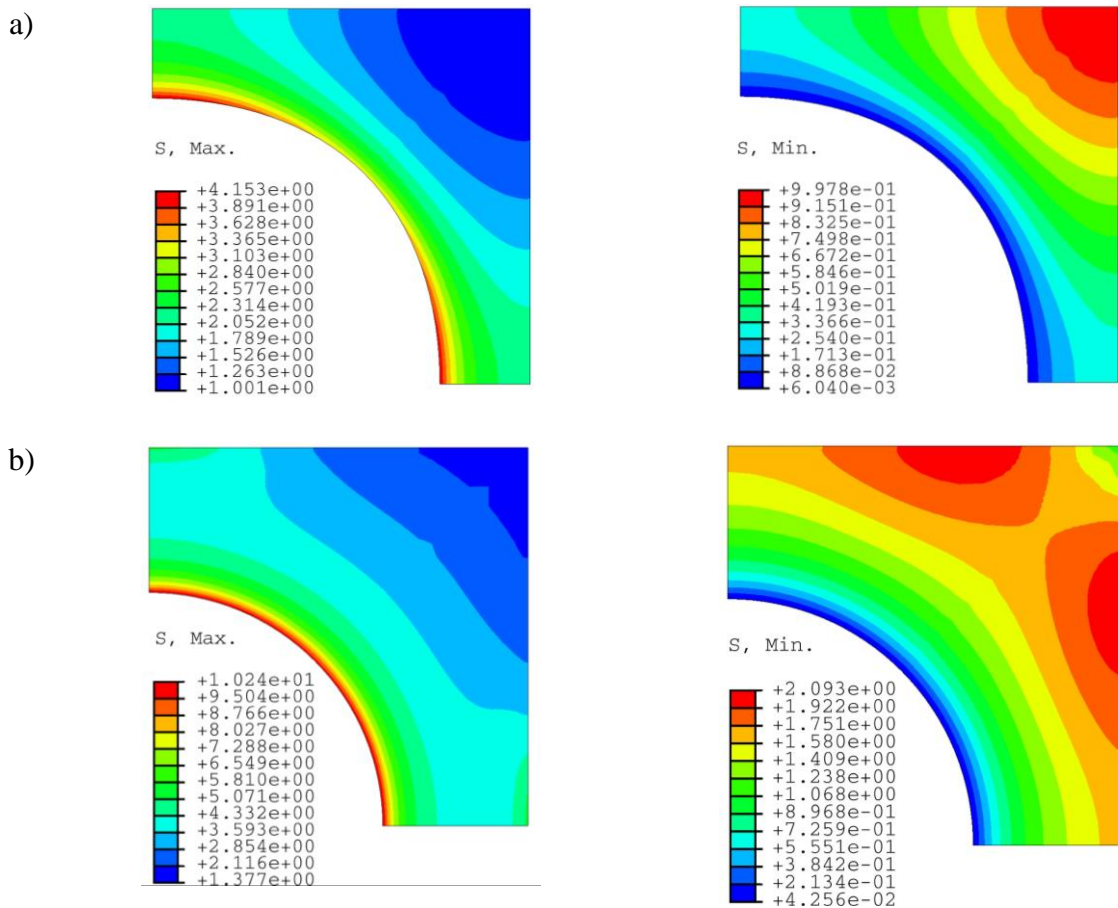
Poszukujemy rozwiązania zadania o symetriach pokazanych na rys.4.1a, czyli rozwiązujemy tylko jedną czwartą tarczy, z siatką MES jak na rys.4.1b. Przyjęto następujące wymiary tarczy:  $|OA| = |AB| = |OC| = |CD| = 1[\text{jd}]$  (jd oznacza jednostkę długości), czyli  $R_o = 1[\text{jd}]$ .

Na brzegu AB i CD przyjęto warunki symetrii odpowiednio w postaci:  $u_2 = 0$  i  $u_1 = 0$ . Na brzegu AC założono zerowe naprężeniowe warunki brzegowe. Obciążenie tarczy jest realizowane na brzegu BF i DF przez przemieszczeniowe warunki brzegowe, które odpowiednio mają postać:  $u_1 = 1[\text{jd}]$  i  $u_2 = 1[\text{jd}]$ .



**Rysunek 4.1.** a) Geometria, warunki brzegowe oraz sposób ułożenia włókien zbrojenia, b) siatka MES

Podstawowym celem tego przykładu jest porównanie rozwiązań zadania w przypadku hipersprężystego materiału izotropowego i zaimplementowanych modeli hipersprężystych materiałów zbrojonych włóknami.



**Rysunek 4.2.** Wykresy warstwiczne maksymalnego i minimalnego naprężenia głównego w płaszczyźnie PSO w przypadku: a) materiału izotropowego C, b) materiału zbrojonego włóknami obwodowo KC

W analizowanym przykładzie przyjęto następujące dane materiałowe:  $p = 0.05$ ,  $\mu_0 = 1.0 E_M$ ,  $\lambda_0 = 1.5 E_M$ ,  $E_Z = 26 E_M$  (model KNH), gdzie  $E_M$  jest początkowym modułem

Younga materiału matrycy. Dodatkowo w przypadku modelu materiału KC przyjęto  $f = 0.2$ , por. (2.8). Przykładowe wyniki, dotyczące modelu KC, w porównaniu do modelu jednorodnego materiału izotropowego pokazano na rys.4.2. Na wykresach naprężeń głównych widoczne są istotne, jakościowe i ilościowe różnice wyników w konfiguracji aktualnej, między rozwiązaniami dla materiału izotropowego i anizotropowego. Ponieważ rozpatrywane w teście deformacje nie były bardzo duże z punktu widzenia teorii hipersprężystości, to różnice wyników między modelami KC i KNH były pomijalnie małe.

#### 4. Podsumowanie

W pracy zaproponowano stosunkowo prostą klasę modeli konstytutywnych hipersprężystości dla niejednorodnych materiałów transwersalnie izotropowych, o interpretacji materiałów kompozytowych z izotropową matrycą zbrojoną ciągłymi włóknami. Przyjęto założenie o addytywnej dekompozycji funkcji jednostkowej energii sprężystości, w postaci (2.4). Zaproponowana klasa modeli sprowadza się, w aproksymacji do teorii liniowej, do klasycznego modelu kompozytu włóknistego, w którym przyjmuje się pełną przyczepność włókien do matrycy oraz wprowadza założenie o jednowymiarowej odkształcalności włókien. Podano dwa przykłady tego typu modeli hipersprężystości i zaimplementowano je w programie MES ABAQUS. Zaprogramowano tzw. procedurę użytkownika UMAT. Zaproponowano testy numeryczne sprawdzające poprawność implementacji.

#### Bibliografia/ References

- [1] ABAQUS *Theory manual*, Version 6.1., 2000, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket.
- [2] ABAQUS/Standard *User's manual*, Version 6.1., 2000, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket.
- [3] Boehler J.P. (ed): *Applications of tensor functions in solid mechanics*. CISM Courses and Lectures, no. 292, 1987, Wien-New York, Springer-Verlag.
- [4] Bonet J., Burton A.J.: A simple orthotropic, transversely isotropic hyperelastic constitutive equation for large strain computations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 162, 1998, pp. 151-164.
- [5] Jemiolo S.: Studium hipersprężystych własności materiałów izotropowych. Modelowanie i implementacja numeryczna, *Prace Naukowe, Budownictwo z. 140*, 2002, str. 1-308, OWPW.
- [6] Jemiolo S., Telega J.J.: Modelling elastic behaviour of soft tissues, Part II. Transverse isotropy, *Eng. Trans.*, vol. 49, no. 2-3, 2001, pp. 241-281.
- [7] Spencer A.J.M.: *Deformations of fibre-reinforced materials*, 1972, Oxford, Clarendon Press.



Rozdział w monografii:

**Sprężystość i hipersprężystość. Modelowanie i zastosowania,**

S. Jemioło [red.],

Oficyna Wydawnicza PW,

Warszawa 2012

ISBN: 978-83-7814-066-5



Publikacje z serii wydawniczej „Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności” są prezentowane w zakładce „Prace naukowe” na stronie internetowej Oficyny Wydawniczej Politechniki Warszawskiej:

[www.wydawnictwopw.pl](http://www.wydawnictwopw.pl)

Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej prowadzi sprzedaż:

- ◆ stacjonarną – w księgarniach OWPW – Gmach Główny Politechniki Warszawskiej przy Placu Politechniki 1 – ul. Noakowskiego 18/20
- ◆ internetową – <http://www.wydawnictwopw.pl>
- ◆ wysyłkową – tel. 22 234-75-03 fax 22 234-70-60 e-mail: [oficyna@wpw.pw.edu.pl](mailto:oficyna@wpw.pw.edu.pl)

SPRĘŻYSTOŚĆ I HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ. Modelowanie i zastosowania



# SPRĘŻYSTOŚĆ I HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ

## Modelowanie i zastosowania

Monografia  
pod redakcją naukową  
Stanisława Jemioła



ISBN 978-83-7814-066-5



9 788378 140665

Tom 1

Seria Monografie Zakładu  
Wytrzymałości Materiałów,  
Teorii Sprężystości i Plastyczności



## Seria Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności

TOM 1

SPRĘŻYSTOŚĆ I HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ. MODELOWANIE I ZASTOSOWANIA (pod red. nauk. Stanisława Jemioła)

TOM 2

ZAGADNIENIA STATYKI SPRĘŻYSTYCH PÓŁPRZESTRZENI WARSTWOWYCH (Stanisław Jemioła, Aleksander Szwed)

TOM 3

DEFORMACJE I WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW I ELEMENTÓW KONSTRUKCJI (Stanisław Jemioła, Aleksander Szwed)

TOM 4

HIPERSPRĘŻYSTOPLASTYCZNOŚĆ (Stanisław Jemioła, Marcin Gajewski)

TOM 5

TERMOSPRĘŻYSTOŚĆ I PRZEPŁYW CIEPŁA W MATERIAŁACH ANIZOTROPOWYCH ((pod red. nauk. Stanisława Jemioła)

**Seria wydawnicza  
Monografie Zakładu  
Wytrzymałości Materiałów,  
Teorii Sprężystości  
i Plastyczności**

---

**Tom 1**



**Wydział Inżynierii Lądowej  
Politechniki Warszawskiej**







# SPRĘŻYSTOŚĆ I HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ

Modelowanie i zastosowania

Monografia  
pod redakcją naukową  
Stanisława Jemioła

Seria Monografie Zakładu  
Wytrzymałości Materiałów,  
Teorii Sprężystości i Plastyczności

Warszawa 2016

Publikacja jest I tomem Serii Wydawniczej  
„Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów,  
Teorii Sprężystości i Plastyczności”

Opiniodawcy

*Dr hab. inż. Aniela Glinicka, prof. PW*

*Dr hab. inż. Leszek Małyszko, prof. UWM*

Redaktor naukowy

*Stanisław Jemioło*

Projekt okładki

*Danuta Czudek-Puchalska*

© Copyright by Zakład Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności  
Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2012, 2016

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych, w tym nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w Internecie bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich

ISBN 978-83-7814-066-5

Druk i oprawa: Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Warszawskiej, tel. 22 234-55-93  
Oficyna Wydawnicza PW, ul. Polna 50, 00-644 Warszawa. Wydanie II uzup. Zam. nr 535/2015

### *Przedmowa do wydania I*

Oddana do rąk Czytelników monografia dotyczy sprężystości i hipersprężystości. Autorami poszczególnych rozdziałów są pracownicy Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności, Instytutu Inżynierii Budowlanej Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej. Cztery pierwsze rozdziały poświęcone są liniowej teorii sprężystości materiałów izotropowych i anizotropowych. Piąty rozdział dotyczy nieliniowej teorii sprężystości małych przemieszczeń i odkształceń materiałów transwersalnie izotropowych. Kolejne rozdziały od szóstego do czternastego dotyczą hipersprężystości i teorii dużych deformacji.

Zagadnienia prezentowane w monografii są od wielu lat przedmiotem zainteresowań naukowych pracowników Zakładu. Są to zarówno zagadnienia klasyczne, takie jak zagadnienie skręcania prętów przyrzmacznych, wyznaczania trajektorii pól tensorowych naprężeń i odkształceń w tarczach oraz momentów zginających w płytach, jak i implementacje numeryczne nieliniowych relacji konstytutywnych sprężystości w systemie metody elementów skończonych ABAQUS. Dalsze rozdziały dotyczą teorii hipersprężystości, której efektywne zastosowania wiążą się z rozwojem metod numerycznych i możliwości obliczeniowej komputerów. Według opinii autorów *podstawową trudnością, która jest niezależna od rozwoju metod numerycznych, jest wybór adekwatnego modelu materiału*, określenie parametrów i funkcji materiałowych oraz ich weryfikacja doświadczalna. Wobec tego w monografii uwypuklone są zagadnienia dotyczące teorii relacji konstytutywnych hipersprężystości.

Stanisław Jemiolo

### *Przedmowa do wydania II*

W wydaniu drugim monografii dodano pięć rozdziałów, trzy z nich dotyczą sprężystości małych odkształceń, natomiast dwa rozdziały są związane z relacjami konstytutywnymi hipersprężystości materiałów anizotropowych.

Stanisław Jemiolo



# Spis treści

## Rozdział I

Swobodne skręcanie prętów pryzmatycznych o przekroju w kształcie wycinka koła albo pierścienia.....9

*Stanisław JEMIOŁO, Aleksander SZWED*

## Rozdział II

Tarcze i rodzaje anizotropii materiałów liniowo sprężystych .....35

*Stanisław JEMIOŁO*

## Rozdział III

Cztery typy płaskiej anizotropii na przykładzie modelu kompozytu włóknistego.....45

*Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI*

## Rozdział IV

Trajektorie wartości własnych w zagadnieniach płaskich.....57

*Aleksander SZWED, Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI*

## Rozdział V

Niejednorodne, nieliniowe materiały transwersalnie izotropowe i ich implementacja MES.....73

*Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI*

## Rozdział VI

Optymalne orientacje materiału ortotropowego .....83

*Stanisław JEMIOŁO*

## Rozdział VII

Drgania własne kamertonu jako przykład testowy MES .....89

*Marcin GAJEWSKI, Stanisław JEMIOŁO*

## Rozdział VIII

Zagadnienia brzegowe 2D liniowej sprężystości materiałów anizotropowych - zastosowanie systemu PDE MATLAB .....95

*Marcin GAJEWSKI, Stanisław JEMIOŁO*

## Rozdział IX

Najprostsze modele hipersprężystości materiałów izotropowych.....103

*Stanisław JEMIOŁO*

<b>Rozdział X</b>	
Przykłady modeli materiałów ściśliwych i mało-ściśliwych.....	115
<i>Stanisław JEMIOŁO</i>	
<b>Rozdział XI</b>	
Implementacja numeryczna w MES modeli CNH i MCNH.....	133
<i>Stanisław JEMIOŁO</i>	
<b>Rozdział XII</b>	
Hipersprężysta kula obciążona własnym ciężarem jako test numeryczny zadania kontaktowego .....	143
<i>Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI, Cezary AJDUKIEWICZ</i>	
<b>Rozdział XIII</b>	
Ortotropowy materiał Saint-Venanta-Kirchhoffa.....	149
<i>Stanisław JEMIOŁO</i>	
<b>Rozdział XIV</b>	
Szczególne przypadki ortotropowego materiału SVK .....	161
<i>Stanisław JEMIOŁO</i>	
<b>Rozdział XV</b>	
Przykłady modeli SVK.....	169
<i>Stanisław JEMIOŁO</i>	
<b>Rozdział XVI</b>	
Implementacja MES modeli konstytutywnych hipersprężystych materiałów zbrojonych włóknami.....	179
<i>Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI</i>	
<b>Rozdział XVII</b>	
Symulacja numeryczna i weryfikacja doświadczalna testu rozciągania płaskownika z uwzględnieniem teorii sprężysto – plastyczności dużych deformacji .....	187
<i>Cezary AJDUKIEWICZ, Marcin GAJEWSKI, Stanisław JEMIOŁO</i>	
<b>Rozdział XVIII</b>	
Uogólnienia modeli konstytutywnych ortotropowego materiału SVK w płaskich zagadnieniach hipersprężystości.....	199
<i>Stanisław JEMIOŁO</i>	
<b>Rozdział XIX</b>	
Porównanie modeli materiałów ortotropowych w zagadnieniach płaskich .....	215
<i>Stanisław JEMIOŁO</i>	