

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Wydział Inżynierii Lądowej

ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr inż. Andrzej Kasprzak

**Ocena możliwości wykorzystania konstrukcji tensegrity
w budownictwie mostowym**

Promotor
dr hab. inż. Wojciech Gilewski, prof. PW

Warszawa, 2014

Streszczenie

Idea tensegrity po raz pierwszy została opisana około 50 lat temu. Dotyczy specyficznych struktur, w których elementy ściskane oraz rozpięte przez nie elementy rozciągane wzajemnie stabilizują się, mimo że w strukturach występują mechanizmy. W rozprawie postawiono pytanie o to, czy i w jakim stopniu możliwe jest wykorzystanie idei tensegrity w konstrukcjach budowlanych, a w szczególności w obiektach mostowych. Aby na nie odpowiedzieć, podjęto rozważania zarówno na temat podstaw teoretycznych, jak i aspektów praktycznych projektowania tego typu konstrukcji. Bazując na mechanice konstrukcji sformułowano autorskie definicje „czystych tensegrity” i „konstrukcji o cechach tensegrity”. Określono najważniejsze cechy tensegrity, takie jak występowanie mechanizmów nieskończenie małych oraz stanów samonapężenia, co pozwoliło na opracowanie opisu matematycznego tego typu konstrukcji oraz podanie własnej propozycji sposobu poszukiwania formy tensegrity. Wybrano metody obliczeniowe adekwatne do wspomnianych cech konstrukcji. Posługując się nimi, przeanalizowano właściwości statyczne i dynamiczne podstawowych modułów tensegrity. Podjęto rozważania na temat możliwości łączenia modułów pod kątem ich wykorzystania w konstrukcjach mostowych, a także wpływu sposobu łączenia na właściwości otrzymywanych w ten sposób struktur. Omówiono najważniejsze zagadnienia technologiczne związane z wykorzystaniem tensegrity w mostownictwie. Zbadano odpowiedź wybranych konstrukcji na obciążenia statyczne i dynamiczne w kontekście ich zastosowania jako ustroje nośne kładek dla pieszych. Dokonano oceny i klasyfikacji istniejących projektów oraz realizacji obiektów mostowych pretendujących do miana tensegrity. Przedstawiona analiza pozwoliła na sformułowanie wniosku mówiącego o możliwości zastosowania tensegrity w mostownictwie, głównie w zakresie ograniczonym do konstrukcji o cechach tensegrity. Zastosowanie „czystych tensegrity” może być uzasadnione w przypadku konstrukcji o specjalnym przeznaczeniu, takich jak mosty sterowane i rozwijane.

Abstract

The concept of tensegrity was first described about 50 years ago. It refers to a particular type of structure, in which the compression and tensile components stabilize each other, despite the existence of mechanisms in the structure. A question, whether and to what extent it is possible to use the idea of tensegrity in building constructions, especially in bridges, was raised in the dissertation. To answer it, the author elaborated on both theoretical basis and practical aspects of the design of this type of structures. Two own definitions, based on mechanics of structures are presented. These are “pure tensegrities” and “structures having tensegrity features” definitions. The main features of tensegrity, such as the existence of infinitesimal mechanisms and self-stress states were defined. This made it possible to develop a mathematical description of this type of structures and to propose a new form-finding method. Computational methods appropriate for aforementioned properties were chosen. Static and dynamic properties of the basic tensegrity modules were analyzed using the selected methods. The possibility of combining modules for the use in bridge structures was discussed, as well as the impact of connection type on the properties of thus obtained structures. The most important technological issues associated with the use of tensegrity in bridges were discussed. The response of selected structures on the static and dynamic loads was examined in the context of their use in construction of footbridges. Existing projects and realizations of bridges called tensegrity were classified and evaluated. The analysis allowed to conclude, that there is a possibility of using tensegrity in bridge structures, limited mainly to the structures having tensegrity features. The use of “pure tensegrities” may be justified in the case of special-purpose structures, such as adaptive and deployable bridges.

Spis treści

Rozdział 1	Wprowadzenie.....	9
1.1	Tematyka i motywacja.....	9
1.2	Cele i zakres rozważań.....	10
1.3	Struktura pracy.....	11
Rozdział 2	Stan wiedzy	13
2.1	Tensegrity	13
2.1.1	Historia.....	13
2.1.2	Definicje.....	16
2.1.3	Klasyfikacja konstrukcji tensegrity	20
2.2	Zastosowania inżynierskie	24
2.2.1	Wieże	25
2.2.2	Ustroje ciągnowe konstrukcji dachowych.....	26
2.2.3	Przestrzenne kratownice dwuwarstwowe.....	30
2.2.4	Inne zastosowania	32
Rozdział 3	Opis matematyczny tensegrity	35
3.1	Geometria	35
3.1.1	Problem poszukiwania formy tensegrity	35
3.1.2	Metody poszukiwania konfiguracji tensegrity (<i>form-finding</i>).....	36
3.2	Mechanika tensegrity	43
3.2.1	Macierzowe równania mechaniki kratownic	43
3.2.2	Analiza macierzy kratownic typu tensegrity	47
Rozdział 4	Analiza wybranych modułów tensegrity	54
4.1	Wybór i opis modułów	54
4.1.1	Graniastosłup prawidłowy tensegrity (<i>simplex</i>)	54
4.1.2	Rozszerzony ośmiościan tensegrity.....	56
4.1.3	Czworościan ścięty tensegrity	59
4.1.4	Sześćcio-ośmiościan tensegrity.....	62
4.2	Wpływ sprężenia na własności statyczne modułów	65
4.2.1	Graniastosłup prawidłowy tensegrity (<i>simplex</i>)	66
4.2.2	Rozszerzony ośmiościan tensegrity.....	72
4.2.3	Czworościan ścięty tensegrity	75

4.2.4	Sześćcio-ośmiościan tensegrity.....	77
4.2.5	Wnioski	79
4.3	Wpływ sprężenia na własności dynamiczne modułów	80
4.3.1	Graniastosłup prawidłowy tensegrity (<i>simplex</i>)	80
4.3.2	Rozszerzony ośmiościan tensegrity.....	82
4.3.3	Czworościan ścięty tensegrity	84
4.3.4	Sześćcio-ośmiościan tensegrity.....	85
4.3.5	Wnioski	87
4.4	Porównanie własności modułów w ujęciu kontynualnym	88
4.4.1	Model kontynualny modułów tensegrity.....	88
4.4.2	Analiza porównawcza	90
Rozdział 5	Możliwości zastosowania tensegrity w budownictwie mostowym	94
5.1	Konstrukcje jednomodułowe	94
5.2	Konstrukcje wielomodułowe	95
5.2.1	Słupy	95
5.2.2	Przęsła	98
5.2.3	Płyty	103
5.3	Inne konstrukcje o cechach tensegrity	109
Rozdział 6	Specyfika projektowania kładek tensegrity	112
6.1	Podstawowe zagadnienia technologiczne	112
6.1.1	Materiały	112
6.1.2	Połączenia elementów	121
6.1.3	Oparcie pomostu na konstrukcji nośnej	127
6.1.4	Podparcie konstrukcji.....	130
6.1.5	Technologia budowy	130
6.2	Odpowiedź konstrukcji na oddziaływania statyczne	132
6.2.1	Słupy	132
6.2.2	Przęsła	139
6.2.3	Płyty	149
6.3	Odpowiedź konstrukcji na oddziaływania dynamiczne	152
6.3.1	Rodzaje oddziaływań i charakterystyk dynamicznych.....	152
6.3.2	Kryteria użytkowe	155
6.3.3	Charakterystyki dynamiczne konstrukcji tensegrity	157

6.3.4	Odpowiedź konstrukcji na oddziaływanie pieszych.....	166
6.4	Wpływ temperatury na stan samonapężenia.....	170
6.5	Konstrukcje sterowane i rozwijane.....	171
6.5.1	Konstrukcje aktywne.....	171
6.5.2	Sterowanie konstrukcjami tensegrity	173
6.5.3	Konstrukcje rozwijane	175
Rozdział 7	Studium i ocena wybranych konstrukcji mostowych typu tensegrity	179
7.1	Kładki quasi-tensegrity	179
7.1.1	Opis konstrukcji	179
7.1.2	Sposób realizacji zasad tensegrity	181
7.2	Kładka z modułów pierścieniowych	183
7.2.1	Opis konstrukcji	183
7.2.2	Sposób realizacji zasad tensegrity	184
7.2.3	Podstawowa analiza numeryczna.....	186
7.3	Kładka Tor Vergata	188
7.3.1	Opis konstrukcji	188
7.3.2	Sposób realizacji zasad tensegrity	190
7.3.3	Podstawowa analiza numeryczna.....	191
7.4	Kładka Kurilpa.....	194
7.4.1	Opis konstrukcji	194
7.4.2	Sposób realizacji zasad tensegrity	201
7.4.3	Podstawowa analiza numeryczna.....	202
7.4.4	Wnioski	207
Rozdział 8	Podsumowanie	208
	Literatura	216
	Spis tabel	224
	Spis rysunków	225

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1 Tematyka i motywacja

Idea konstrukcji tensegrity sięga lat sześćdziesiątych XX wieku. Początkowo związana była zarówno ze sztuką, jak i budownictwem. Chociaż ten typ ustrojów intrygował projektantów, jego praktyczne zastosowanie w inżynierii lądowej przez wiele lat było nieosiągalne. Wyjątek mogą stanowić ciężnowe konstrukcje przekryć dachowych, posiadające pewne cechy tensegrity. Ich geneza jednakże nie jest bezpośrednio związana z powstaniem samej idei tensegrity. Chociaż ustroje tensegrity w środowisku inżynierów budowlanych wciąż są mało znane (większą znajomością pojęcia wykazują się architekci), to w ostatnich latach można zaobserwować wzrost zainteresowania zastosowaniem takich struktur w budownictwie. W dalszym ciągu są one jednak traktowane jako pewien rodzaj „dziwactwa”, chęć wyróżnienia się twórcy poprzez zaprojektowanie konstrukcji wyjątkowej, kontrastującej z typowymi budowlami. Można stwierdzić, że brakuje zrozumienia, czym są tensegrity; występują trudności z ich odróżnieniem od zwykłych kratownic z zastosowaniem elementów ciężnowych. Zarzuca się, że jest to tylko próba sztucznego wydzielenia nowej grupy konstrukcji, w celu nadania im świeżej, a wręcz modnej nazwy.

Jednakże tensegrity są czymś więcej niż tylko architektoniczną fanaberią. Ich głębsze poznanie prowadzi do stwierdzenia, że zagadnienia z nimi związane są znacznie bardziej złożone i interesujące zarówno z mechanicznego, jak i typowo inżynierskiego punktu widzenia. Nie zmienia to jednak faktu, że mogą również służyć tworzeniu ciekawych form architektonicznych.

Próby zastosowania konstrukcji tensegrity w obiektach budowlanych, sięgające już początków samej idei, rzadko związane były z mostownictwem. Obecny wzrost zainteresowania tym aspektem został umożliwiony między innymi przez zwiększenie możliwości projektowych i wykonawczych, związane z rozwojem technologii i materiałów konstrukcyjnych, a także zaawansowanych technik obliczeniowych. Przyczyn tego wzrostu można doszukiwać się w zaletach lekkich konstrukcji ciężnowych, chociaż mogą one być znacznie bardziej pro-

zaiczne i wynikać z aspiracji związanych z dążeniem projektantów do oryginalności i innowacyjności.

Bezpośrednią i najważniejszą inspiracją do podjęcia tej tematyki były dla autora powstałe w ostatnich latach projekty i realizacje „mostów tensegrity”. Przeprowadzona analiza literatury wykazała, że ten obszar badań rozwinięty jest jedynie w niewielkim stopniu. Niestety głębsze poznanie zagadnień związanych z konstrukcjami tensegrity wykazało, że w tym zakresie dochodzi do wielu nieporozumień. Istnieją znaczne nieścisłości, zarówno w rozumieniu, jak i w samych definicjach tensegrity. Ponadto powszechna wiedza na ten temat wśród polskich inżynierów jest znikoma, co wynika chociażby z braku opracowań o podstawach tensegrity w języku polskim. To wszystko sprawiło, że autor w pierwszej kolejności musiał wykonać analizę konstrukcji i mechaniki tensegrity, przed przystąpieniem do samej oceny ich zastosowania w budownictwie mostowym. W przeciwnym przypadku praca opierałaby się jedynie na domysłach i ogólnym wrażeniu, czym może być tensegrity. W związku z tym tematyka całej pracy związana jest z budownictwem, ale rozważania dotyczą jego dwóch obszarów: mechaniki konstrukcji i mostownictwa. Autor uznał takie podejście za prawidłowe w przypadku ustrojów nietypowych, a praca może stanowić pierwsze kompleksowe opracowanie w języku polskim dotyczące podstawowych zagadnień związanych z konstrukcjami tensegrity w kontekście inżynierii lądowej.

1.2 Cele i zakres rozważań

Podstawową tezę rozprawy jest stwierdzenie, że istnieje możliwość zastosowania konstrukcji tensegrity w budownictwie mostowym. Aby ją udowodnić, postawiono inne, ważne cele niniejszej pracy.

- Zbudowanie jasnej, opartej na mechanice konstrukcji definicji tensegrity na podstawie wniosków z analizy historii powstawania idei tensegrity oraz istniejących definicji.
- Określenie najważniejszych cech tensegrity w celu oceny ich użyteczności w konstrukcjach inżynierskich. Przedstawiono podstawy zagadnień związanych z tensegrity, takie jak problem poszukiwania formy tensegrity oraz opis tensegrity z punktu widzenia mechaniki.
- Analiza modułów tensegrity jako elementów wykorzystywanych do budowy konstrukcji inżynierskich. W pracy ograniczono się do analizy wybranych podstawowych modułów, ze względu na bardzo dużą różnorodność tego typu struktur.

- Ocena możliwości zastosowania tensegrity w budownictwie mostowym pod kątem tworzenia konstrukcji jedno- i wielomodułowych.
- Ocena możliwości zastosowania tensegrity w budownictwie mostowym pod kątem zagadnień technologicznych i odpowiedzi konstrukcji na obciążenia statyczne i dynamiczne. Rozważania ograniczono do zastosowań w kładkach dla pieszych.
- Klasyfikacja i ocena wybranych istniejących projektów obiektów mostowych pod względem spełnienia wymogów definicji konstrukcji typu tensegrity.

1.3 Struktura pracy

Zasadnicza część rozprawy została podzielona na szereg rozdziałów. Wraz z rozdziałem pierwszym, stanowiącym wprowadzenie, w pracy zamieszczono osiem rozdziałów.

W **rozdziale 2** omówiono historię i źródła powstania idei tensegrity, jak i pierwszych konstrukcji tego typu. Przedstawiono najważniejsze definicje konstrukcji tensegrity i ich ewolucję oraz wskazano istniejące między nimi różnice. Na tej podstawie wypracowano autorskie definicje, którymi posłużono się w dalszej części pracy. Przedstawiono własną technikę klasyfikacji konstrukcji na podstawie posiadanych przez nie cech tensegrity. Podano przykłady istniejących konstrukcji inżynierskich o cechach tensegrity.

Rozdział 3 został poświęcony najważniejszym zagadnieniom teoretycznym, będącym podstawą przeprowadzonych badań opisanych w kolejnych rozdziałach. Zagadnienia te, zgodnie z definicjami, decydują o wyjątkowości struktur tensegrity w odniesieniu do innych ustrojów prętowych. Omówiono problem i wybrane metody poszukiwania formy tensegrity. Przedstawiono proste przykłady. Opisano mechanikę tensegrity na podstawie równań macierzowych mechaniki kratownic, ze szczególnym uwzględnieniem mechanizmów infinitezmalnych i stanów samonapężenia w ujęciu statycznym i dynamicznym. Opracowano metodę analizy spektralnej macierzy kratownic, będącą metodą poszukiwania formy tensegrity, którą posłużono się w niniejszej pracy. Przedstawiono przykłady jej zastosowania.

W **rozdziale 4** wykorzystano omówione wcześniej narzędzia do analizy wybranych podstawowych modułów tensegrity, użytecznych w opisywanych później konstrukcjach wielomodułowych. Opisano moduły oraz zbadano ich charakterystyki statyczne i dynamiczne, ze szczególnym uwzględnieniem wpływu sił samonapężenia. Opracowano oryginalną metodę opisu kontynualnego tensegrity i wykorzystano ją do porównania własności wybranych modułów.

Rozdział 5 poświęcono rozważaniom na temat konstruowania struktur jedno- i wielomodułowych, złożonych z modułów o poznanych wcześniej właściwościach, w kontekście wy-

korzystania ich w budownictwie mostowym. Zajęto się problemami łączenia modułów pod kątem geometrycznym, a także wpływu sposobu łączenia na zachowanie cech tensegrity pojedynczego modułu.

W **rozdziale 6** skupiono się na zagadnieniach związanych bezpośrednio z projektowaniem kładek dla pieszych tensegrity. Omówiono zagadnienia technologiczne związane z materiałami, rozwiązaniami szczegółów konstrukcyjnych i metodami budowy. Zbadano odpowiedź wielomodułowych konstrukcji mostowych, utworzonych w sposób przedstawiony w rozdziale 5, na obciążenia statyczne i dynamiczne. Przedstawiono możliwości wykorzystania tensegrity w ustrojach rozwijanych i sterowanych.

W **rozdziale 7** wykonano przegląd wybranych projektów i realizacji konstrukcji pretendujących do miana tensegrity. Wykonano ocenę ustrojów pod kątem spełnienia wymogów definicji. Przeprowadzono podstawową analizę statyczną i dynamiczną.

Rozdział 8 stanowi podsumowanie pracy. Przedstawiono w nim najważniejsze wnioski płynące z rozprawy.

Pracę uzupełnia zestawienie literatury oraz spisy tabel i rysunków.

Rozdział 2

Stan wiedzy

2.1 Tensegrity

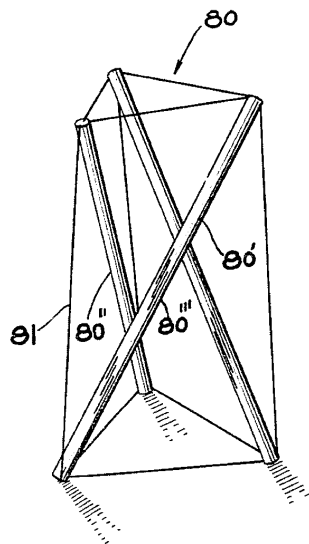
Tensegrity to wyraz pochodzący z języka angielskiego, będący złożeniem dwóch słów: *tension* – rozciąganie i *integrity* – spójność, integralność, całość. Termin ten został zaproponowany w celu nazwania reguły konstrukcyjnej, polegającej na tworzeniu układów złożonych wyłącznie z elementów ściskanych i rozciąganych. Elementy ściskane – zazwyczaj pręty proste (ze względu na swoją rolę nazywane zastrzałami) nie łączą się; są natomiast otoczone siatką elementów rozciąganych – cięgien. Sztywność konstrukcji zależy od jej sprężenia, które wpływa na siły podłużne w całym ustroju.

2.1.1 Historia

Pierwsze konstrukcje tensegrity często kojarzone są bardziej ze sztuką niż z budownictwem. Jest to o tyle słuszne, że autorstwo pierwszych tensegrity-podobnych przestrzennych instalacji przypisuje się awangardowym artystom dwudziestolecia międzywojennego. Niezaprzeczalny wkład w początkowy rozwój tej idei mieli również późniejsi architekci i artyści. Zatem wydaje się, że nadrzędnym celem autorów pierwszych struktur tensegrity nie były zastosowania inżynierskie. Z drugiej strony twórczość konstruktywistów była wyjątkowo jak na ruchy artystyczne nastawiona na syntezę nauki i sztuki. Konstruktywiści, skupiając się na funkcjonalizmie, swoje zainteresowania wiąźali ze sztuką użytkową i zastosowaniami w produkcji przemysłowej. Najważniejsze grupy awangardowe związane z konstruktywizmem, jak i cały ruch rozwijały się w ścisłym powiązaniu z architekturą, tworząc jeden z głównych kierunków architektury modernistycznej. Można zatem stwierdzić, że od samego początku idea tensegrity była w pewnym stopniu powiązana z architekturą, a co za tym idzie – z budownictwem.

Wśród pomysłodawców układów tensegrity powszechnie wymienia się trzech autorów; są to: David Georges Emmerich, Richard Buckminster Fuller i Kenneth Snelson. Każdy z nich przypisuje sobie status pierwszego wynalazcy tensegrity [Gómez Jáuregui: 2009]. Niezależnie od tego wszyscy trzej opatentowali m.in. dokładnie taką samą strukturę przestrzenną (rys. 2.1)

[Fuller: 1962] [Emmerich: 1964] [Snelson: 1965]. Był to składający się z trzech zastrzałów i dziewięciu cięgien najprostszy trójwymiarowy moduł tensegrity – *simplex* (ang. *simple* – prosty).



Rys. 2.1 *Simplex* – rysunek z patentu K. Snelsona [Snelson: 1965]

Karl Ioganson

Pierwszych źródeł i inspiracji idei tensegrity można jednak doszukać się już w twórczości rosyjskich konstruktywistów, którzy w swoich pracach często eksperymentowali z tworzeniem form geometrycznych z prostych elementów. Na szczególną uwagę zasługuje twórczość łotewskiego artysty Karla Iogansona., który w latach 1919–1921 stworzył, a w 1921 roku w Moskwie zaprezentował serię rzeźb złożonych z prostych drewnianych prętów i metalowych drutów.

Za pierwszy ustrój poprzedzający konstrukcje tensegrity uznawana jest instalacja *Gleichgewichtkonstruktion* (niem. *Gleichgewicht* – równowaga, *Konstruktion* – konstrukcja) [Emmerich: 1988], składająca się z trzech zastrzałów i ośmiu cięgien, w tym jednego swobodnie związającego. Konstrukcja była deformowalna i pozwalała na zmianę układu jej elementów.

Inna rzeźba składająca się z trzech zastrzałów i dziewięciu cięgien, podobnie jak poprzednia, przypominała wyglądem *simplex*, jednak pręty stykały się w samym jej środku [Wroldsen: 2007].

Niektórzy badacze doszukują się wśród instalacji Iogansona również prawdziwej konstrukcji typu *simplex*. Na podstawie przypuszczeń i bardzo niewyraźnych zdjęć z wystawy z 1921 roku dokonano rekonstrukcji rzeźby w tej formie [Gough: 1998], jednak z powodu braku dokumentacji dostatecznej jakości taka interpretacja budzi kontrowersje [Burkhardt: 2008].

Chociaż żadna z dwóch pierwszych dobrze udokumentowanych rzeźb nie może zostać uznana za konstrukcję tensegrity, na inspirację rosyjskim konstruktywizmem powołują się zarówno Snelson [Burkhardt: 2008], jak i Emmerich [Emmerich: 1988]. Chociaż Ioganson nie rozwinął swoich pomysłów w dziedzinie konstrukcji inżynierskich, sam autor przewidział możliwości swojej twórczości za pomocą słów: „Od malarstwa do rzeźby, od rzeźby do konstrukcji, od konstrukcji do technologii i wynalazczości – to jest moja obrona droga, która zapewne będzie ostatecznym celem każdego artysty rewolucyjnego”.

Kenneth Snelson i Richard Buckminster Fuller

Wynalezienie idei tensegrity przypisywane jest między innymi dwóm Amerykanom: architektowi Richardowi Buckminsterowi Fullerowi i rzeźbiarzowi Kennethowi Snelsonowi. Autorstwo nowego typu konstrukcji było przedmiotem sporu między tymi dwoma twórcami [Sadao: 1996] [Snelson: 1996].

W 1948 roku Kenneth Snelson uczęszczał na wykłady w Black Mountain College w Karolinie Północnej w Stanach Zjednoczonych, gdzie wykładał Josef Albers – amerykański artysta niemieckiego pochodzenia – oraz sam Buckminster Fuller. Pod wpływem idei niemieckiego Bauhausu, z którego wywodził się Albers, i przestrzennych systemów geometrycznych Fullera, Snelson stworzył przestrzenne rzeźby prętowo-ciężnowe, w tym Pracę X („X Piece”) [Snelson: 1996] [Gough: 1998]. Składała się ona z dwóch sztywnych drewnianych elementów w kształcie litery X. Jeden z nich zawieszony był w przestrzeni i utrzymywany jedynie rozciągającymi żyłkami. Rzeźba wywarła duże wrażenie na Fullerze – określił ją jako realizację, której sam szukał od dawna [Wroldsen: 2007].

Niezależnie od późniejszych sporów między twórcami obaj kontynuowali pracę nad pomysłem tensegrity. Zarówno Fuller, jak i Snelson opatentowali swoje konstrukcje, odpowiednio w latach 1962 i 1965 [Fuller: 1962] [Snelson: 1965].

Fuller w patencie „Tensile-Integrity Structures” użył stworzonego przez siebie słowa *tensegrity* do opisu ustrojów złożonych z prostych trójzastrzałowych segmentów. Jako główny sens swojego projektu określił ograniczenie udziału elementów ściskanych w konstrukcji do „małych wysp pośród oceanu rozciągania”.

Snelson w dokumentacji patentowej używa tytułu „Continuous Tension, Discontinuous Compression Structures” (konstrukcje o ciągłym rozciąganiu, nieciągłym ściskaniu), wyjaśniając tym samym ideę swoich prac. Czytelnie zaprezentował w niej w sposób powstania modułu *simplex* na drodze połączenia płaskich modułów, złożonych z dwóch zastrzałów położonych na przekątnej kwadratu z cięgien.

W kolejnych latach Fuller rozpropagował i zapoczątkował szerszy rozwój konstrukcji typu tensegrity [Gómez Jáuregui: 2004], poszukując nowych sposobów zastosowania w architekturze, między innymi w konstrukcjach kopuł geodezyjnych. Snelson natomiast skupił się na rzeźbie i przez lata rozwijał ideę tensegrity, czyniąc z niej sens swojej pracy artystycznej.

David Georges Emmerich

Wymieniając pomysłodawców tensegrity, nie można pominąć francuskiego architekta Davida Georges'a Emmericha. Znał on twórczość konstruktywistów i samego Iogansona [Motro: 2003]. Niezależnie od twórców amerykańskich opatentował konstrukcję *simplex*, a także inne moduły tensegrity.

Zgłoszenie patentowe Emmericha zostało zatwierdzone w 1964 roku. Dokument nosił tytuł *Construction de réseaux autotendants* (samonapężone konstrukcje sieciowe) i zawierał rysunki kilku podstawowych modułów tensegrity i sposobu ich łączenia [Emmerich: 1964].

Podobnie jak w przypadku Fullera, Emmerich rozwijał swoje pomysły w kierunku zastosowań w architekturze.

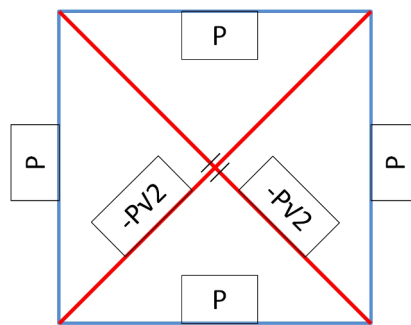
2.1.2 Definicje

Określenie jednoznacznej definicji konstrukcji tensegrity może przysporzyć problemów. Wynika to z jednej strony z kilku możliwych podejść do tego typu ustrojów, z drugiej – wielokrotnie określane tym mianem są konstrukcje mające niewiele wspólnego z myślą, którą kierowali się twórcy tego pojęcia.

Pierwsze definicje znalazły się w dokumentach patentowych. Fuller, podobnie jak Snelson [Snelson: 1965], opisując szczegółowo swoje konstrukcje, zwrócił uwagę na występowanie nieciągłego układu elementów ściskanych pośród ciągłego układu elementów rozciąganych. Sformułował również poetyckie określenie tensegrity, gdzie „elementy ściskane stają się małymi wyspami pośród oceanu rozciągania” [Fuller: 1962]. Późniejsze definicje Fullera miały zbliżoną wymowę. Podkreślały ciągłość zamkniętego układu rozciągania, decydującego o kształcie konstrukcji i nieciągłość występujących lokalnie ściskanych elementów [Fuller: 1975].

Emmerich zarówno w tekście, jak i samym tytule patentu *Construction de réseaux autotendants*, jako pierwszy podkreślił bardzo ważną cechę konstrukcji tensegrity – występujący w niej samorównoważny układ sił wewnętrznych [Emmerich: 1964]. Użyte przez Emmericha

słowo *autotendants* (fr. *auto-* – samo-, *tendre* – napięcie) oznacza *samonapężenie*¹ i zostało na stałe przyjęte do opisu tensegrity. W języku angielskim odpowiada mu słowo *self-stress*. Istnienie stanu samonapężenia oznacza, że w elementach konstrukcji może występować układ sił wewnętrznych o określonych proporcjach. Siły te nie zależą od obciążeń zewnętrznych i warunków podparcia², ponieważ wzajemnie się równoważą. Zatem taką konstrukcję można na stałe sprężyć. Prosty przykład stanu samonapężenia w kratownicy nie będącej tensegrity przedstawiono na rysunku 2.2. Założono, że w miejscu przecinania się pręty nie są połączone. W prętach zaznaczono siły normalne z dokładnością do zmiennej P , która może przyjmować dowolne wartości.



Rys. 2.2 Przykład stanu samonapężenia w płaskiej kratownicy

Definicję opartą na informacjach zawartych w pierwszych patentach przedstawił René Motro: „Systemy tensegrity są przestrzennymi siatkowymi systemami w stanie samonapężenia. Wszystkie ich elementy mają prostoliniowe włókno środkowe i są jednakowej wielkości. Elementy rozciągane nie mają sztywności na ściskanie i stanowią ciągły układ. Elementy ściskane stanowią nieciągły układ. W każdym węźle znajduje się dokładnie jeden węzeł elementu ściskanego” [Motro: 2003]. W opisie definicji Motro dodaje, że sztywność konstrukcji wynika z jej samonapężenia.

Taka definicja ogranicza klasę tensegrity do bardzo wąskiego zbioru konstrukcji. Zawiera elementy niekoniecznie uzasadnione z mechanicznego punktu widzenia, chociażby takie jak wymóg równej długości elementów, kształtu elementów czy wymóg występowania dokładnie jednego elementu ściskanego w węźle. W związku z tym opracowano kolejne, poszerzone definicje.

¹ W niniejszej pracy dla określenia samorównoważnego układu sił wewnętrznych będzie używane słowo *samonapężenie*. Autor zdecydował się na użycie tego słowa poprzez analogię do określeń powszechnie używanych w opracowaniach zagranicznych.

² Wyjątek stanowią konstrukcje o cechach tensegrity, rozpięte między nieprzesuwnymi podporami, które zastępują niektóre elementy ściskane. Zostaną one opisane w dalszej części pracy.

Jeden ze znanych opisów tensegrity podał Anthony Pugh. Definicja ta jest bardzo szeroka i w praktyce obejmuje wszystkie konstrukcje, w których występują elementy ściskane łączące się tylko z cięgnami: „System tensegrity jest ustanowiony, kiedy nieciągły układ elementów ściskanych oddziałuje z ciągłym układem elementów rozciąganych, określając stałą objętość w przestrzeni” [Pugh: 1976].

Definicję tę zawężił Motro, dodając wymogi samonapężenia oraz zawierania się ściskania wewnątrz rozciągania: „System tensegrity jest systemem znajdującym się w stabilnym stanie samonapężenia, zawierającym nieciągły układ elementów ściskanych w ciągłym układzie elementów rozciąganych” [Motro: 2003]. Jest to definicja powszechnie akceptowana.

Miura i Pellegrino zaprezentowali definicję opartą na mechanice konstrukcji, jasno określając wymóg występowania w konstrukcji infinitesimalnego mechanizmu: „Konstrukcją tensegrity jest każda złożona z cięgien i zastrzałów konstrukcja, w której stan sprężenia powoduje wystąpienie rozciągania we wszystkich cięgnach [...] [oraz] służy stabilizacji konstrukcji, zapewniając sztywność pierwszego rzędu wszystkim mechanizmom infinitesimalnym” [Tibert: 2002].

Odmienne podejście zaprezentowali Skelton i de Oliveira. Określili oni pojęcie konfiguracji tensegrity, będącej układem brył sztywnych, które stają się konstrukcją tensegrity, jeśli zostaną połączone układem elementów rozciąganych. „[Dana] konfiguracja stanowi konfigurację tensegrity, jeśli może być ustabilizowana przez pewien układ elementów rozciąganych” [Skelton: 2009a]. Dodatkowo podkreślili możliwość połączenia w węźle więcej niż jednego elementu ściskanego. Liczba elementów ściskanych, które zbiegają się w węźle, określa „klasę” tensegrity.

Rozdzwięk między pierwszymi wąskimi definicjami a ich poszerzonymi wersjami jest bardzo duży. Chociażby konstrukcje przekryć dachowych, powszechnie zwanych tensegrity, nie spełniają warunków założeń większości definicji. Kształt tych konstrukcji definiowany jest przez zewnętrzny ściskany pierścień, a nie przez siatkę elementów rozciąganych rozpiętą na nieciągłej siatce elementów ściskanych. Snelson w korespondencji z Valentínem Gómezem Jáuregui tak wypowiedział się na temat tego typu konstrukcji: „W istocie są to koła rowerowe. Czy świat potrzebuje innej nazwy na tego typu egzozszkieletowe konstrukcje [w odróżnieniu od konstrukcji tensegrity ze szkieletem wewnętrznym – endoszkieletem] ze sztywną obręczą? Nie sądzę. [...] Tak, Fuller stwierdził, że wszystko we wszechświecie jest tensegrity. [...] Jeśli wszystko jest tensegrity, to tensegrity nie jest niczym szczególnym; więc po co używać tego słowa” [Gómez Jáuregui: 2004].

Ze względu na znaczne rozbieżności między poszczególnymi definicjami na użytek tej pracy autor formułuje dwie definicje tensegrity. Pierwsza dotyczy struktur ściśle spełniających wszystkie wymagania wynikające z idei tensegrity i decydujących o ich szczególnych właściwościach. Druga określa szerszą grupę konstrukcji, łagodząc wymagania poprzez możliwość rezygnacji z niektórych własności tensegrity. Na podstawie własnych doświadczeń autor stwierdza, że z punktu widzenia mechaniki konstrukcji najważniejszymi z cech tensegrity jest występowanie stanów samonapężenia i mechanizmów infinitezymalnych przez nie usztywnianych. To właśnie one decydują o wyjątkowości konstrukcji i o fakcie występowania prętów wyłącznie rozciąganych, które można zastąpić cięgnami. Natomiast ze względu na przestrzenny charakter konstrukcji, jej integralność, niezależność od obciążeń zewnętrznych i warunków podparcia, istotny jest warunek nieciągłości ściskania wewnątrz rozciągania. W związku z tym proponuje się definicję „**czystego tensegrity**”, opartą na mechanice kratownic:

Konstrukcja typu tensegrity jest kratownicą, w której występują mechanizmy infinitezymalne usztywniane przez stany samonapężenia. Elementy ściskane stanowią nieciągły układ wewnątrz ciągłego układu elementów rozciąganych, nieposiadających sztywności na ściskanie.

Trudno jednak odrzucić konstrukcje powszechnie nazywane tensegrity, jak chociażby wspomniane już kopuły. Dodatkowo zastosowania inżynierskie, z powodu warunków stawianych konstrukcjom budowlanym, niejednokrotnie wymagają zdecydowanie większej sztywności lub niezawodności niż te spełniające warunki powyższej definicji. Mimo to w wielu tego typu konstrukcjach zachowana jest najważniejsza właściwość tensegrity, czyli istnienie stanów samonapężenia (*self-stress*) oraz (zazwyczaj) ich rola w usztywnieniu konstrukcji. W związku z tym formułuje się szeroką definicję „**konstrukcji o cechach tensegrity**”:

Konstrukcja o cechach tensegrity jest kratownicą, w której występują stany samonapężenia oraz co najmniej jedna z następujących cech: istnienie mechanizmów infinitezymalnych stabilizowanych przez stany samonapężenia, nieciągły układ elementów ściskanych, zawieranie się elementów ściskanych wewnątrz elementów rozciąganych. Elementy rozciągane nie mają sztywności na ściskanie.

Drugą definicję można przedstawić w sposób tabelaryczny. Mówimy o konstrukcji o cechach tensegrity, jeśli spełnia ona wszystkie obligatoryjne i przynajmniej jeden z pozostałych wymogów zgodnie z tabelą 2.1.

Tab. 2.1 Wymogi definicji konstrukcji o cechach tensegrity

Obligatoryjność	Cecha	Oznaczenie
+	Konstrukcja jest kratownicą .	K
+	W konstrukcji występują stany samonaprężenia (ang. <i>self-stress</i>).	S
spełnienie min. jednego wymogu	W konstrukcji występują mechanizmy infinitezmalne stabilizowane przez samonaprężenie.	M
	Układ elementów ściskanych jest nieciągły .	N
	Elementy ściskane znajdują się wewnątrz układu elementów rozciąganych.	W
+	Elementy rozciągane nie mają sztywności na ściskanie – są ciągłymi .	C

2.1.3 Klasyfikacja konstrukcji tensegrity

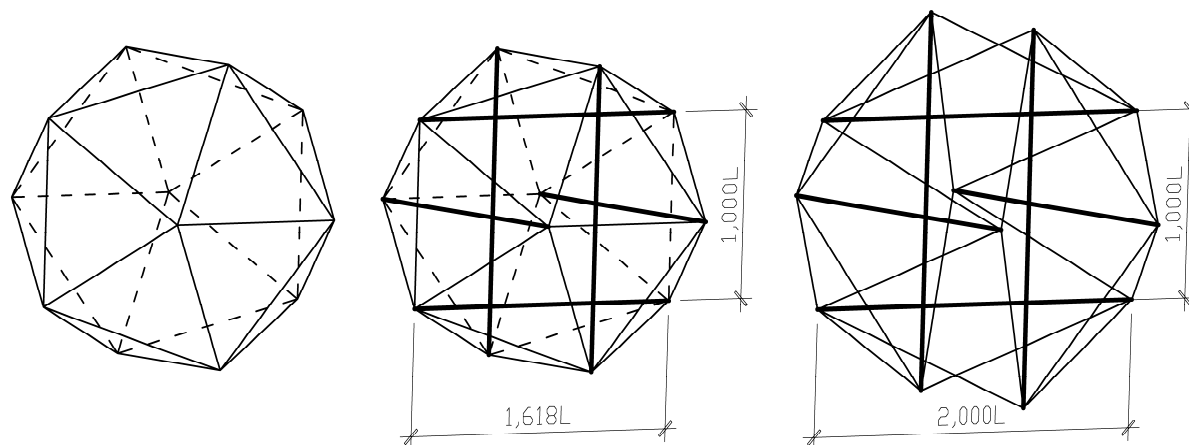
Przedstawione autorskie definicje posłużą ocenie i weryfikacji konstrukcji pretendujących do miana tensegrity. Jest to niezbędne ze względu na wiele niejasności, które budzi określanie niektórych konstrukcji nazwą tensegrity. Klasyfikacja polega na ocenie, które z cech przedstawionych w tabeli 2.1 ma dana konstrukcja i jej kwalifikacji do grup: „czystych tensegrity”, konstrukcji o cechach tensegrity lub innych typów ustrojów. Cechy zostaną określone za pomocą oznaczeń literowych określonych w tabeli 2.1.

„Czyste tensegrity”

Pierwszą i najważniejszą grupą są konstrukcje spełniające wszystkie 6 kryteriów (K+ S+ M+ N+ W+ C+), a więc „czyste tensegrity”. Niezależnie od stopnia ich użyteczności w konstrukcjach inżynierskich to one są podstawą tworzenia konstrukcji o cechach tensegrity, jak również na ich podstawie określono najważniejsze właściwości tensegrity.

Nazewnictwo podstawowych modułów tensegrity oparte jest na nazwach brył platońskich i archimedesowych, z którymi kojarzone są poszczególne moduły. Powiązanie geometrii brył i odpowiadających im tensegrity polega na tym, że w modułach tensegrity ciągną leżą na niektórych krawędziach, natomiast zastrzały rozpierają ciągną, leżąc na wybranych przekątnych tychże brył. Geometria tensegrity nie zawsze jest identyczna z odpowiadającymi im bryłami, ponieważ nie byłyby wtedy w stabilnej konfiguracji rozumianej jako ta, w której nie występują ruchy sztywne. Przykładem może być dwudziestościan foremny (ang. *icosahedron*) tense-

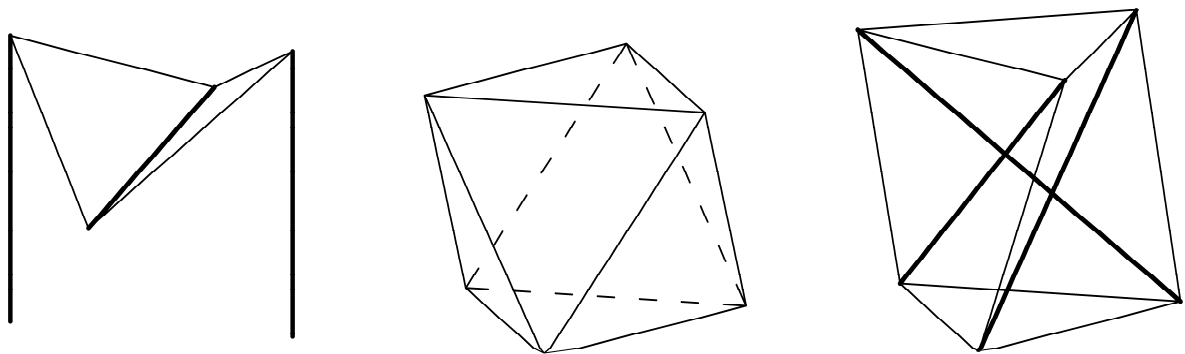
grity znany również jako rozsunięty ośmiościan foremny (ang. *expanded octahedron*) tensegrity. Stosunek długości oznaczonych na rysunku 2.3 przekątnych do ich rozstawu w dwudziestościanie foremnym wynosi 1,618, podczas gdy w odpowiadającym mu tensegrity wynosi on 2,000 [Motro: 2011].



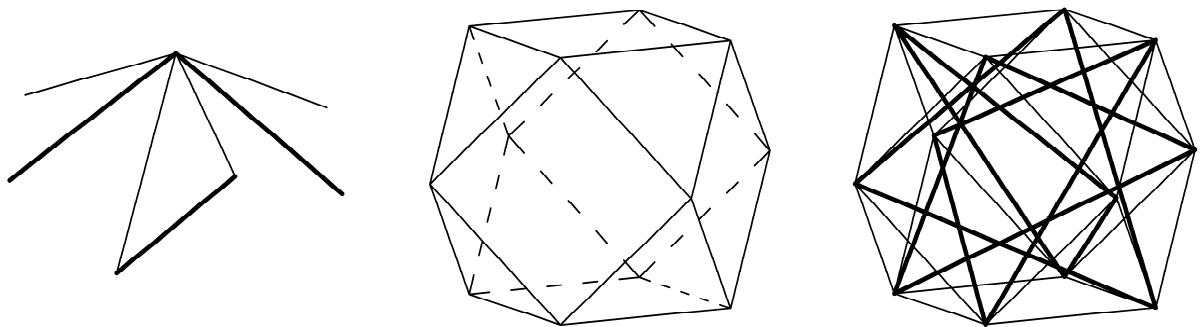
Rys. 2.3 Dwudziestościan foremny i porównanie jego proporcji z dwudziestościanem foremnym tensegrity³

W zależności od sposobu łączenia przekątnych, a więc od wyboru krawędzi odpowiadających brył, Anthony Pugh [Pugh: 1976] określił trzy rodzaje wzorów struktury tensegrity (por. [Bieniek: 2012]). We wzorze rombowym (ang. *rhombic* lub *diamond pattern*) zastrzały łączą dłuższą przekątną rombu, który jest odgięty z płaszczyzny względem tej przekątnej. Przykładami mogą być wspomniane wcześniej *simplex* (oparty na ośmiościanie) (rys. 2.4) czy dwudziestościan foremny tensegrity (rys. 2.3). Kolejny wzór, zwany obwodowym (ang. *circuit pattern*), można przedstawić jako powstały ze wzoru rombowego poprzez połączenie najbliższych wierzchołków zastrzałów. W otrzymanej w ten sposób konstrukcji z definicji elementy ściskane muszą się stykać. Przykładem może być sześćo-ośmiościan (ang. *cu-boctahedron*) tensegrity (rys. 2.5). W tym przypadku, chociaż pręty ściskane stykają się z sobą, to połączone elementy tworzą niezależne, sztywne trójkąty „zawieszane” pośród elementów rozciąganych. Ostatnią grupą są struktury zygzakowane (ang. *zigzag pattern*), w których w stosunku do wzoru rombowego zamiast cięgien na przeciwległych bokach figury stoi się cięgno na krótszej przekątnej, na przykład w czworościanie ściętym (ang. *truncated tetrahedron*) (rys. 2.6).

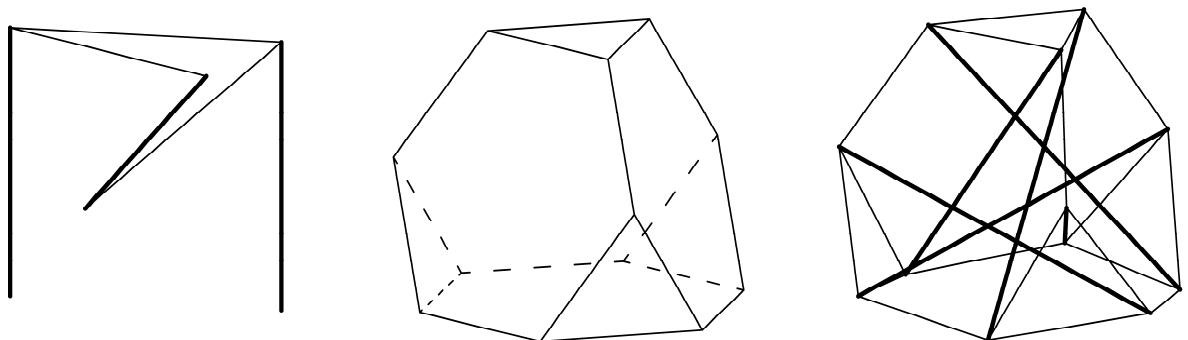
³ W pracy przyjęto, że na schematach konstrukcji tensegrity grubszą linią oznacza się elementy ściskane (zastrzały), a cieńszą rozciągane (cięgna).



Rys. 2.4 Wzór rombowy, ośmiościan foremny i powstały na jego podstawie *simplex*



Rys. 2.5 Wzór obwodowy, sześćcio-ośmiościan i powstały na jego podstawie moduł tensegrity



Rys. 2.6 Wzór zygzakowany, czworościan ścięty i powstały na jego podstawie moduł tensegrity

Przedstawione powyżej przykłady stanowią jedynie wybraną grupę tensegrity opartą na wielościanach regularnych i półregularnych. Na ich podstawie mogą być tworzone nowe konstrukcje powstałe poprzez zmianę geometrii konstrukcji, zmianę połączeń między elementami, zmianę proporcji elementów, dublowanie i rozsuwanie elementów, łączenie modułów itp. Żadne z tych modyfikacji nie mogą być prowadzone w sposób dowolny. Nowo powstałe konstrukcje, aby mogły być uznawane za tensegrity, muszą znajdować się w samorównowadze⁴

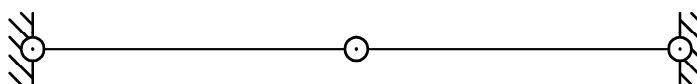
⁴ Przez samorównowagę rozumie się występujący w tensegrity stan, w którym chociaż występują mechanizmy, są one infinitymalne. Dzieje się tak za sprawą odpowiedniej konfiguracji prętów, dzięki której przemieszczenia związane z mechanizmem wywołują ściskanie w zastrzałach i rozciąganie w cięgnach, przez co powstaje stan samonapężenia, stabilizujący ten mechanizm.

i spełniać wymogi definicyjne. Ponadto istnieje szereg innych, zarówno regularnych, jak i nieregularnych „czystych tensegrity”. Ich różnorodność jest tak duża, że opracowanie pełnej i zwięzłej klasyfikacji przekracza zakres niniejszej pracy.

Konstrukcje o cechach tensegrity

Istnieje wiele konstrukcji, które wykazują cechy tensegrity. Są one różnorodne i trudno określić czytelny podział takich konstrukcji. Dlatego poniżej, jako przykład, zostaną przedstawione trzy konstrukcje, przywoływane w kontekście konstrukcji tensegrity, istotne z punktu widzenia niniejszej pracy.

Pierwszą z nich jest kratownica złożona z dwóch elementów połączonych liniowo (rys. 2.7). Jest to konstrukcja mająca 4 cechy tensegrity ($K+ S+ M+ N- W- C+$). Będzie ona służyła jako najprostszy przykład obrazujący mechanikę systemów tensegrity. Chociaż w kratownicy występuje mechanizm infinitezymalny, stabilizowany przez samonapężenie, to nie spełnia ona warunku występowania elementów ściskanych wewnątrz elementów rozciąganych, ponieważ jest podparta. Sposób podparcia jest jednak szczególny, bowiem przy wprowadzeniu sił samonapężenia reakcje w podporach leżą w jednej osi i wzajemnie się równoważą. W tym wypadku „zewnątrzne” podpory zastępują „wewnętrzny” element ściskany, dlatego stan ten można określać samonapężeniem. Opis można rozszerzyć na zagadnienia płaskie i całą grupę konstrukcji złożonych wyłącznie z cięgien, nazywanych sieciami pajęczymi (ang. *spider webs*). Warto podkreślić, że w tym i podobnych przypadkach warunki podparcia są ściśle określone i niezbędne do wprowadzenia sił samonapężenia.

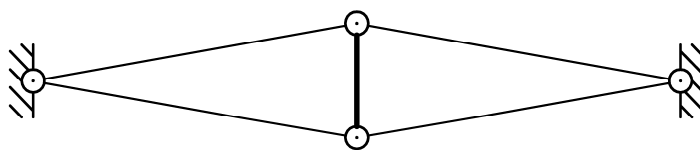


Rys. 2.7 Dwuelementowa konstrukcja o cechach tensegrity

Dzięki podwojeniu cięgien poprzedniej kratownicy i rozparciu ich zastrzałem można otrzymać kolejną interesującą konstrukcję (rys. 2.8). W ten sposób uzyskuje się sytuację, w której pojedynczy (w odróżnieniu od całego układu) element ściskany znajduje się między elementami rozciąganymi. Jednak jednocześnie likwiduje się mechanizm infinitezymalny ($K+ S+ M- N+ W+* C+$)⁵. W takiej strukturze, pomimo braku mechanizmu, w dalszym ciągu można wykazać wpływ samonapężenia na globalną sztywność giętną ustroju (w zależności od długości centralnego zastrzału). Na podstawie tego schematu można otrzymać całą rodzinę

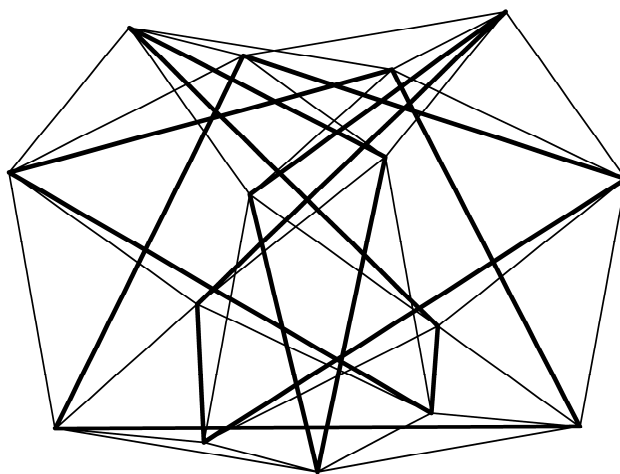
⁵ W całej pracy symbolem * oznaczane będzie lokalne spełnienie wymogów definicji tensegrity.

konstrukcji przestrzennych, począwszy od schematu zbliżonego do koła rowerowego, aż do bardziej złożonych konstrukcji, takich jak istniejące konstrukcje dachowe.



Rys. 2.8 Jednozastrzałowa płaska konstrukcja o cechach tensegrity

Ostatnim omawianym przykładem konstrukcji o cechach tensegrity jest moduł, który można uzyskać z sześćo-ośmiościanu tensegrity poprzez utworzenie struktury o węzłach znajdujących się w wierzchołkach trzech pięciokątów – a nie czworokątów, jak to było we wspomnianym sześćo-ośmiościanie (rys. 2.9). Anthony Pugh nazywa tę konstrukcję piętna-zostrzałowym trójwarstwowym systemem obwodowym (ang. *fifteen-strut three-layer circuit-pattern system*) [Pugh: 1976]. Ta kratownica, chociaż powstała podobnie do konstrukcji tensegrity, nie posiada mechanizmu infinitezimalnego, a jej elementy ściskane nie są w nieciągłym układzie ($K+ S+ M- N- W+ C+$).



Rys. 2.9 Piętna-zostrzałowy trójwarstwowy system obwodowy (moduł pierścieniowy o podstawie pięciokątnej – por. rys. 7.5)

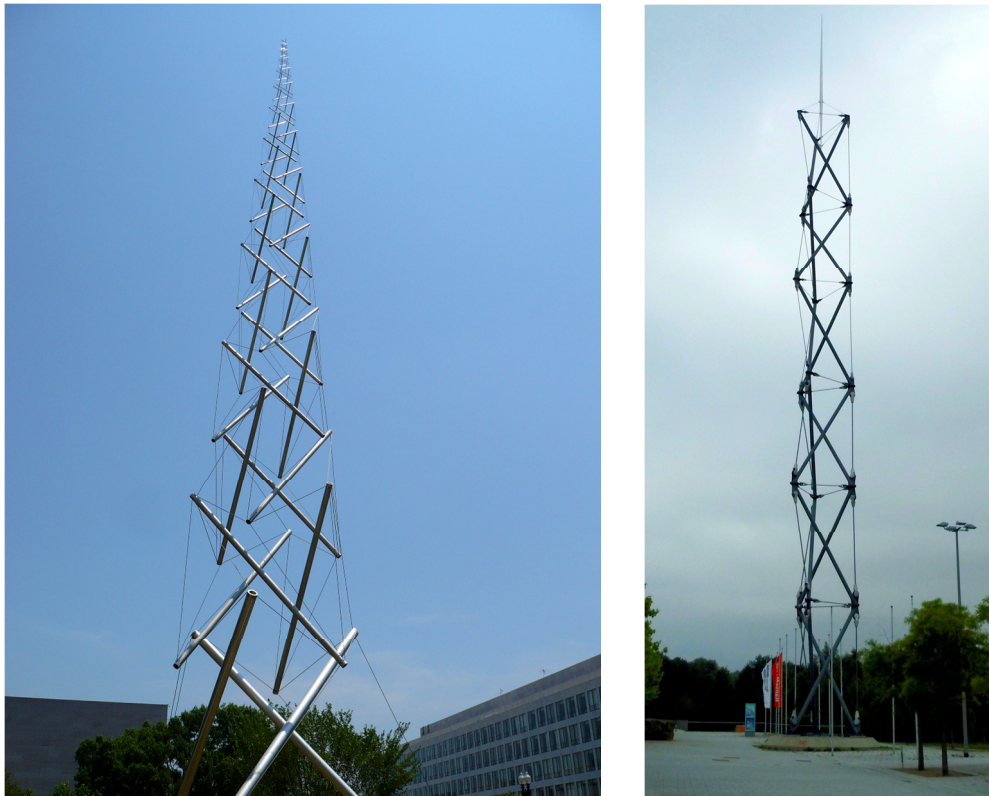
2.2 Zastosowania inżynierskie

Poniżej przytoczone zostaną przykłady zarówno istniejących konstrukcji tensegrity, jak i propozycji zastosowań inżynierskich, często popartych badaniami teoretycznymi i eksperymentalnymi. Celowo w tej części pracy pominięto przykłady zastosowań mostowych, którym poświęcono oddzielny rozdział (nr 7).

2.2.1 Wieże

Wśród najlepiej znanych konstrukcji tensegrity znajdują się wieże złożone z połączonych liniowo modułów tensegrity. Ze względu na ich rozmiary i możliwości zastosowania w budownictwie (słupy, maszty telekomunikacyjne) znalazły się one w zestawieniu, chociaż istniejące realizacje nie mają takiego przeznaczenia, a jedynie charakter rzeźbiarski.

Przykładem masztów tensegrity są dwie konstrukcje Kennetha Snelsona: Needle Tower (rys. 2.10) i Needle Tower II. Pierwsza z nich ma wysokość 18,2 m i została wybudowana w 1968 roku. Druga, z 1969 roku ma wysokość 30 m. W obu wieżach boki podstawy mają długość 6 m i są złożone z ustawionych na sobie trójzastrzałowych modułów typu *simplex*, uzupełnionych dodatkowymi cięgnami. Moduły połączone są z sobą w układzie zastrzał-cięgno, gdzie węzeł górnego modułu opiera się w środku poziomego cięgna dolnego modułu.



Rys. 2.10 Przykłady wież tensegrity: Needle Tower, Waszyngton, Stany Zjednoczone [źródło: Flickr, autor: c_nilsen, licencja: CC BY-NC-SA 2.0], Wieża targowa, Rostock, Niemcy [źródło: Wikimedia Commons, autor: M. Meißer, licencja: CC BY-SA 3.0]

Inną realizacją wież jest uznawana za najwyższą konstrukcją tensegrity [Schlaich: 2004], znajdująca się w Rostocku w Niemczech, wieża na terenie targów Hanse-Messe. Konstrukcja ma wysokość 62,3 m i składa się z sześciu modułów *simplex* o wysokości 8,3 m każdy i iglicy o wysokości 12,5 m. Moduły zostały z sobą połączone w węzłach podstaw. Konstrukcja ze

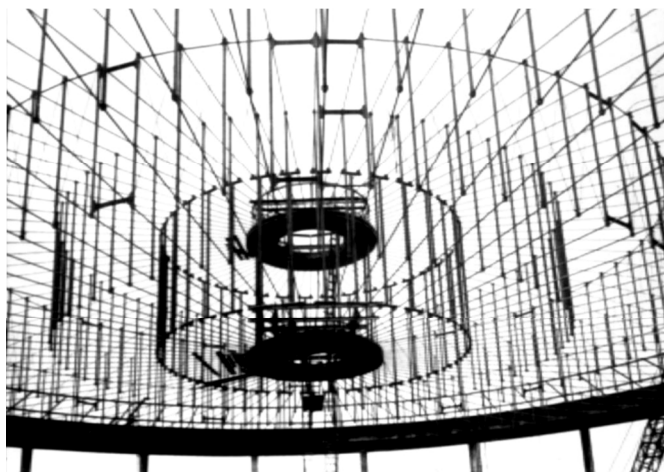
względu na swoje rozmiary i znaczące obciążenia od wiatru, a także wielkość sił sprężających, musiała zostać zaprojektowana w sposób typowo inżynierski. Jest to konstrukcja stalowa, złożona z zastrzałów o przekrojach rurowych o średnicy zewnętrznej wynoszącej 273 mm i grubości ścian od 12 do 40 mm oraz cięgien z lin ze stali o wysokiej wytrzymałości, typowych dla mostowych konstrukcji podwieszonych i wiszących, o średnicach od 30 do 75 mm.

2.2.2 Ustroje ciągnowe konstrukcji dachowych

Jak wspomniano wcześniej, wiele z konstrukcji przekryć dachowych nazywanych jest konstrukcjami tensegrity, co może budzić pewne kontrowersje. Zgodnie z przyjętą definicją rozpatrywane poniżej konstrukcje zaliczają się do grupy o cechach tensegrity.

Przyjmując złagodzone założenia, cechy tensegrity można przypisać ustrojom ciągnowym, znanym i stosowanym od wielu lat, bez odniesień do samej idei tensegrity. Przykładem mogą być wstępnie sprężone, dwupasmowe, jednowęzłowe ustroje ciągnowe o kołowym rzucie poziomym [Hajduk: 1970]. Składają się one z promieniście położonych dźwigarów, złożonych z par naprzężonych cięgien, rozpartych przez pionowe ściskane zastrzały. Połączenie dźwigarów następuje w wewnętrznych pierścieniach. Cięgna zakotwione są na obwodzie w sztywnym pierścieniu. Sprężenie sprawia, że zastrzały zawsze pozostają ściskane, a cięgna rozciągane. Dolne cięgna mają główne znaczenie dla nośności ustroju, górne pozwalają natomiast na wprowadzenie sił sprężenia. Przybliżoną metodę obliczeniową wraz z przykładami obliczeń i zastosowań przedstawił Kaczurin [Kaczurin: 1965].

Jednym z pierwszych znaczących zastosowań takiego rozwiązania był ukończony w 1959 roku dach audytorium w Utica w Stanach Zjednoczonych (rys. 2.11). Rozpiętość dachu wynosi 75,3 m, zaś maksymalna wysokość dźwigara 5,5 m.



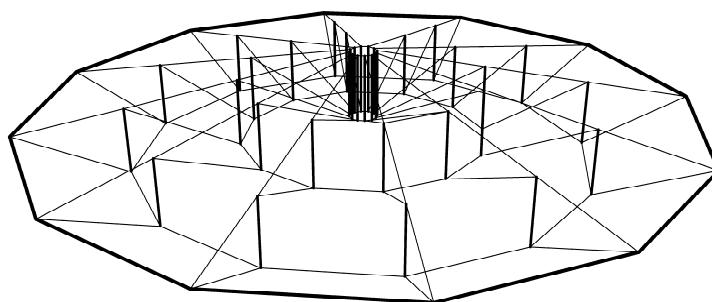
Rys. 2.11 Dach audytorium w Utica, Stany Zjednoczone
[źródło: <http://www.columbia.edu/cu/gsap/BT/BSI/TENSEGRI>]

Tego typu konstrukcje stosowane są również obecnie, na przykład w aktualnie wznoszonej konstrukcji hali widowiskowo-sportowej Kraków Arena w Czyżynach (rys. 2.12). Rozpiętość kopuły wynosi 128,4 m, a maksymalna wysokość dźwigara 14,9 m.



Rys. 2.12 Konstrukcja dachu Kraków Areny, Kraków [zdjęcie własne]

Innym powszechnie znanym i często uznawanym za konstrukcje tensegrity ustrojem są tak zwane kopuły Geigera. W tym przypadku zastrzały nie są rozpięte między dwoma promienistymi cięgnami. Zamiast na dolnej linii, podstawy słupków opierają się na cięgnach ukośnych i obwodowych (rys. 2.13). Przykładem tego typu konstrukcji jest dach Olimpijskiej Hali Gimnastycznej w Seulu z 1986 roku autorstwa Davida Geigera, o rozpiętości 120 m.



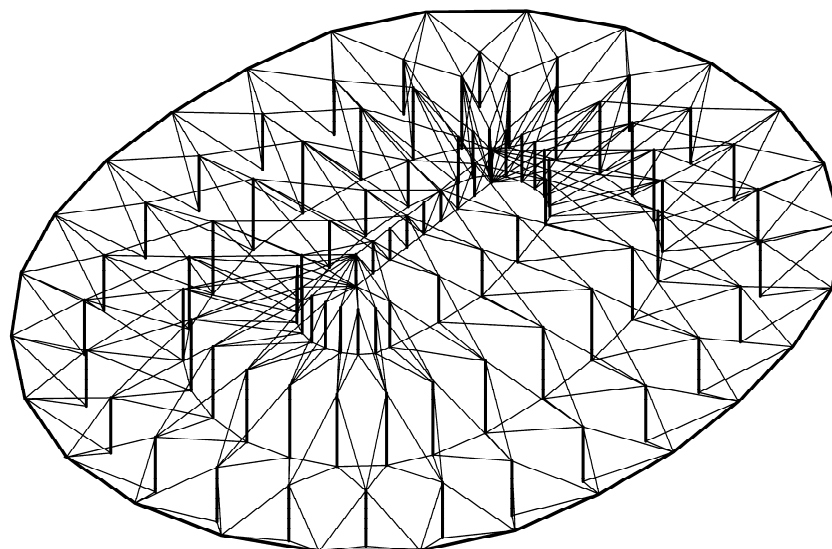
Rys. 2.13 Schemat kopuły Geigera

Znacznie wcześniej, bo już w 1971 roku ukończono budowę hali sportowej w Katowicach („Spodek”, rys. 2.14). Konstrukcja dachu autorstwa Wacława Zalewskiego jest zbliżona do ustroju Geigera, chociaż zastosowano układ elementów, w którym występują zarówno dolne, jak i górne cięgna promieniste. Dach składa się ze 120 prętowo-cięgnowych dźwigarów. Na wewnętrznym pierścieniu oparta jest kopuła doświetlająca wnętrze hali. Rozpiętość dachu wynosi 126 m.



Rys. 2.14 Konstrukcja dachu „Spodka”, Katowice [źródło: <http://joannanowicka.blogspot.com/>, autor: Mieczysław Migoń (dzięki uprzejmości Joanny Nowickiej)]

Nieco odmienny układ konstrukcyjny opracował Matthys Levy (rys. 2.15). Jego układ został zastosowany między innymi w największej na świecie kopule tego typu ukończonej w 1992 roku – stadionie w Atlancie (*Georgia Dome*) w Stanach Zjednoczonych. Kopuła została rozpięta na planie elipsy o wymiarach 227 na 185 m. Podobny ustrój zastosowano również w ukończonym w 2003 roku stadionie miejskim w La Placie w Argentynie (rys. 2.16). Dach w planie składa się z dwóch przecinających się okręgów o średnicy 170 m każdy. Środki okręgów znajdują się w odległości 48 m od siebie.



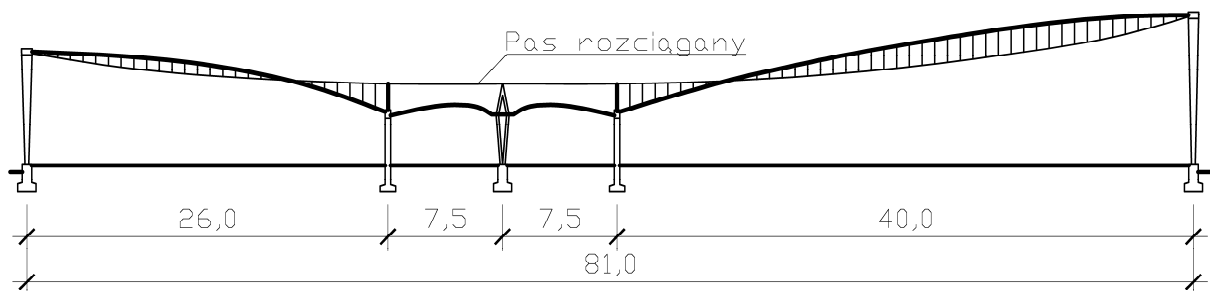
Rys. 2.15 Schemat kopuły Leviego na przykładzie *Georgia Dome*



Rys. 2.16 Dach stadionu miejskiego w La Placie, Argentyna [źródło: Flickr, autor: Gestión Abierta, licencja: CC BY-NC-SA 2.0]

Ustroje Geigera i Leviego zastosowano także w trzech ważnych obiektach olimpijskich wybudowanych na igrzyska w Pekinie. W tym wypadku jednak są to konstrukcje hybrydowe, gdzie ustrój prętowo-ciężnowy stanowi jedynie wzmocnienie górnej, sztywnej, powłokowej konstrukcji dachu [Qing-shuai: 2010].

Należy również wspomnieć o konstrukcji dachu nieistniejącego już Supersamu w Warszawie, autorstwa Wacława Zalewskiego (konstrukcja) i Jerzego Hryniewieckiego (architektura). Budowę budynku ukończono w 1962 roku. Konstrukcja, uznawana za pierwsze użycie idei tensegrity w Polsce, była złożona z szeregu położonych równolegle dźwigarów (w odróżnieniu od ustrojów w układzie promienistym). Dźwigary były złożone ze stalowych słupków oraz pasów górnych i dolnych (rys. 2.17). Obciążenia pionowe przekrycia były przyjmowane przez dolne, rozciągane pasy, podobnie jak w przypadku wyżej opisanych ustrojów.



Rys. 2.17 Przekrój poprzeczny Supersamu

2.2.3 Przestrzenne kratownice dwuwarstwowe

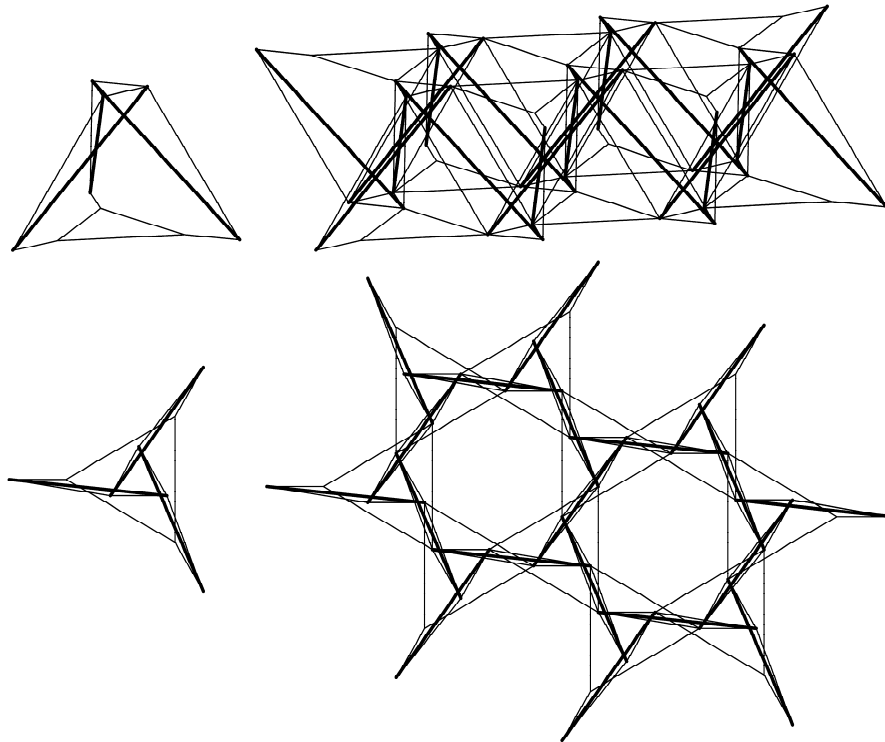
Jednym z szeroko badanych zastosowań konstrukcji tensegrity są przestrzenne dwuwarstwowe kratownice (ang. *double-layer grids*). Zazwyczaj tego typu ustroje konstruowane są w sposób typowy – z prętów kratowych łączących węzły płaskich, wiotkich ustrojów kratownicowych, znajdujących się w dwóch równoległych płaszczyznach. Mają one zastosowanie głównie jako konstrukcje przekryć dachowych.

Począwszy od lat osiemdziesiątych, rozwijane są badania na temat tego typu ustrojów. Początkowo były one prowadzone przez Ariela Hanaora [Hanaor: 1987, 1991a, 1991b, 1992] i René Motro [Motro: 1987, 1986], w późniejszym okresie między innymi przez Bin-Bing Wanga [Wang: 1998, 2004] oraz zespół Kono, Choong, Shimada, Kunieda [Kono: 1999].

Koncepcje tworzenia dwuwarstwowych kratownic przestrzennych tensegrity polegają na połączeniu modułów tensegrity, modułów o cechach tensegrity lub modułów zmodyfikowanych w sposób płaski – dwuwymiarowy. Połączenia między modułami mogą być realizowane w układzie zastrzał-cięgno (Hanaor, Kono) lub w układzie węzeł-węzeł (Motro, Wang). Możliwości łączenia modułów zostaną omówione szerzej w dalszej części pracy.

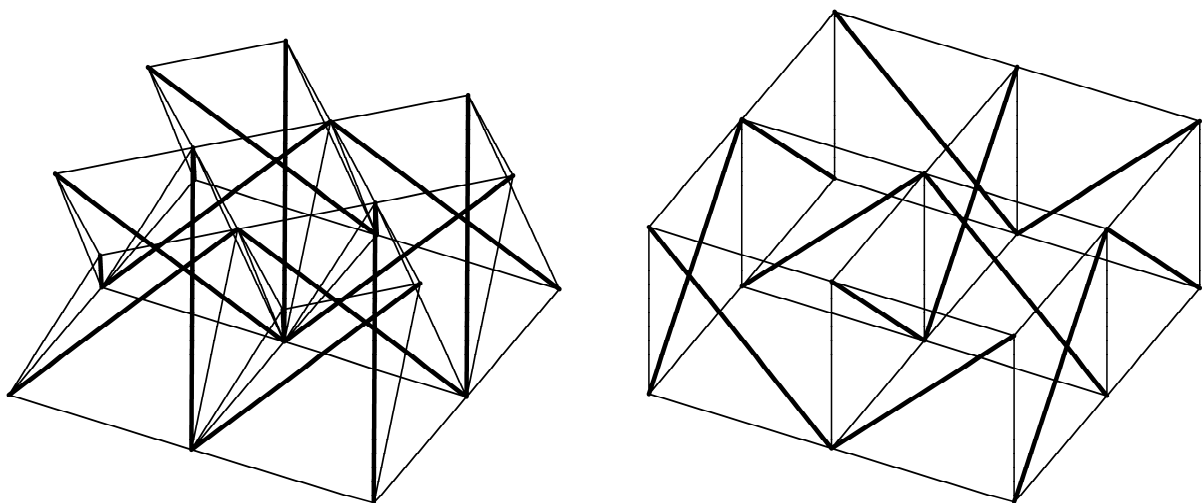
Dwuwarstwowe kratownice przestrzenne typu tensegrity, oprócz rozważań teoretycznych, zostały również przebadane eksperymentalnie na pełnowymiarowych prototypach. Przykłady opisano poniżej.

Kratownica projektu Kono składa się z połączonych z sobą zmodyfikowanych trójzastrzałowych modułów *simplex*. Modyfikacja polega na zmianie wzajemnej proporcji podstaw oraz na wprowadzeniu dodatkowych cięgien podtrzymujących trójkąt cięgien dolnej podstawy (rys. 2.18). Moduły zostały połączone naprzemiennie, w taki sposób, że cięgna podtrzymujące jednego modułu stanowią cięgna górnej podstawy modułów sąsiadujących. W ten sposób zbudowano konstrukcję o rozpiętości 9 m i polu powierzchni 80 m².



Rys. 2.18 Schematy modułu i fragmentu konstrukcji projektu Kono: aksonometria i widok z góry

Obszerne badania przeprowadzono w Laboratorium Mechaniki i Inżynierii Lądowej na Uniwersytecie Montpellier II we Francji pod kierownictwem René Motro. Wiele rozwiązań przestrzennych kratownic dwuwarstwowych tensegrity można znaleźć w pracy doktorskiej Viniciusa Raducanu [Raducanu: 2001]. Opisał on między innymi strukturę złożoną z połączonych z sobą w węzłach czterozastrzałowych modułów typu *simplex* oraz strukturę złożoną z połączonych z sobą w węzłach sześciennych z cięgien, z zastrzałami leżącymi na przekątnych ścian bocznych (rys. 2.19). Obie struktury zostaną opisane w rozdziale 5.2.3.

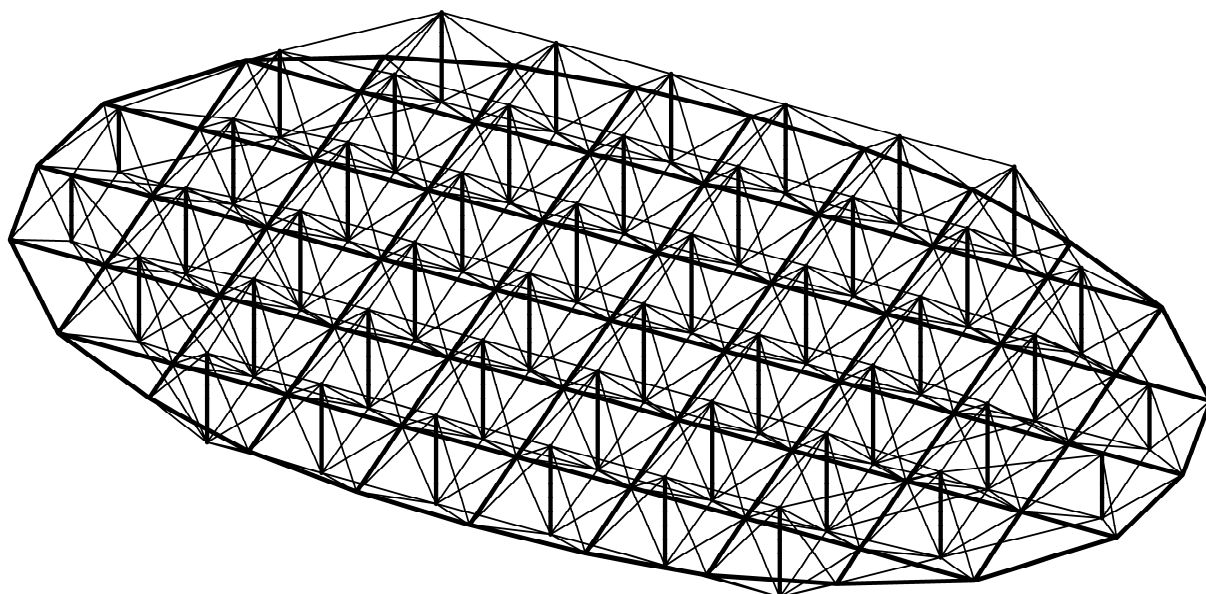


Rys. 2.19 Schematy fragmentów konstrukcji opisanych w [Quirant: 2003] i [Averseng: 2005]

Na podstawie rozważań teoretycznych wykonano projekt pierwszej z wymienionych konstrukcji [Quirant: 2003] o wymiarach 9,0 na 9,0 m (36 modułów), zdolnej spełnić warunki stanu granicznego nośności i użytkowania (ugięcie mniejsze niż 1/200 rozpiętości) przy obciążeniach wynoszących: 0,25 kN/m² – stałe i 1,10 kN/m² – zmienne oraz przy masie konstrukcji wynoszącej 18 kg/m².

Druga konstrukcja, opatentowana przez Raducanu i Motro, została zbadana w projekcie „Tensarch”, w ramach którego wyprodukowano prototyp kratownicy o powierzchni 82 m², złożony z 52 zastrzałów i 125 cięgien, o łącznej masie 900 kg [Averseng: 2005]. Konstrukcja została zaprojektowana na obciążenie wynoszące 1,6 kN/m².

Odmienne podejście zastosowali Passera i Pedretti, którzy w swoich konstrukcjach zastosowali połączenie modułów o cechach tensegrity, składających się z figury płaskiej z prętów i prostopadłego do płaszczyzny figury, pionowego, centralnego zastrzału utrzymywanego przez naprężone cięgna. Przykładami zastosowania są Pawilon na Expo 2002 („Blur Building”) w Szwajcarii (rys. 2.20) oraz dach welodromu w Światowym Centrum Kolarstwa w Aigle w Szwajcarii otwartym w 2002 roku.



Rys. 2.20 Schemat konstrukcji „Blur Building”

2.2.4 Inne zastosowania

Istnieje również wiele innych prób inżynierskiego zastosowania tensegrity. Przykładem może być konstrukcja wsporcza dachu membranowego wybudowana na Uniwersytecie Tokijskim w Japonii pod kierownictwem Ken’ichi Kawaguchiego. Dach budynku zwanego Białym Nosorożcem (ang. *White Rhino*) opiera się na dwóch zmodyfikowanych trójzastrzałowych modu-

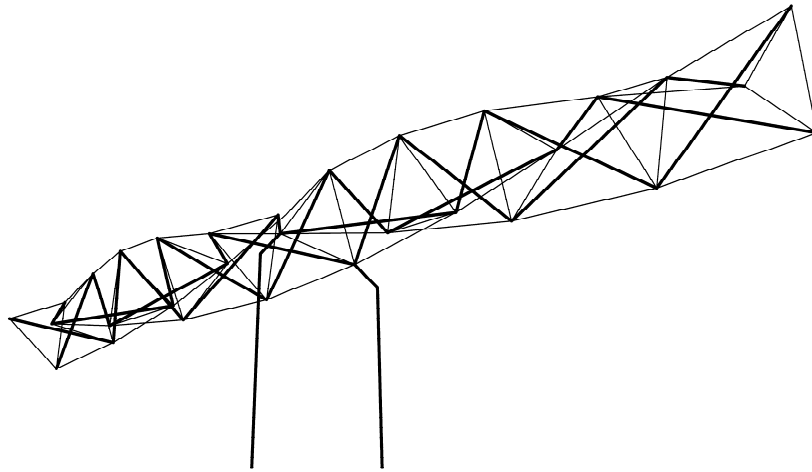
łach *simplex* z dodanym centralnym pionowym zastrzałem (rys. 2.21). Konstrukcję ukończono w 2001 roku. Większy moduł ma wysokość 9 m i bok podstawy 12 m, a mniejszy odpowiednio 6 m i 9 m [Kawaguchi: 2002].



Rys. 2.21 Wnętrze budynku *White Rhino*, Chiba, Japonia [źródło: http://www.iis.u-tokyo.ac.jp/chiba_e.html]

W zupełnie innej dziedzinie, ze względu na właściwości i lekkość tensegrity, podjęto próby tworzenia konstrukcji rozwijalnych do zastosowania w przestrzeni kosmicznej. Zaproponowano i sprawdzono możliwości wykorzystania tensegrity między innymi do budowy masztów i anten zajmujących po rozwinięciu przestrzeń znacznie większą od objętości transportowej [Tibert: 2002] [Fazli: 2011].

Zróznicowanie tematyki inżynierskiej związanej z tensegrity obrazuje ostatni przykład. Seif Dalilsafaei i Gunnar Tibert zbadali możliwości zastosowania konstrukcji tensegrity jako alternatywy dla tradycyjnej postaci przesyłowej sieci elektroenergetycznej [Dalilsafaei: 2011]. Dzięki użyciu połączonych trójzastrzałowych modułów *simplex* uzyskuje się spiralny układ przewodów elektrycznych (rys. 2.22), co wpływa na zmniejszenie natężenia pola elektromagnetycznego towarzyszącego przesyłowi energii elektrycznej, a co za tym idzie – jego oddziaływania na otoczenie.



Rys. 2.22 Propozycja wykorzystania tensegrity w przesyłowej sieci elektroenergetycznej
(na podstawie: [Dalilsafaei: 2011])

Rozdział 3

Opis matematyczny tensegrity

3.1 Geometria

3.1.1 Problem poszukiwania formy tensegrity

Rozpatrzmy kratownicę w przestrzeni trójwymiarowej. Zgodnie ze wzorem Maxwella niepodparta kratownica jest statycznie wyznaczalna, gdy spełnia warunek:

$$3n - e - 6 = 0, \quad (3.1)$$

gdzie:

n – liczba węzłów konstrukcji,

e – liczba prętów,

6 – liczba skończonych ruchów sztywnych w przestrzeni trójwymiarowej.

Powyższe wyrażenie można uogólnić [Calladine: 1978], ponieważ istnieją konstrukcje, które mają mniejszą niż określona przez wzór (3.1) liczbę prętów, a mogą przenosić obciążenia we wszystkich kierunkach. Dzieje się tak w przypadku, gdy w konstrukcji występuje infinitezymalny mechanizm, równoważony przez samorównoważny układ sił, czyli stan samonapężenia (ang. *self-stress*). Mechanizm infinitezymalny opisuje lokalną geometryczną zmienność w zakresie nieskończenie małych przemieszczeń, w przeciwieństwie do mechanizmów skończonych związanych z dowolną geometryczną zmiennością konstrukcji.

Uogólniony wzór Maxwella ma następującą postać:

$$3n - e - 6 = k - s, \quad (3.2)$$

gdzie:

k – liczba mechanizmów infinitezymalnych,

s – liczba stanów samonapężenia.

Kratownica staje się tensegrity, kiedy pojawia się w niej infinitezymalny mechanizm stabilizowany przez stan samonapężenia. Proces poszukiwania takiego układu węzłów i prętów kratownicy statycznie wyznaczalnej, by powyższy warunek został spełniony, nosi nazwę poszukiwania formy tensegrity (ang. *tensegrity form-finding*). Kratownice tensegrity są zatem statycznie niewyznaczalne.

3.1.2 Metody poszukiwania konfiguracji tensegrity (*form-finding*)

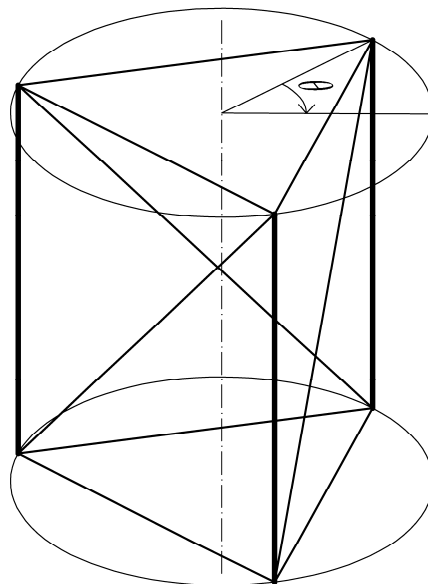
Istnieje wiele metod poszukiwania formy tensegrity i wciąż poszukuje się nowych. Obszerne zestawienia metod poszukiwania formy tensegrity oraz odpowiadających jej stanów samonapężenia można znaleźć na przykład w opracowaniach Juana i Miratsa Tura [Juan: 2008] oraz Tiberta i Pellegrino [Tibert: 2003b]. Poniżej, poza wymienieniem najważniejszych metod *form-finding*, krótko opisane zostaną metody istotne dla zrozumienia problematyki tensegrity oraz te, które są najczęściej stosowane.

Tibert i Pellegrino [Tibert: 2003b] dzielą metody *form-finding* na kinematyczne i statyczne.

Metody kinematyczne

Polegają na minimalizacji długości cięgien przy stałej długości zastrzałów lub maksymalizacji długości zastrzałów przy stałej długości cięgien.

Przykładem może być trójzastrzałowy moduł *simplex*. Moduł można otrzymać z graniastosłupa o podstawie trójkątnej (rys. 3.1), minimalizując długości przekątnych ścian bocznych związanych z obrotem górnego trójkąta względem dolnego. Wykazano, że długość przekątnej osiąga minimum przy kącie obrotu wynoszącym 150° [Kenner: 1976].



Rys. 3.1 Graniastosłup o podstawie trójkątnej i kierunek obrotu górnej podstawy w procesie poszukiwania formy tensegrity w trójzastrzałowym module *simplex*

Rozpatrzmy zatem graniastosłup o podstawie trójkątnej, w którym pręty znajdują się na krawędziach bocznych, krawędziach podstaw i na jednej z przekątnych każdej ze ścian bocz-

nych (rys. 3.1). Górna podstawa graniastosłupa będzie obracała się względem osi pionowej przechodzącej przez środki okręgów opisanych na podstawach. Niech:

L_z – długość prętów na krawędzi bocznej,

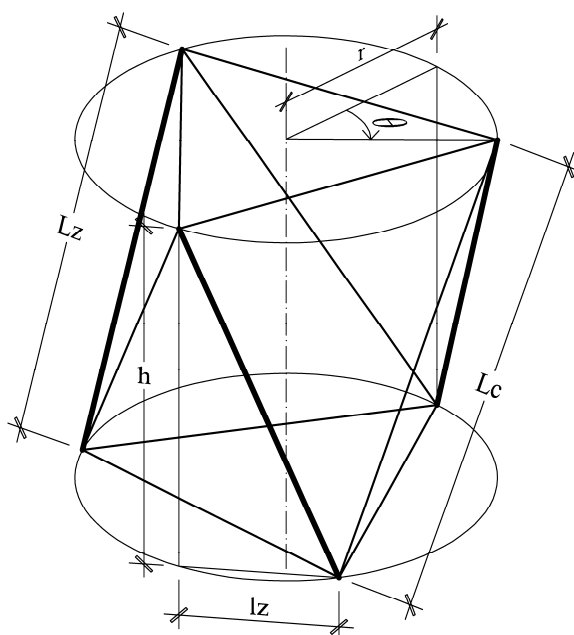
L_c – długość prętów na przekątnych ścian bocznych,

l_z – długość rzutu prętów na krawędzi bocznej na płaszczyznę podstawy,

h – wysokość konstrukcji,

r – promień okręgu opisanego na podstawie,

$\theta \in [0, 2\pi)$ – wzajemny kąt obrotów podstaw (rys. 3.1 i 3.2).



Rys. 3.2 Graniastosłup o podstawie trójkątnej i kierunek obrotu górnej podstawy w procesie poszukiwania formy tensegrity w trójzastrzałowym module *simplex*

Zadaniem jest znalezienie kąta obrotu θ , przy którym długości prętów na przekątnych ścian bocznych L_c osiągają minimum, przy założeniu stałej długości zastrzałów L_z i promienia okręgów opisanych na podstawach r . Zatem wartości: L_c , l_z oraz h zależą od kąta obrotu θ . W zadaniu minimalizacyjnym posłużono się długościami podniesionymi do kwadratu. Długość l_z opisać można wzorami:

$$l_z = 2r \sin \frac{\theta}{2},$$

$$l_z^2 = 4r^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 4r^2 \frac{1 - \cos \theta}{2} = 2r^2 - 2r^2 \cos \theta. \quad (3.3)$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$L_z^2 = h^2 + l_z^2 = h^2 + 2r^2 - 2r^2 \cos\theta, \quad (3.4)$$

$$L_c^2 = h^2 + 2r^2 - 2r^2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right). \quad (3.5)$$

Podstawiając h^2 z równania (3.4) do równania (3.5), otrzymujemy funkcję kwadratu długości L_c^2 w zależności od kąta obrotu θ :

$$L_c^2 = L_z^2 + 2r^2 \cdot \cos\theta - 2r^2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right). \quad (3.6)$$

Z warunku minimum długości L_c^2 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{dL_c^2}{d\theta} &= -2r^2 \cdot \sin\theta - 2r^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) = 0, \\ \sin\theta &= \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

W zadanym przedziale równanie ma dwa rozwiązania: $\theta = 5/6\pi$ oraz $\theta = 11/6\pi$, z tym że w pierwszym przypadku funkcja (3.6) osiąga minimum, a w drugim maksimum. Zatem poszukiwanym rozwiązaniem jest kąt:

$$\theta = \frac{5}{6}\pi. \quad (3.8)$$

Przy obciążeniu powodującym wzajemny obrót podstaw pręty o zminimalizowanej długości będą wyłącznie rozciągane. Dodatkowo siły normalne pojawią się zatem w sposób naturalny, na skutek obciążeń zewnętrznych, bądź wskutek działania sił samonapężenia konstrukcji. Dlatego pręty wyłącznie rozciągane mogą zostać zastąpione cięgnami.

Taka metoda, polegająca na sparametryzowaniu funkcji określających wstępnie przyjęte współrzędne węzłów oraz minimalizacji bądź maksymalizacji funkcji długości wybranych prętów, jest użyteczna wyłącznie w symetrycznych konstrukcjach [Connelly: 1995] i nosi nazwę **kinematycznego rozwiązania analitycznego**.

Do metod kinematycznych zalicza się również metodę **programowania nieliniowego**. Polega ona na postawieniu wieloparametrowego problemu minimalizacyjnego w postaci funkcji wraz z nałożonymi ograniczeniami [Pellegrino: 1986] [Burkhardt: 2008]. Tak dzieje się w przypadku ustalenia wstępnej konfiguracji konstrukcji i minimalizacji pewnych długości cięgien przy stałych długościach pozostałych elementów. Sposób postawienia problemu umożliwi użycie technik komputerowych do rozwiązania zadania.

Z kolei metoda **relaksacji dynamicznej** [Motro: 1984] [Barnes: 1999] [Baudriller: 2006] polega na zadaniu konfiguracji początkowej wraz z obciążeniami, a następnie wykonaniu

obliczeń dynamicznych. Ponieważ siły nie są wstępnie w równowadze, wypadkowe sił wprowadzają węzły i elementy w ruch. Oblicza się energię kinetyczną konstrukcji w czasie, a konfigurację odpowiadającą jej maksimum przyjmuje się do kolejnego kroku obliczeń. Obliczenia kontynuują się iteracyjnie, aż do osiągnięcia stanu równowagi. Metodę stosuje się do poszukiwania formy tensegrity poprzez zmianę długości wybranych elementów, aż do znalezienia stabilnej konfiguracji tensegrity.

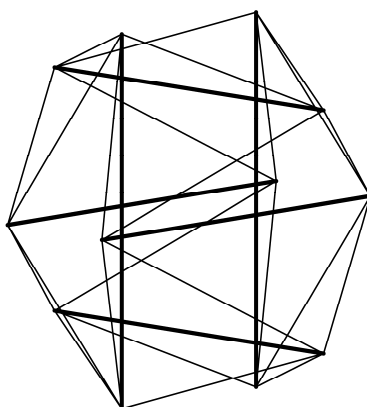
Metody statyczne

Metody statyczne opierają się na istnieniu samonapężenia i równowadze konstrukcji wstępnie sprężonej.

Stacyjne rozwiązanie analityczne polega na znalezieniu takiego układu elementów wstępnie założonej konfiguracji, aby w każdym z węzłów bez działania obciążenia zewnętrznego występowała równowaga sił [Kenner: 1976]. Zakłada się przy tym dodatnie siły normalne w cięgnach i ujemne w zastrzałach. W ten sposób można znaleźć rozwiązanie dla konstrukcji symetrycznych. Podobnie jak kinematyczne rozwiązanie analityczne jest to metoda istotna dla zrozumienia całej grupy metod *form-finding*, jak również specyfiki samych konstrukcji tensegrity.

Jako przykład rozpatrzmy zmodyfikowany rozszerzony ośmiościan foremny tensegrity (rys. 3.3). Modyfikacja polega na zróżnicowaniu odległości między parami równoległych zastrzałów przy zachowaniu symetrii względem trzech płaszczyzn. Geometria konstrukcji będzie określona przez następujące proporcje wymiarów (rys. 3.3 i 3.4):

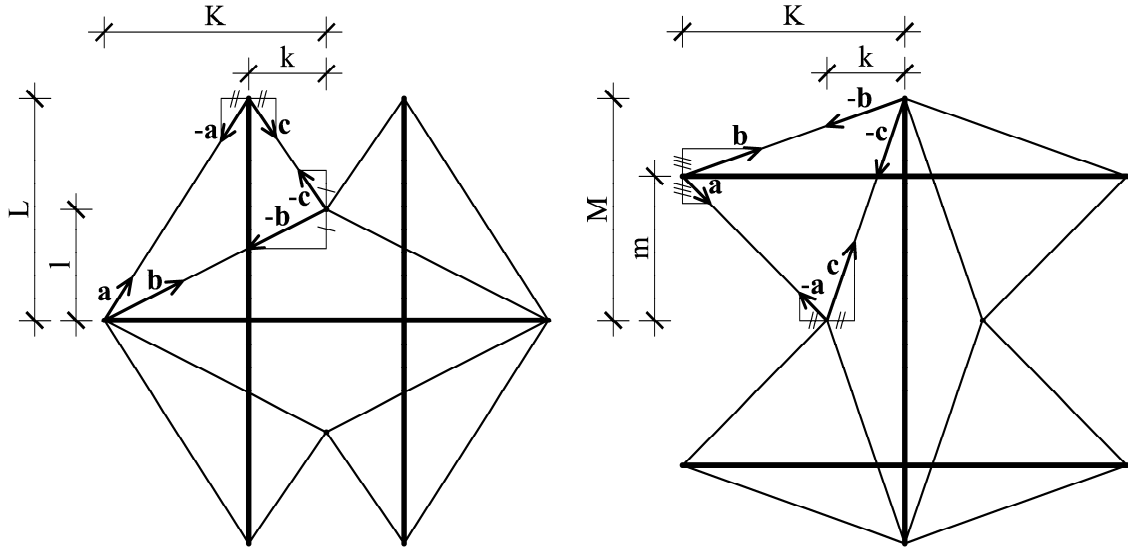
$$\alpha = \frac{k}{K}, \quad \beta = \frac{l}{L}, \quad \gamma = \frac{m}{M}. \quad (3.9)$$



Rys. 3.3 Zmodyfikowany rozszerzony ośmiościan tensegrity

Założmy, że w konstrukcji występuje stan samonapężenia. Siły w węzłach, związane z siłami wewnętrznymi w cięgnach, będą określone przez wektory o następujących składowych (rys. 3.4):

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3], \quad \mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3], \quad \mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]. \quad (3.10)$$



Rys. 3.4 Poszukiwanie formy zmodyfikowanego rozszerzonego ośmiościanu tensegrity (przedstawiono wybrane siły w węzłach, pozostałe siły są symetryczne)

Ze względu na symetrię siły w sąsiednich cięgnach będą analogiczne. A zatem w węzłach występuje 5 sił, z czego dwie pary mają równe wartości. Aby węzeł był w równowadze, wektor będący sumą wektorów sił związanych z siłami wewnętrznymi w cięgnach musi mieć kierunek zgodny z osią zastrzału. Można zatem zapisać zależności między niektórymi składowymi wektorów sił:

$$a_1 = c_1, \quad b_3 = -a_3, \quad b_2 = -c_2, \quad (3.11)$$

jak również związki między składowymi wektorów na podstawie położenia poszczególnych cięgien:

$$a_3 = \frac{m(-a_1)}{K-k}, \quad b_2 = \frac{lb_3}{M-m}, \quad a_1 = \frac{k(-c_2)}{L-l}. \quad (3.12)$$

Wykorzystując równania (3.11) i (3.12), można zapisać:

$$b_2 = \frac{lb_3}{M-m} = \frac{lma_1}{(K-k)(M-m)} = \frac{klmb_2}{(K-k)(L-l)(M-m)}, \quad (3.13)$$

zatem:

$$klm = (K-k)(L-l)(M-m). \quad (3.14)$$

Dzieląc obie strony równania przez iloczyn (KLM) i wykorzystując związki (3.9), otrzymujemy następujący wzór, określający stabilną konfigurację zmodyfikowanego rozsuniętego ośmiościanu tensegrity:

$$\alpha\beta\gamma = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma). \quad (3.15)$$

Wzór ten opisuje całą rodzinę konstrukcji tensegrity opartych na rozsuniętym ośmiościanie tensegrity o sześciu zastrzałach. W podobny sposób można znaleźć konfigurację przy innych

modyfikacjach i rozsunięciach ośmiościanu tensegrity. Warto zauważyć, że przyjmując parametry $\alpha = \beta = \gamma = 0,5$, otrzymuje się konfigurację dwudziestościanu foremego tensegrity.

Tok rozumowania można powtórzyć dla trójzastrzałowej konstrukcji typu *simplex*. Można udowodnić, że jedynie przy wzajemnym kącie obrotu podstaw wynoszącym 150° dwusieczna kąta trójkąta podstawy oraz stykające się w tym samym węźle pionowe ciężno i zastrzał znajdują się w jednej płaszczyźnie. Zatem tylko w takiej konfiguracji siły samonapężenia w tym węźle mogą się równoważyć.

Inną z metod statycznych jest metoda **gęstości siły**⁶ [Schek: 1974] [Linkwitz: 1999] [Masic: 2005] [Tran: 2010, 2011]. Jej głównym założeniem jest linearyzacja równań równowagi w węźle:

$$\sum_j \frac{t_{ij}}{l_{ij}}(x_i - x_j) = f_{ix}, \quad \sum_j \frac{t_{ij}}{l_{ij}}(y_i - y_j) = f_{iy}, \quad \sum_j \frac{t_{ij}}{l_{ij}}(z_i - z_j) = f_{iz}, \quad (3.16)$$

gdzie:

i – numer węzła, w którym rozpatrywana jest równowaga,

j – numery węzłów łączonych z węzłem i przez ciężna i zastrzały,

t_{ij} – siły normalne w elementach,

l_{ij} – długości elementów,

$x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j$ – współrzędne węzłów – składowe wektorów $\mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s$,

f_{ix}, f_{iy}, f_{iz} – składowe obciążeń zewnętrznych w węzłach – składowe wektorów $\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y, \mathbf{f}_z$.

Linearyzacja następuje poprzez wprowadzenie gęstości siły w elementach:

$$q_{ij} = \frac{t_{ij}}{l_{ij}}, \quad (3.17)$$

a następnie formułuje i rozwiązuje się równania równowagi w postaci macierzowej:

$$\mathbf{C}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s = \mathbf{f}_x, \quad \mathbf{C}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_s \mathbf{y}_s = \mathbf{f}_y, \quad \mathbf{C}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_s \mathbf{z}_s = \mathbf{f}_z, \quad (3.18)$$

gdzie:

\mathbf{Q} – macierz diagonalna zawierająca wartości gęstości siły,

\mathbf{C}_s – macierz połączeń węzłowych, gdzie jeśli element k łączy węzły i oraz j , wtedy

$\mathbf{C}_{s(k,i)} = 1, \mathbf{C}_{s(k,j)} = -1$, a pozostałe wyrazy k -tego wiersza przyjmują wartość 0.

⁶ Na podstawie przeglądu literatury można stwierdzić, że jest to często stosowana metoda, dlatego została opisana bardziej szczegółowo niż kolejne metody statyczne.

W konstrukcji tensegrity, w której występuje stan samonapężenia niezależny od obciążeń zewnętrznych, równania równowagi można zapisać w postaci:

$$\mathbf{G}\mathbf{x}_s = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}\mathbf{y}_s = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}\mathbf{z}_s = \mathbf{0}, \quad (3.19)$$

gdzie: $\mathbf{G} = \mathbf{C}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_s$ – macierz gęstości siły.

Największą trudnością metody jest konieczność założenia wartości gęstości siły na początku procesu *form-finding*.

Metoda **energetyczna** [Connelly: 1993] opiera się na przypisaniu naprężonej konstrukcji tensegrity funkcji energii potencjalnej i poszukiwaniu jej minimum. W metodzie **współrzędnych zredukowanych** [Sultan: 1999a, 1999b] wprowadza się współrzędne uogólnione definiujące geometrię konkretnej konstrukcji, a następnie wykonuje się obliczenia symboliczne z użyciem tych współrzędnych. W innej metodzie zaproponowano użycie **równań różnicowych** do opisu zależności między elementami konstrukcji [Micheletti: 2004]. Metoda **algebraiczna** [Masic: 2005] rozszerza metodę gęstości siły, nakładając jawnie ograniczenia dotyczące kształtu konstrukcji i wykorzystując przekształcenia afiniczne konstrukcji.

Inne metody

Wśród innych metod poszukiwania formy tensegrity można wymienić dwie łączące metody kinematyczne i statyczne. Są to metody: **sukcesywnej aproksymacji** [Zhang: 2006], polegająca najpierw na wyznaczeniu układu sił normalnych z warunków równowagi przy nałożeniu częściowych ograniczeń geometrycznych, a później wyznaczeniu współrzędnych wszystkich węzłów; oraz **numeryczna** [Estrada: 2006], w której iteracyjnie wyznacza się stabilną konfigurację na podstawie warunków maksymalizacji rzędu macierzy gęstości siły i minimalizacji długości elementów, bez konieczności podawania szczegółowych danych dotyczących wstępnej geometrii konstrukcji. Zaproponowano również metodę wyznaczania optymalnych konstrukcji, z uwzględnieniem projektowanych obciążeń i parametrów materiałowych, opartą na metodzie **sekwencyjnego programowania kwadratowego** (SQP) [Masic: 2006].

Ponadto do poszukiwania formy tensegrity można użyć **algorytmów genetycznych** [Paul: 2005] [Rieffel: 2009] [Xu: 2010] [Koohestani: 2012] oraz metody **Monte Carlo** [Li: 2010].

W dalszej części pracy zostanie przedstawiona możliwość wykorzystania analizy spektralnej macierzy kratownic w procesie *form-finding* w prostych, symetrycznych przypadkach. Metoda polega na poszukiwaniu takiej konfiguracji prętów, w której pojawiają się zerowe wartości własne macierzy sztywności w ujęciu MES oraz zerowe częstotliwości drgań wła-

nych [Gilewski: 2013c]. Ten sposób poszukiwania formy tensegrity był używany w pozostałej części pracy.

3.2 Mechanika tensegrity

3.2.1 Macierzowe równania mechaniki kratownic

Pod względem mechanicznym konstrukcje tensegrity można zaliczyć do struktur kratowych i opisać za pomocą przedstawionych poniżej wielkości:

\mathbf{q} – wektor przemieszczeń kratownicy niepodpartej – długość M ,

Δ – wektor wydłużeń prętów w kratownicy niepodpartej – długość N ,

\mathbf{S} – wektor sił podłużnych w kratownicy niepodpartej – długość N ,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{L_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{E_N A_N}{L_N} \end{bmatrix} \text{ – macierz sprężystości,}$$

\mathbf{P} – wektor obciążeń węzłowych w kratownicy niepodpartej – długość M .

Relacje między tymi wielkościami można opisać za pomocą następujących równań:

- Związki geometryczne

$$\Delta = \mathbf{B}\mathbf{q}, \quad (3.20)$$

- Związki fizyczne

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\Delta, \quad (3.21)$$

- Równania równowagi

$$\mathbf{B}^T \mathbf{S} = \mathbf{P}, \quad (3.22)$$

gdzie: \mathbf{B} – macierz wydłużeń prętów w kratownicy niepodpartej, pozwalająca wyrazić wydłużenie prętów przez przemieszczenia ich końców.

Po podstawieniu do (3.22) równań (3.21) i (3.20) otrzymuje się układ równań przemieszczeniowych problemu:

$$\mathbf{K}_L \mathbf{q} = \mathbf{P}, \quad (3.23)$$

gdzie: $\mathbf{K}_L = \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}$ – macierz sztywności liniowej konstrukcji.

Z kolei układ równań naprężeniowych problemu najlepiej przedstawić po symetryzacji równań równowagi (3.22) w postaci:

$$\mathbf{DS} = \mathbf{BP}, \quad (3.24)$$

gdzie: $\mathbf{D} = \mathbf{BB}^T$.

Macierz \mathbf{B} można wyznaczyć na podstawie geometrii konstrukcji w sposób bezpośredni, ale w przypadku zadań trójwymiarowych bardziej praktyczne jest wykorzystanie formalizmu metody elementów skończonych. Algorytm wyznaczania macierzy \mathbf{B} w ten sposób jest następujący:

1. Określenie współrzędnych końców i początków prętów.
2. Wyznaczenie długości i kosinusów kierunkowych prętów.
3. Wyznaczenie uogólnionych macierzy Boole'a prętów \mathbf{C}_e ($e=1, \dots, N$) o wymiarach $M \times 2$ – alokacja i transformacja.
4. Wyznaczenie wydłużeń prętów:

$$\Delta_e = \mathbf{b}_e \mathbf{q}; \quad \mathbf{b}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{C}_e; \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Wyznaczenie macierzy \mathbf{B} z macierzy jednowierszowych \mathbf{b}_e ; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \dots \\ \mathbf{b}_N \end{bmatrix}$.

Macierz sztywności liniowej \mathbf{K}_L można wyznaczyć na podstawie wzoru $\mathbf{K}_L = \mathbf{B}^T \mathbf{EB}$ lub wykorzystując formalizm MES (por. [Bathe: 1996] [Zienkiewicz: 2000]) – poprzez agregację macierzy sztywności liniowej pojedynczych elementów skończonych \mathbf{K}_{Le} , przetransformowanych z opisu lokalnego do globalnego za pomocą uogólnionych macierzy Boole'a:

$$\mathbf{K}_{Le} = \frac{E_e A_e}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_{Le} = \{u_1, u_2\}, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{K}_L = \sum_{e=1}^N \mathbf{C}_e^T \mathbf{K}_{Le} \mathbf{C}_e. \quad (3.26)$$

Używając powyższych oznaczeń, warunek statycznej wyznaczalności zgodny ze wzorem Maxwella (3.1) dla trójwymiarowej kratownicy przyjmuje postać:

$$M - N - 6 = 0, \quad (3.27)$$

natomiast uogólniony wzór Maxwella (3.2):

$$M - N - 6 = k - s. \quad (3.28)$$

W przypadku konstrukcji podpartej wektor przemieszczeń węzłowych $\tilde{\mathbf{q}}$ ma mniejszą długość – \tilde{N} . Wtedy równania liniowej mechaniki kratownic przybierają następującą postać:

- Związki geometryczne

$$\Delta = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{q}}, \quad (3.29)$$

- Związki fizyczne

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\Delta, \quad (3.30)$$

- Równania równowagi

$$\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{S} = \tilde{\mathbf{P}}, \quad (3.31)$$

- Układ równań przemieszczeniowych

$$\tilde{\mathbf{K}}_L \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{P}}, \quad (3.32)$$

gdzie: $\tilde{\mathbf{K}}_L = \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{B}}$,

- Układ równań naprężeniowych

$$\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{P}}, \quad (3.33)$$

gdzie: $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^T$,

- Wzór Maxwella

$$M - \tilde{N} = 0, \quad (3.34)$$

- Uogólniony wzór Maxwella

$$M - \tilde{N} = k - s. \quad (3.35)$$

W układzie równań (3.23) (analogicznie w (3.32)), w celu uwzględnienia nieliniowości równań równowagi i wpływu sprzężenia elementów na własności w konstrukcji, wprowadza się macierz sztywności geometrycznej \mathbf{K}_G (lub $\tilde{\mathbf{K}}_G$ z uwzględnieniem przemieszczeniowych warunków brzegowych). Wtedy układ równań przemieszczeniowych problemu przybiera postać:

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}, \quad (3.36)$$

gdzie: $\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G$ – macierz sztywności konstrukcji.

Podobnie w konstrukcji podpartej:

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{P}}, \quad (3.37)$$

gdzie: $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_L + \tilde{\mathbf{K}}_G$.

Globalną macierz \mathbf{K}_G wyznacza się podobnie do \mathbf{K}_L , zgodnie z formalizmem MES, przy wykorzystaniu uogólnionych macierzy Boole'a $\overline{\mathbf{C}}_e$ o wymiarach $M \times 6$ oraz lokalnej macierzy elementu \mathbf{K}_{Ge} :

$$\mathbf{K}_{Ge} = \frac{S_e}{L_e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_{Ge} = \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2\}, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{K}_G = \sum_{e=1}^N \overline{\mathbf{C}}_e^T \mathbf{K}_{Ge} \overline{\mathbf{C}}_e. \quad (3.39)$$

W przypadku macierzy sztywności geometrycznej w przestrzeni trójwymiarowej w każdym węźle rozpatruje się przemieszczenia w trzech kierunkach. W macierzy sztywności liniowej jest to jedynie przemieszczenie wzdłuż osi pręta. W związku z tym, że liczba wierszy w macierzy Boole'a jest dwukrotnością liczby rozpatrywanych przemieszczeń w węźle, macierze \mathbf{C}_e i $\overline{\mathbf{C}}_e$ różnią się wielkością (odpowiednio $M \times 2$ i $M \times 6$).

W niniejszej pracy podejście MES będzie stosowane również w przypadku zagadnień dynamicznych. Układ równań ruchu kratownic w ujęciu dyskretnym z pominięciem tłumienia ma postać:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t), \quad (3.40)$$

gdzie: \mathbf{M} – macierz mas konstrukcji.

Globalną macierz mas otrzymuje się z macierzy mas elementów skończonych (por. [Bathe: 1996]):

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^N \overline{\mathbf{C}}_e^T \mathbf{M}_e \overline{\mathbf{C}}_e. \quad (3.41)$$

Można wykorzystać dwa rodzaje macierzy mas elementów skończonych kratownic: konsekwentną i diagonalną. Mają one następującą postać:

$$\mathbf{M}_e^{konsekwentna} = \frac{\rho_e L_e A_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{M}_e^{diagonalna} = \frac{\rho_e L_e A_e}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

gdzie: ρ_e – gęstość objętościowa materiału elementu.

Stosowanie macierzy diagonalnej służy przyspieszeniu obliczeń numerycznych. Korzystanie z niej odpowiada rozpatrywaniu konstrukcji, której cała masa prętów sprowadzona jest do jej węzłów, co może jednak prowadzić do generowania przybliżeń i błędów.

3.2.2 Analiza macierzy kratownic typu tensegrity

Analiza macierzy kratownic pozwala stwierdzić, czy dana konstrukcja ma cechy tensegrity, a także pozwala na przeprowadzenie procesu *form-finding*. Dzięki analizie wartości i wektorów własnych macierzy sztywności i macierzy $\tilde{\mathbf{D}}$ oraz analizie macierzy wydłużeń możliwe jest identyfikowanie mechanizmów infinytezymalnych i stanów samonapężenia konstrukcji. Podobne efekty można uzyskać dzięki analizie częstości i postaci drgań własnych konstrukcji.

Poniższe rozważania mają na celu sprecyzowanie różnic między strukturą kratową i strukturą tensegrity oraz pokazanie, kiedy kratownica staje się tensegrity.

Analiza spektralna macierzy sztywności liniowej

Rozpatrzmy zagadnienie własne macierzy sztywności liniowej podpartej kratownicy w postaci:

$$(\tilde{\mathbf{K}}_L - \lambda \mathbf{I})\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (3.44)$$

Wartości własne opisują stany energetyczne modułu, zaś wektory własne opisują postaci deformacji. W konstrukcji niepodpartej występują nieujemne wartości własne. Wartości zerowe odpowiadają ruchom sztywnym modułu lub mechanizmom, co jest reprezentowane przez odpowiadające im wektory własne. W konstrukcji poprawnie podpartej (brak mechanizmów skończonych) ewentualnie występujące zerowe wartości własne mogą odpowiadać dodatkowym infinytezymalnym mechanizmom.

Zatem:

- Jeśli kratownica (niebędąca tensegrity) jest poprawnie podparta (brak mechanizmów skończonych), to wszystkie wartości własne są dodatnie.
- W poprawnie podpartej konstrukcji tensegrity jedna lub więcej wartości własnych jest zerowa i odpowiada jej wektor własny realizujący mechanizm infinitezymalny.

Analiza macierzy wydłużeń

- W poprawnie podpartej kratownicy wyznacznik macierzy $\tilde{\mathbf{B}}$ jest niezerowy, co w przypadku konstrukcji statycznie wyznaczalnej pozwala na jednoznaczne rozwiązanie układu równań (3.31) i wyznaczenie sił podłużnych w prętach kratownicy.
- W poprawnie podpartej konstrukcji tensegrity wyznacznik macierzy $\tilde{\mathbf{B}}$ jest zerowy, ze względu na występowanie układu samonapężenia, stanowiącego rozwiązanie jednorodnego układu równań $\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{S} = \mathbf{0}$. Układ sił podłużnych związany z samonapężeniem można wyznaczyć analogicznie jak przy wyznaczeniu wektorów własnych, to jest przyjmując wartość jednej z sił i określając w zależności od niej wartości pozostałych sił.

Analiza spektralna macierzy $\tilde{\mathbf{D}}$

Rozpatrzmy zagadnienie własne macierzy $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^T$ podpartej kratownicy w postaci:

$$(\tilde{\mathbf{D}} - \eta \mathbf{I})\mathbf{S} = \mathbf{0}. \quad (3.45)$$

- W poprawnie podpartej kratownicy wartości własne macierzy $\tilde{\mathbf{D}}$ są dodatnie.
- W poprawnie podpartej konstrukcji tensegrity jedna lub więcej wartości własnych jest zerowa i odpowiada jej wektor własny realizujący stan samonapężenia.

Analiza spektralna macierzy sztywności z uwzględnieniem macierzy geometrycznej

Dzięki wyznaczeniu stanu samonapężenia możliwe jest zbudowanie macierzy sztywności geometrycznej $\tilde{\mathbf{K}}_G$ związanej z tym stanem. Rozpatrzmy zagadnienie własne macierzy sztywności z uwzględnieniem macierzy geometrycznej:

$$(\tilde{\mathbf{K}}_L + \tilde{\mathbf{K}}_G - \lambda \mathbf{I})\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (3.46)$$

- W poprawnie podpartej konstrukcji tensegrity sprężonej niezerowym stanem samonapężenia wszystkie wartości własne macierzy sztywności $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_L + \tilde{\mathbf{K}}_G$ są dodatnie, co oznacza możliwość odwrócenia macierzy. Stan samonapężenia likwiduje osobliwość macierzy zadania tensegrity, czyli likwiduje mechanizm infinitezymalny.

Analiza drgań własnych konstrukcji

Większość programów komputerowych do obliczeń numerycznych konstrukcji budowlanych za pomocą metody elementów skończonych umożliwia obliczenie częstotliwości i postaci drgań własnych modelowanej konstrukcji. Poniższe rozważania mają na celu opracowanie narzędzi analizy konstrukcji tensegrity za pomocą takiego oprogramowania.

Rozpatrzmy uogólnione zagadnienie własne będące postacią zadania nietłumionych drgań swobodnych:

$$\left(\tilde{\mathbf{K}}_L + \tilde{\mathbf{K}}_G - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}\right) \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (3.47)$$

- W poprawnie podpartej kratownicy wszystkie częstotliwości drgań własnych są dodatnie.
- W poprawnie podpartej konstrukcji tensegrity przy $\tilde{\mathbf{K}}_G \neq \mathbf{0}$ jedna lub więcej częstotliwości drgań własnych jest zerowa i odpowiada jej postać drgań własnych realizująca mechanizm infinitezymalny.
- W poprawnie podpartej konstrukcji tensegrity sprężonej niezerowym stanem samonapężenia $\tilde{\mathbf{K}}_G \neq \mathbf{0}$ wszystkie częstotliwości drgań własnych są dodatnie.

Dzięki analizie z wykorzystaniem macierzy sztywności geometrycznej możliwe jest rozróżnienie mechanizmów infinitezymalnych, które są likwidowane przez stan samonapężenia, od mechanizmów skończonych, nielikwidowanych przez ten stan. Oba przypadki odróżnia wpływ macierzy geometrycznej na zerowe wartości własne macierzy sztywności i częstotliwości drgań własnych.

Zastosowanie w poszukiwaniu formy tensegrity

Analiza macierzy kratownic może być narzędziem poszukiwania formy tensegrity. W przypadku nieskomplikowanych konstrukcji można sparametryzować wielkości geometryczne wstępnie przyjętej konfiguracji prętów. Pozwala to na znalezienie układu prętów, w którym pojawia się mechanizm infinitezymalny.

Algorytm poszukiwania formy tensegrity metodą analizy macierzy kratownic składa się z sześciu kroków:

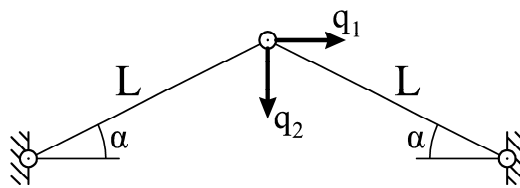
1. Określenie współrzędnych końców i początków prętów uzależnionych od wybranego parametru, we wstępnie przyjętej konfiguracji.
2. Wyznaczenie macierzy sztywności liniowej konstrukcji $\tilde{\mathbf{K}}_L$ i jej wartości własnych.
3. Iteracyjna zmiana parametru, aż do pojawienia się zerowej wartości własnej macierzy $\tilde{\mathbf{K}}_L$.

4. Wyznaczenie macierzy $\tilde{\mathbf{D}}$ i jej wektora własnego, odpowiadającego zerowej wartości własnej macierzy – wektora samonapężenia.
5. Wyznaczenie macierzy sztywności geometrycznej $\tilde{\mathbf{K}}_G$ z uwzględnieniem stanu samonapężenia.
6. Sprawdzenie na podstawie wartości własnych macierzy sztywności konstrukcji $\tilde{\mathbf{K}}$, czy samonapężenie likwiduje mechanizm – czy jest infinitesimalny.

Podobny algorytm można zastosować w przypadku konstrukcji niepodpartej, z tym że w rozwiązaniach problemów własnych pojawią się dodatkowe zerowe wartości związane z ruchami sztywnymi (mechanizmami skończonymi) konstrukcji.

Przykład analizy – dwa pręty na płaszczyźnie

Prosty przykład płaskiego układu prętowego posłuży do zobrazowania rozważań na temat analizy macierzy kratownic typu tensegrity. Dana jest konstrukcja złożona z dwóch prętów jak na rysunku 3.5. Położenie środkowego węzła będzie uzależnione od parametru α będącego kątem nachylenia prętów. Załóżmy, że $\alpha \in [0, \pi/2]$.



Rys. 3.5 Kratownica złożona z dwóch prętów

Budowa macierzy sztywności liniowej, przy zastosowaniu formalizmu MES:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x_1}{L_1} & \frac{y_2 - y_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_2 - x_1}{L_1} & \frac{y_2 - y_1}{L_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & s & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \quad \text{gdzie: } \begin{matrix} c = \cos \alpha \\ s = \sin \alpha \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_L = \sum_{e=1}^N \mathbf{C}_e^T \mathbf{K}_{Le} \mathbf{C}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2c^2 & 0 & -c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ 0 & 2s^2 & cs & -s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & cs & c^2 & cs & 0 & 0 \\ cs & -s^2 & cs & s^2 & 0 & 0 \\ -c^2 & -cs & 0 & 0 & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & 0 & 0 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_L = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2c^2 & 0 \\ 0 & 2s^2 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Wartości własne macierzy sztywności liniowej (3.48), otrzymane na podstawie wzoru (3.44), uzależnione od parametru α wynoszą:

$$\lambda_1 = \frac{2EA}{L} \cos^2 \alpha, \quad \lambda_2 = \frac{2EA}{L} \sin^2 \alpha. \quad (3.49)$$

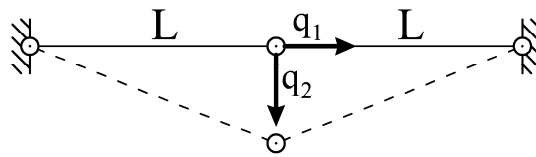
Podobnie otrzymuje się macierz sztywności geometrycznej. Należy jednak pamiętać, że taką macierz, odpowiadającą stanowi samonapężenia, można skonstruować jedynie, jeśli ten stan istnieje. Macierz geometryczna uzyskana na podstawie wzoru (3.39) ma postać:

$$\tilde{\mathbf{K}}_G = \frac{S_1 + S_2}{L} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & c^2 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Aby jedna z wartości własnych (3.49) osiągnęła wartość zero, kąt α musi wynosić 0 lub $\pi/2$.

Przypadek 1 (rys. 3.6)

$$\alpha = 0, \quad \lambda_1 = 2 \frac{EA}{L}, \quad \lambda_2 = 0$$



Rys. 3.6 Kratownica złożona z dwóch prętów: Przypadek 1

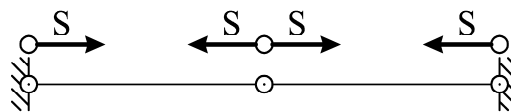
Budowa i analiza macierzy $\tilde{\mathbf{D}}$:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\tilde{\mathbf{D}} - \eta \mathbf{I})\mathbf{S} = \mathbf{0}$$

$$\eta_1 = 0; \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \eta_2 = 2; \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pierwszy wektor własny macierzy odpowiada zerowej wartości własnej, opisuje zatem stan samonapężenia konstrukcji, w którym w obu prętach wystąpią równe sobie siły normalne (rys. 3.7).



Rys. 3.7 Kratownica złożona z dwóch prętów: Przypadek 1 – stan samonapężenia

Uwzględnienie macierzy sztywności geometrycznej (3.50) prowadzi do otrzymania następujących wartości własnych macierzy sztywności:

$$\lambda_1 = 2 \frac{EA}{L}, \quad \lambda_2 = \frac{2S}{L}, \quad \text{gdzie } S \text{ jest siłą normalną w prętach.}$$

Można zatem stwierdzić, że wprowadzenie do konstrukcji sił związanych ze stanem samonapężenia likwiduje mechanizm, a więc jest on infinitezymalny. W takim przypadku macierz sztywności staje się odwracalna i można rozwiązać układ równań (3.37). Postać mechanizmu przedstawiono linią przerywaną na rysunku 3.6.

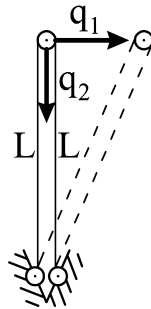
Przypadek 2

$$\alpha \in (0, \pi/2), \quad \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0$$

Nie ma mechanizmu infinitezymalnego i niemożliwy jest stan samonapężenia.

Przypadek 3 (rys. 3.8)

$$\alpha = \pi/2, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2 \frac{EA}{L}$$



Rys. 3.8 Kratownica złożona z dwóch prętów: Przypadek 3

Budowa i analiza macierzy $\tilde{\mathbf{D}}$:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

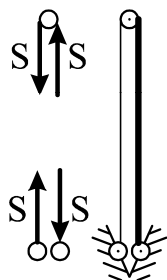
$$(\tilde{\mathbf{D}} - \eta \mathbf{I})\mathbf{s} = \mathbf{0}$$

$$\eta_1 = 0; \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\eta_2 = 2; \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zatem w takiej konstrukcji występuje stan samonapężenia (rys. 3.9). Można jednak udowodnić, że nie likwiduje on mechanizmu, ponieważ wprowadzenie macierzy sztywności geometrycznej nie zmienia wartości własnych macierzy sztywności konstrukcji. Stan samonapężenia, w którym $S_1 = -S_2$ powoduje, że $\tilde{\mathbf{K}}_G = \mathbf{0}$ (por. wzór 3.50). Występujący w kon-

strukcji mechanizm nie jest zatem infitezymalny, a konstrukcja nie ma cech tensegrity. Postać mechanizmu przedstawiono linią przerywaną na rysunku 3.8.



Rys. 3.9 Kratownica złożona z dwóch prętów: Przypadek 3 – stan samonapężenia

Te same wyniki można uzyskać, analizując drgania własne konstrukcji. Macierz mas w ogólnym przypadku ma postać:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{\rho LA}{3} \begin{bmatrix} 2c^2 + 2s^2 & 0 \\ 0 & 2c^2 + 2s^2 \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Rozwiązując równanie (3.47), w przypadku $\alpha = 0$, otrzymuje się następujące częstotliwości drgań własnych:

$$\omega_1^2 = \frac{3E}{\rho L^2}, \quad \omega_2^2 = \frac{3S}{\rho AL^2}.$$

Zatem jedna z nich jest zerowa w przypadku braku sił samonapężenia – odpowiada mechanizmowi infitezymalnemu. W przypadku $\alpha = \pi/2$ jedna z częstotliwości drgań własnych jest zerowa niezależnie od stanu samonapężenia – odpowiada mechanizmowi skończonemu.

Rozdział 4

Analiza wybranych modułów tensegrity

4.1 Wybór i opis modułów

Istnieją dziesiątki opisanych w literaturze modułów i konstrukcji tensegrity. Spośród nich wybrano cztery, ze względu na ich podstawową rolę w zastosowaniach inżynierskich. Przedstawiony opis oraz wyniki i metody badań mogą być uogólnione i służyć charakteryzowaniu całej rodziny konstrukcji tensegrity.

Obliczenia przeprowadzono dla modułów o konkretnych wymiarach. Aby wielkości były porównywalne, przedstawiono moduły wpisujące się w sferę o promieniu 1 m. Dla wszystkich modułów przeprowadzono proces poszukiwania formy tensegrity i znaleziono stan samonapężenia.

4.1.1 Graniastosłup prawidłowy tensegrity (*simplex*)

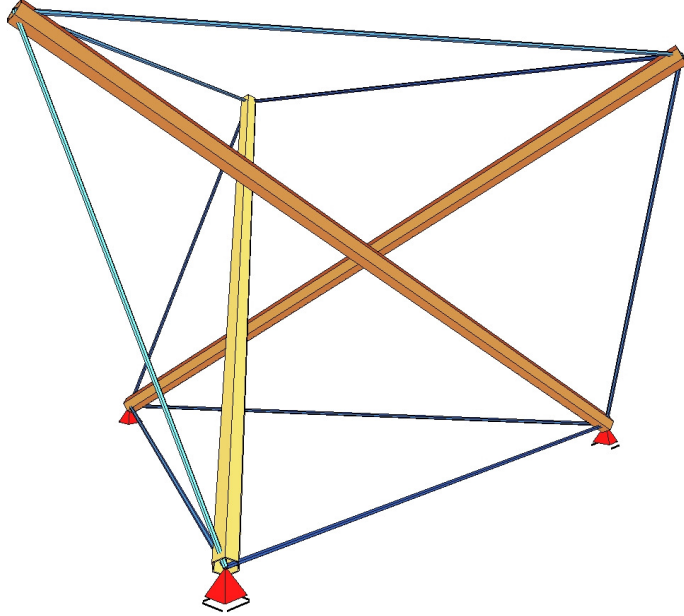
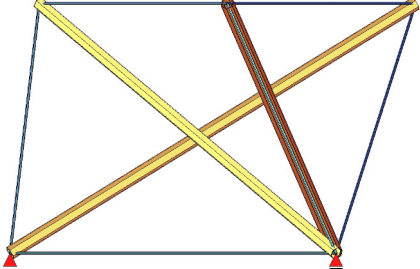
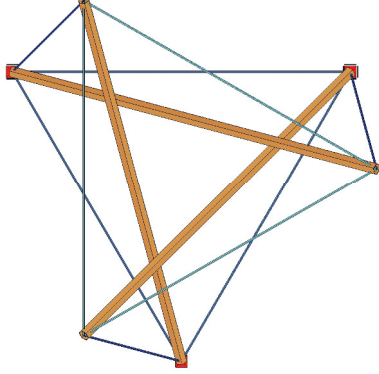
Jest to najbardziej znany z modułów tensegrity. Wersja o podstawie trójkątnej – moduł trójzastrzałowy – jest najprostszą pod względem liczby prętów konstrukcją tensegrity. Moduł ma kształt, który umożliwia wpisanie go w walec – z wyraźnie zaznaczoną osią, przez co wyodrębniony jest kierunek pionowy struktury. Z tego powodu *simplex* wykorzystywany jest w konstrukcjach obciążonych osiowo. Moduł ma strukturę o wzorze rombowym.

Przeprowadzono proces poszukiwania formy tensegrity za pomocą metody analizy spektralnej macierzy kratownic. Parametrem w metodzie był względny kąt obrotu podstaw, podobnie jak w obliczeniach metodą kinematyczną przedstawionych w rozdziale 3.1.2. Uzyskano to samo rozwiązanie (3.8). Parametry modułu przedstawiono w tabeli 4.1.

Można udowodnić [Kenner: 1976], że wzajemny kąt obrotu podstaw modułów typu *simplex* o n zastrzałach (modułów powstałych z graniastosłupów o podstawie z wielokątów foremnych o n kątach) wynosi:

$$\theta = \frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{n}. \quad (4.1)$$

Tab. 4.1 Graniastosłup prawidłowy tensegrity – parametry modułu

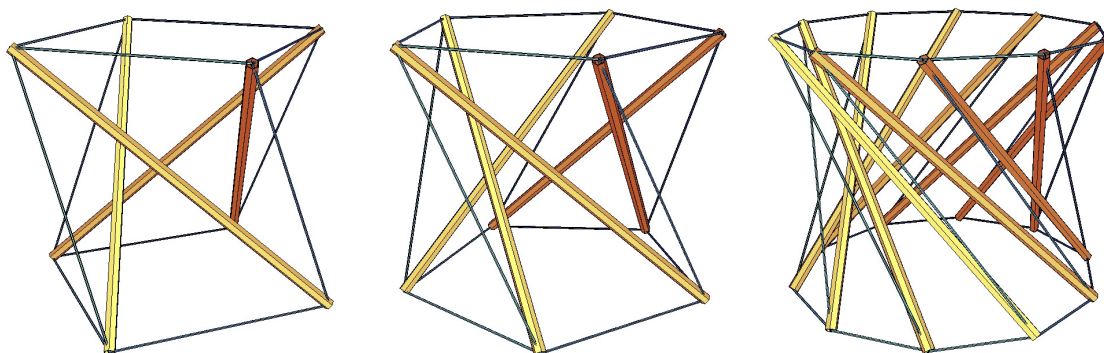
GRANIASTOSŁUP PRAWIDŁOWY TENSEGRITY (SIMPLEX)									
									
									
Liczba zastrzałów		3		Liczba mechanizmów nieskończonych			1		
Liczba cięgien		9		Liczba stanów samonapężenia			1		
Numer węzła	Współrzędne [m]			Numery elementów i węzłów przez nie łączonych					
	x	y	z						
1	0,000	-0,866	-0,500	Cięgna					
2	-0,750	-0,433	-0,500	1	2-1	4	5-4	10	4-2
3	0,750	-0,433	-0,500	2	3-2	5	6-5	11	5-3
4	-0,433	-0,750	0,500	3	1-3	6	4-6	12	6-1
5	0,866	0,000	0,500	Zastrzały					
6	-0,433	0,750	0,500	7	4-1	8	5-2	9	6-3

W konstrukcji zidentyfikowano jeden stan samonapężenia o następujących względnych wielkościach sił:

Tab. 4.2 *Simplex* – stany samonapężenia konstrukcji

Numery elementów	1÷6	7÷9	10÷11
Siła normalna	1,00000	-2,25064	1,26542

Oprócz konstrukcji opisanej w tabeli 4.1 istnieją tensegrity oparte na graniastosłupach prawidłowych o dowolnej liczbie zastrzałów – zgodnie ze wzorem (4.1) (rys. 4.1). Szczególnie istotny jest tutaj moduł czterozastrzałowy, który ze względu na swoją geometrię może być łatwo powielany i łączony. Możliwe jest również tworzenie modułów wpisujących się w ściany stożek – o różnej wielkości podstaw (por. rys. 2.21).

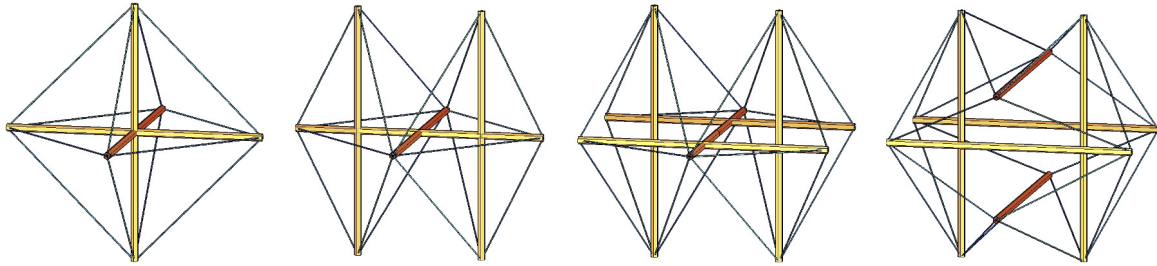


Rys. 4.1 Graniastosłupy prawidłowe tensegrity o różnej liczbie zastrzałów

4.1.2 Rozszerzony ośmiościan tensegrity

Moduł jest wyjątkowy ze względu na prostopadłe położenie zastrzałów. Z tego powodu na jego przykładzie można przedstawić tensegrity jako konstrukcję, w której cięgna rozpięte są przez elementy ściskane. Prostopadłość zastrzałów sprawia, że moduł w sposób naturalny i stosunkowo łatwy można zastosować w konstrukcjach inżynierskich. Moduł ma strukturę o wzorze rombowym.

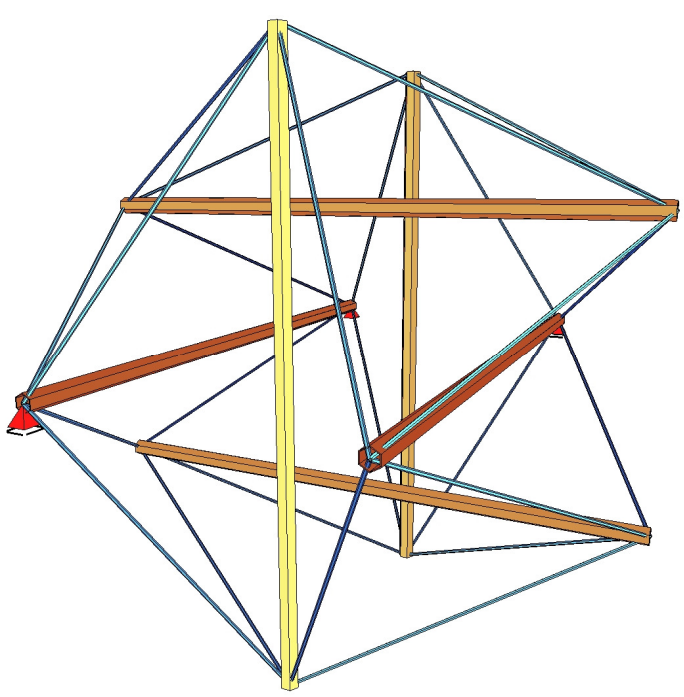
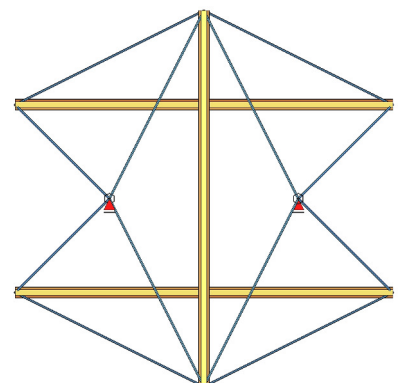
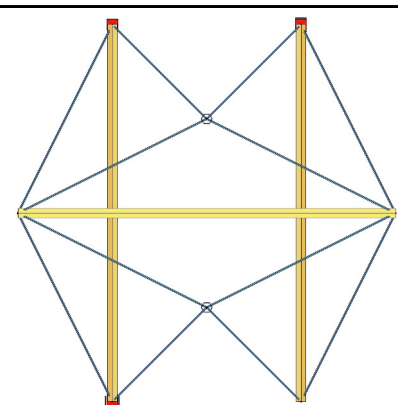
Moduł można uzyskać na podstawie ośmiościanu foremego, w którym na przekątnych znajdują się zastrzały (rys. 4.2). Taka konstrukcja nie jest tensegrity, chociaż posiada stan samonapężenia. Rozszerzony ośmiościan tensegrity (ang. *expanded octahedron*) otrzymuje się, powielając i rozsuwając każdy z zastrzałów na przekątnych ośmiościanu wraz ze stykającymi się z nimi cięgnami (rys. 4.2). Wielkość rozsunęcia zastrzałów może być parametrem poszukiwania formy tensegrity, tak jak w przypadku użycia statycznej metody analitycznej, przedstawionej w rozdziale 3.2.1.



Rys. 4.2 Proces „rozszerzania” ośmiościanu

Proces poszukiwania formy przeprowadzono również metodą analizy spektralnej macierzy kratownic. W tym przypadku parametrem metody jest jedna z wartości α , β , γ wg wzoru (3.9), przy założeniu wartości dwóch pozostałych. W przypadku przyjęcia $\alpha = \beta = 0,5$ otrzymano wynik $\gamma = 0,5$, co jest zgodne z rozwiązaniem (3.15). Taka konstrukcja, zwana dwudziestociągiem foremnym tensegrity, będzie przedmiotem rozważań w niniejszym rozdziale. Parametry modułu przedstawiono w tabeli 4.3.

Tab. 4.3 Rozszerzony ośmiościan tensegrity – parametry modułu

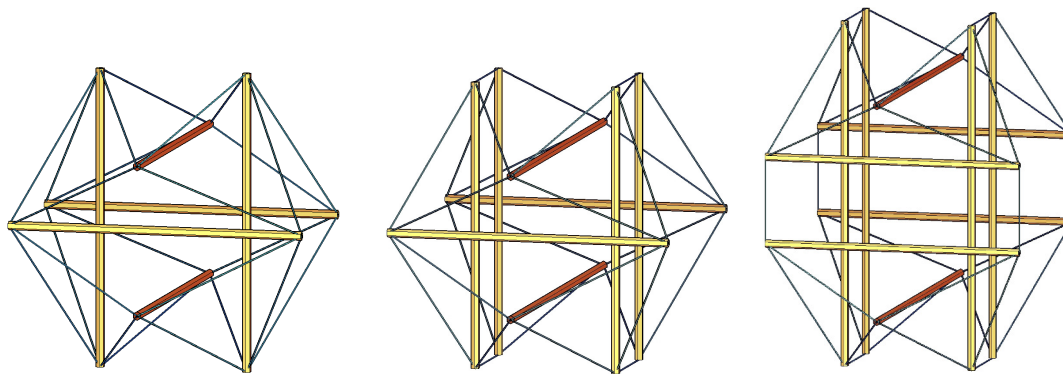
ROZSZERZONY OŚMIOŚCIAN (DWUDZIESTOŚCIAN) TENSEGRITY									
									
									
Liczba zastrzałów			6		Liczba mechanizmów nieskończonych			1	
Liczba cięgien			24		Liczba stanów samonapężenia			1	
Numer węzła	Współrzędne [m]			Numery elementów i węzłów przez nie łączonych					
	x	y	z						
1	-0,447	-0,894	0,000	Cięgna					
2	0,447	-0,894	0,000	7	7-1	15	8-4	23	9-5
3	-0,447	0,894	0,000	8	7-2	16	8-3	24	11-5
4	0,447	0,894	0,000	9	10-1	17	6-4	25	9-6
5	0,000	-0,447	-0,894	10	12-2	18	6-3	26	11-6
6	0,000	0,447	-0,894	11	9-1	19	11-4	27	10-7
7	0,000	-0,447	0,894	12	11-2	20	9-3	28	12-7
8	0,000	0,447	0,894	13	5-1	21	12-4	29	10-8
9	-0,894	0,000	-0,447	14	5-2	22	10-3	30	12-8
10	-0,894	0,000	0,447	Zastrzały					
11	0,894	0,000	-0,447	1	3-1	3	7-5	5	11-9
12	0,894	0,000	0,447	2	4-2	4	8-6	6	12-10

W konstrukcji zidentyfikowano jeden stan samonapężenia o następujących względnych wielkościach sił:

Tab. 4.4 Dwudziestościan tensegrity – stany samonapężenia konstrukcji

Numery elementów	1÷6	7÷30
Siła normalna	-4,77330	1,00000

Istnieje cała rodzina konstrukcji opisywanych jako rozsunęty ośmiościan tensegrity. Po pierwsze możliwe jest powielanie i rozsuwanie kolejnych prętów (rys. 4.3). Tworzone w ten sposób konstrukcje mają większą liczbę mechanizmów infinitezimalnych oraz zachowują rozwiązanie problemu poszukiwania formy (3.14) przy przyjęciu wielkości geometrycznych we wzorze (3.9) jako mierzonych od ponownie rozsuniętych zastrzałów, a nie od osi symetrii. Po drugie możliwe jest tworzenie konstrukcji bez zachowania płaszczyzn symetrii oraz powielanie i rozsuwanie pojedynczych zastrzałów. Poszukiwanie formy tensegrity w niesymetrycznych konstrukcjach również można przeprowadzić metodą analizy spektralnej macierzy kratownic. Na przykład, aby podnosząc poziome zastrzały nr 1 i 2 o 0,100 m, uzyskać stabilną konfigurację tensegrity, można zmienić położenie jednego z pozostałych prętów. Jeśli byłby to pręt nr 6, to analiza wskazuje na konieczność jego podniesienia o 0,02149 m.



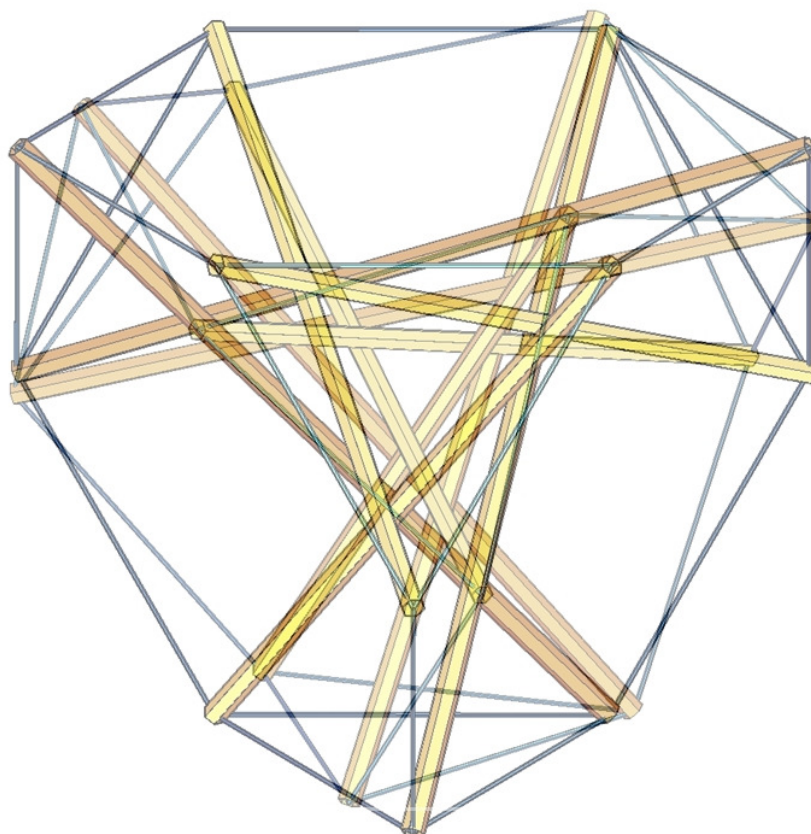
Rys. 4.3 Dalsze „rozsuwanie” ośmiościanu tensegrity

4.1.3 Czworoscian ścięty tensegrity

Jest to moduł będący najprostszym (pod względem liczby elementów) przykładem konstrukcji opartej na ściętej bryle platońskiej (regularnej). Takie konstrukcje tworzone są na bazie struktury zygzakowanej poprzez połączenie węzłów powstałych wskutek ścięcia wierzchołków bryły. W tym przypadku ściętą bryłą jest czworoscian. Jeśli w tak utworzonej bryle wszystkie krawędzie są sobie równe, a zależy to od wielkości ścięcia wierzchołków, to można mówić o bryle będącej wielościanem półregularnym (zwanym wielościanem archimedeso-

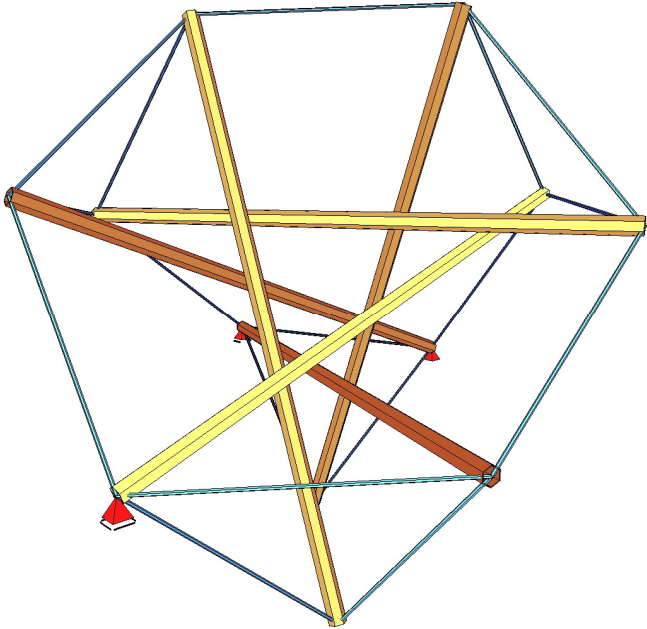
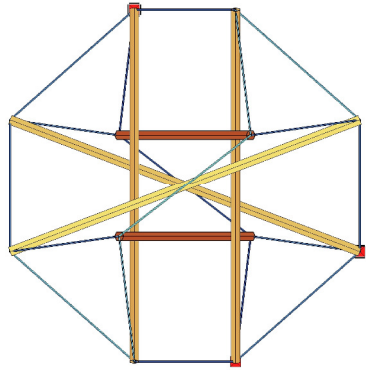
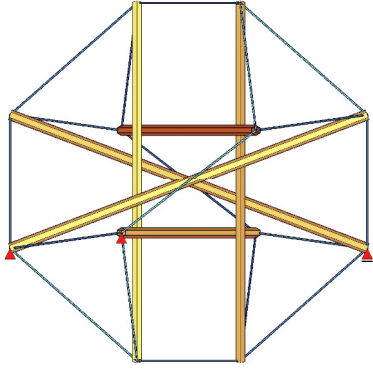
wym). W tym przypadku jest to czworościan ścięty (ang. *truncated tetrahedron*) półforemny. Struktura zygzakowana oparta wprost na ściętej bryle platońskiej nie jest jednakże konstrukcją tensegrity.

W celu znalezienia formy tensegrity konstrukcji czworościanu ściętego przeprowadzono proces analizy spektralnej macierzy kratownic. Parametrem metody jest kąt obrotu trójkątów powstałych na skutek ścięcia wierzchołków bryły. Obrót następuje względem osi łączącej środek sfery, w którą wpisana jest konstrukcja ze środkami okręgów, w które wpisane są trójkąty (rys. 4.4). Kąt ten jest jednakowy dla wszystkich czterech trójkątów. Ze względu na założenie o wpisaniu konstrukcji w sferę o określonym promieniu i założenie równej długości wszystkich krawędzi (ciągien), wraz z obrotem trójkątów zmienia się długość wszystkich elementów. Wynikiem analizy jest kąt obrotu wynoszący: $\theta = 0,1127484 = 0,03588895 \pi$. Parametry modułu przedstawiono w tabeli 4.5.



Rys. 4.4 Obrót trójkątów z ciągien – poszukiwanie formy ściętego czworościanu tensegrity

Tab. 4.5 Czworoscian ścięty tensegrity – parametry modułu

CZWOROSCIAN ŚCIĘTY TENSEGRITY									
									
									
Liczba zastrzałów		6		Liczba mechanizmów infinitesimalnych		7			
Liczba cięgien		18		Liczba stanów samonapężenia		1			
Numer węzła	Współrzędne [m]			Numery elementów i węzłów przez nie łączonych					
	x	y	z						
1	0,340	0,261	0,903	Cięgna					
2	0,261	0,903	0,340	1	2-1	7	8-7	13	4-1
3	0,903	0,340	0,261	2	3-2	8	9-8	14	9-2
4	-0,340	-0,261	0,903	3	1-3	9	7-9	15	10-3
5	-0,261	-0,903	0,340	4	5-4	10	11-10	16	12-5
6	-0,903	-0,340	0,261	5	6-5	11	12-11	17	7-6
7	-0,903	0,340	-0,261	6	4-6	12	10-12	18	11-8
8	-0,340	0,261	-0,903	Zastrzały					
9	-0,261	0,903	-0,340	19	8-1	21	6-3	23	9-5
10	0,903	-0,340	-0,261	20	12-2	22	11-4	24	10-7
11	0,340	-0,261	-0,903						
12	0,261	-0,903	-0,340						

W konstrukcji zidentyfikowano jeden stan samonapężenia o następujących względnych wielkościach sił:

Tab. 4.6 Czwořościan ścięty tensegrity – stany samonapężenia konstrukcji

Numery elementów	1÷12	13÷18	19÷24
Siła normalna	1,00000	1,37942	-1,50152

W konstrukcji występuje siedem mechanizmów infinitesimalnych. W dalszej części pracy przedstawiony zostanie wpływ stanu samonapężenia na usztywnienie każdego z tych mechanizmów.

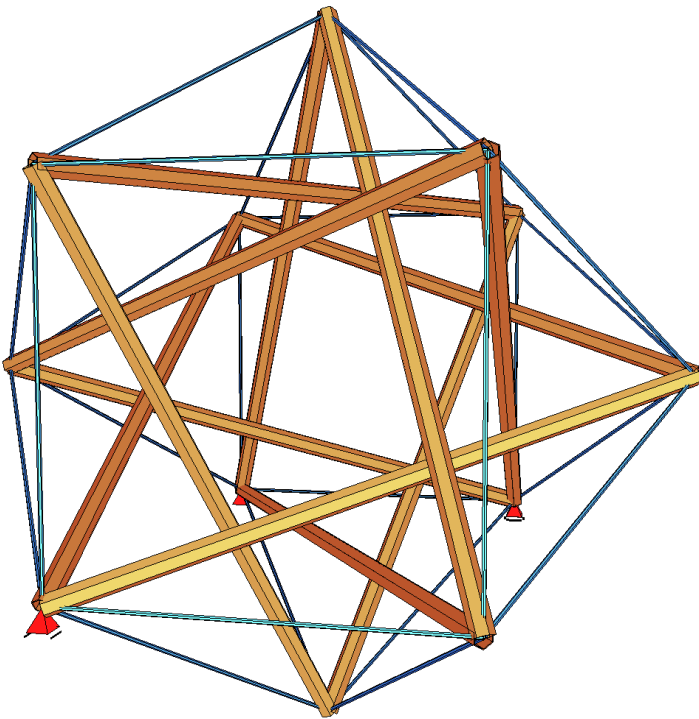
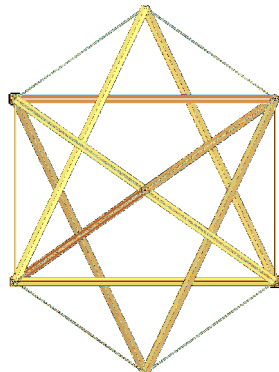
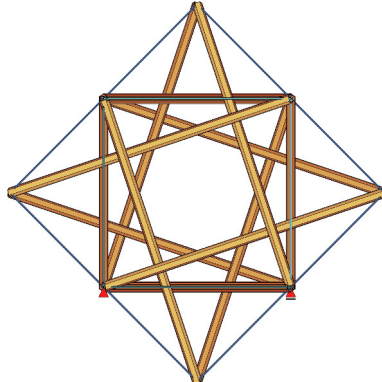
4.1.4 Sześćcio-ośmiościan tensegrity

Konstrukcja oparta jest na sześćcio-ośmiościanie (ang. *cuboctahedron*), będącym bryłą archimedesową. Moduł ma strukturę o wzorze obwodowym, w związku z czym elementy ściskane mają wspólne węzły. W każdym z wierzchołków bryły stykają się po cztery cięgna i po dwa zastrzały. Mimo to konstrukcja spełnia warunek nieciągłości elementów ściskanych (N+), ponieważ zastrzały tworzą cztery niestykające się trójkąty połączone wyłącznie z elementami rozciąganymi.

Ze względu na położenie zastrzałów i cięgien wewnątrz modułu, wokół prostopadłych osi przechodzących przez środek konstrukcji, tworzy się przestrzeń wolna od elementów konstrukcji. Dlatego tego typu konstrukcje nazywane są modułami pierścieniowymi [Motro: 2009]. Ten fakt może być wykorzystany przy projektowaniu obiektów mostowych z jazdą pośrednią.

Dzięki analizie spektralnej macierzy kratownic stwierdzono, że konstrukcja o takiej geometrii spełnia wymogi konstrukcji tensegrity. Parametry modułu przedstawiono w tabeli 4.7. Stwierdzono również, że wszystkie cechy tensegrity zachowuje konstrukcja wydłużona – w przypadku symetrycznego rozsunęcia wszystkich węzłów względem płaszczyzny przechodzącej przez środek konstrukcji (przez 4 środkowe węzły).

Tab. 4.7 Sześćcio-ośmiościan tensegrity – parametry modułu

SZEŚCIO-OŚMIOŚCIAN TENSEGRITY									
									
									
Liczba zastrzałów		12		Liczba mechanizmów infinitesimalnych		1			
Liczba cięgien		24		Liczba stanów samonapężenia		7			
Numer węzła	Współrzędne [m]			Numery elementów i węzłów przez nie łączonych					
	x	y	z						
1	-0,707	0,500	0,500	Cięgna					
2	-0,707	0,500	-0,500	1	2-1	9	5-2	29	10-5
3	-0,707	-0,500	-0,500	2	3-2	10	6-3	30	11-6
4	-0,707	-0,500	0,500	3	4-3	11	7-4	31	12-7
5	0,000	1,000	0,000	4	1-4	12	8-1	32	9-8
6	0,000	0,000	-1,000	5	5-1	25	9-5	33	10-9
7	0,000	-1,000	0,000	6	6-2	26	10-6	34	11-10
8	0,000	0,000	1,000	7	7-3	27	11-7	35	12-11
9	0,707	0,500	0,500	8	8-4	28	12-8	36	9-12
10	0,707	0,500	-0,500	Zastrzały					
11	0,707	-0,500	-0,500	13	9-2	17	6-1	21	9-7
12	0,707	-0,500	0,500	14	10-3	18	7-2	22	10-8
				15	11-4	19	8-3	23	11-5
				16	12-1	20	5-4	24	12-6

W konstrukcji zidentyfikowano siedem stanów samonapężenia o następujących względnych wielkościach sił:

Tab. 4.8 Dwudziestościan tensegrity – stany samonapężenia konstrukcji

Numery elementów	Siła normalna w kolejnych stanach samonapężenia							SUMA
	S-1	S-2	S-3	S-4	S-5	S-6	S-7	
1	-1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
2	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
3	0,0000	0,0000	-1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
4	0,0000	-1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
5	0,0000	-1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
6	-1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
7	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
8	0,0000	0,0000	-1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	-1,0000	1,0000	1,0000
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000
13	0,5774	0,0000	0,0000	-0,5774	-1,1547	1,1547	-1,1547	-1,1547
14	0,0000	0,0000	-0,5774	0,5774	0,0000	0,0000	-1,1547	-1,1547
15	0,0000	-0,5774	0,5774	0,0000	0,0000	-1,1547	0,0000	-1,1547
16	-0,5774	0,5774	0,0000	0,0000	-1,1547	0,0000	0,0000	-1,1547
17	1,1547	0,5774	0,0000	0,0000	-1,1547	0,0000	-1,7321	-1,1547
18	0,5774	0,0000	0,0000	1,1547	-1,1547	-0,5774	-1,1547	-1,1547
19	0,0000	0,0000	1,1547	0,5774	-1,7321	0,0000	-1,1547	-1,1547
20	0,0000	1,1547	0,5774	0,0000	-1,7321	0,5774	-1,7321	-1,1547
21	-1,1547	0,0000	0,0000	-0,5774	0,5774	-0,5774	0,5774	-1,1547
22	0,0000	0,0000	-0,5774	-1,1547	0,0000	0,0000	0,5774	-1,1547
23	0,0000	-0,5774	-1,1547	0,0000	0,0000	0,5774	0,0000	-1,1547
24	-0,5774	-1,1547	0,0000	0,0000	0,5774	0,0000	0,0000	-1,1547
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	-1,0000	1,0000	1,0000
26	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000
27	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000
28	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000
29	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
30	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
31	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
32	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
33	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
34	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
35	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
36	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000

W trzech opisanych wcześniej modułach występuje tylko jeden stan samonapężenia, a znak sił normalnych we wszystkich cięgnach jest przeciwny do znaku sił w zastrzałach. W związku z tym możliwe jest sprężenie konstrukcji siłami zgodnymi z przeznaczeniem elementów – dodatnimi siłami w cięgnach i ujemnymi w zastrzałach. Sześćo-ośmiościan tensegrity posiada aż siedem takich stanów i we wszystkich z nich w elementach danego typu występują siły obu znaków. Dopiero suma stanów samonapężenia umożliwia właściwe sprężenie konstrukcji. W przypadku rzeczywistej konstrukcji przy jednym stanie samonapężenia do sprężenia całej konstrukcji wystarczy skrócenie jednego cięgna lub wydłużenie jednego zastrzału. Przy konieczności wprowadzenia sumy stanów samonapężenia proces ten będzie odpowiednio bardziej skomplikowany.

4.2 Wpływ sprężenia na własności statyczne modułów

W celu zbadania wpływu wstępnego sprężenia konstrukcji na własności statyczne modułów zamodelowano moduły tensegrity i przeprowadzono obliczenia odpowiedzi konstrukcji na działanie obciążeń statycznych. Obliczenia wykonano za pomocą programu do obliczeń symbolicznych Mathematica przy zastosowaniu metody elementów skończonych, zgodnie z algorytmem opisanym w rozdziale 3.2⁷. Dodatkowo wykonano obliczenia za pomocą MES w programie Sofistik, w celu sprawdzenia poprawności obliczeń w programie Mathematica, a także w celu stworzenia wizualizacji wyników.

Chociaż obliczenia nie służą zaprojektowaniu konstrukcji, to dla ustalenia uwagi przyjęto konkretne wielkości konstrukcji, stałych materiałowych i przekrojów poprzecznych elementów. Założono geometrię modułów taką jak w rozdziale 4.1. Moduły zostały podparte w sposób minimalny, to znaczy każdemu z modułów odebrano jedynie sześć stopni swobody związanych z ruchami sztywnymi. Sposób podparcia będzie przedstawiony na wizualizacjach konstrukcji. Jako materiał konstrukcyjny przyjęto stal o następujących parametrach:

- moduł Younga $E = 200\text{GPa}$,
- gęstość $\rho = 7,86\text{ g/cm}^3$.

Przy doborze przekrojów posłużono się rozwiązaniem systemu cięgowego Detan firmy Halfen. Materiałem elementów jest stal S355J2. Dobrano następujące wartości katalogowe:

- cięgna prętowe: - średnica $d_s = 10\text{mm}$,
- nośność $N_{R,d} = 21,3\text{kN}$,

⁷ Wykorzystano własne, nietrywialne programy napisane w programie Mathematica. Ze względu na znaczną objętość kodu nie został on załączony. Uwaga dotyczy także obliczeń przywołanych w rozdziałach 4.3 i 4.4.

- zastrzały rurowe:
 - średnica zewnętrzna $D_s = 54mm$,
 - grubość ścianek $t = 2,6mm$,
 - nośność $N_{b.R,d} = -43kN$,
- przy długości maksymalnej $L_{max} = 2200mm$.

Konstrukcje poddawano działaniu wstępnego sprężenia. Siły z nim związane miały proporcje zgodne z wielkościami stanu samonapężenia, określonymi w rozdziale 4.1. Przy wprowadzaniu sił wstępnego sprężania ograniczono ich wielkość do 80%⁸ nośności elementów najbardziej wyężonych.

Dodatkowo, w celach porównawczych, w programie Sofistik przeprowadzono obliczenia nieliniowe MES z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej (zmodyfikowana metoda Newtona-Raphsona [Crisfield: 1979]), związanej z dużymi przemieszczeniami (por. [Crisfield: 1991] [Belytschko: 2000]). Zachowania nieliniowe mają istotny wpływ na wyniki, kiedy brakuje proporcjonalności między przemieszczeniami i odkształceniami. Taka sytuacja może mieć miejsce w przypadku konstrukcji, w których występują mechanizmy infinitezymalne.

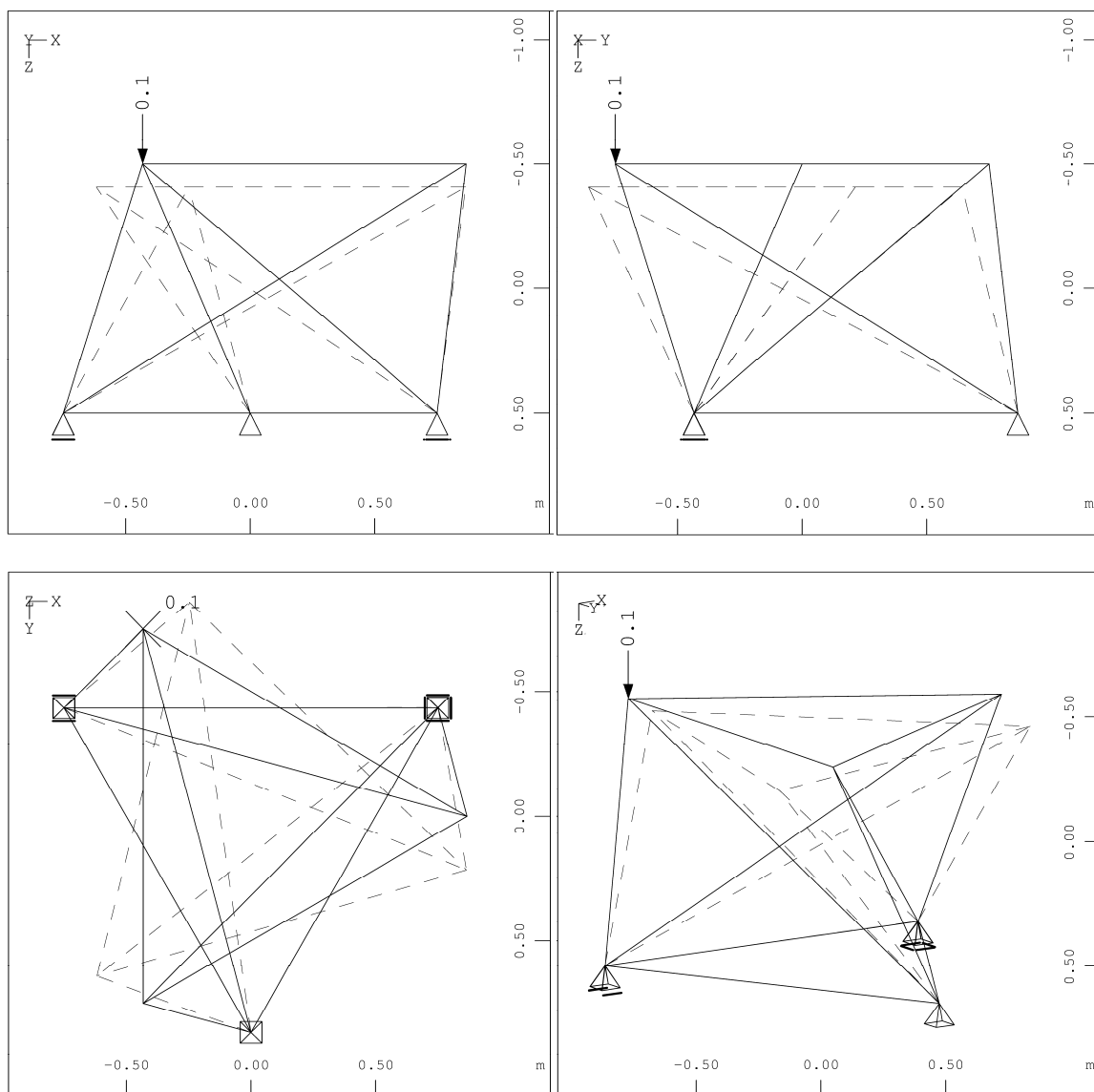
4.2.1 Graniastosłup prawidłowy tensegrity (*simplex*)

Model konstrukcji poddano obciążeniom statycznym przyłożonym w górnym węźle, oznaczonym w tabeli 4.1 numerem 4. W jednym przypadku były to obciążenia skierowane pionowo w dół – w kierunku osi z, w drugim zaś siłę skierowano poziomo – zgodnie z kierunkiem osi x. Wartość obciążenia wynosiła 0,10 kN.

Na rysunkach 4.5 i 4.7 przedstawiono rozkład przemieszczeń konstrukcji pod wpływem obciążenia (linia przerywana). Oś z na rysunkach zwrócona jest do dołu, odwrotnie niż w tabelach w rozdziale 4.1. Nie ma to wpływu na wyniki obliczeń, a jedynie na znaki współrzędnych węzłów.

W tabeli 4.9 oraz na rysunkach 4.6 i 4.8 przedstawiono wyniki przemieszczenia obciążonego węzła w kierunku działania siły, w zależności od wielkości siły sprężenia konstrukcji.

⁸ W przypadku cięgien przystosowanych do automatycznego wprowadzania wstępnego sprężenia producent systemu Detan zaleca ograniczenie siły naprężającej do 40% $N_{b.R,d}$.

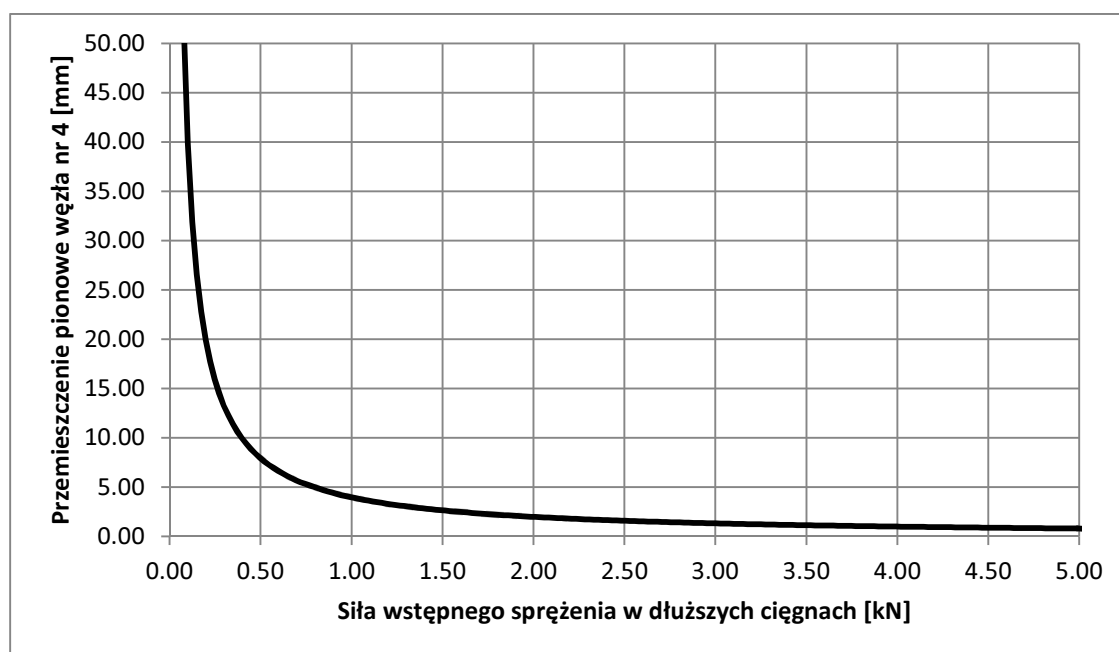


Rys. 4.5 Simplex – obciążenie statyczne i przemieszczenie pod jego wpływem – przypadek obciążenia pionowego

Obciążenie pionowe powoduje przemieszczenie pionowe całego górnego trójkąta, jednocześnie skutkuje skręceniem całej konstrukcji. Ma to związek z postacią mechanizmu infinitesimalnego, który ma charakter skrętny. Dokładna postać mechanizmu została zobrazowana w kontekście postaci drgań własnych konstrukcji (rys 4.16).

Tab. 4.9 *Simplex* – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 4

Obciążenie pionowe węzła nr 4 siłą 0,1 kN			
Siła sprężenia w dłuższych ciągnach [kN]	Przemieszczenie pionowe węzła nr 4 [mm]		
	Mathematica	Sofistik	
	wg teorii		
	II rz.	II rz.	II rz. + nielin. geom.
0,25	15,95	16,92	5,56
1,24	3,20	3,23	2,93
2,48	1,61	1,61	1,59
4,96	0,81	0,81	0,81
14,89	0,28	0,28	0,28



Rys. 4.6 *Simplex* – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 4

Porównanie wyników otrzymanych za pomocą własnych obliczeń z wynikami z programu inżynierskiego wskazują na poprawność zastosowanego algorytmu MES.

Wraz ze wzrostem sił wstępnego sprężenia konstrukcji przemieszczenia pionowe węzłów wyraźnie maleją. Wykresy utworzone na podstawie wyników uzyskanych w programie do obliczeń symbolicznych wskazują, że zwiększenie sztywności konstrukcji wynikające z wprowadzenia sił sprężenia jest zdecydowanie bardziej znaczące przy niewielkich wartościach tych sił. Fakt ten wynika z charakteru wykresu, którego wartości przy zbliżaniu się rzędnych do zera dążą do nieskończoności.

Jest to ograniczenie przyjętej metody obliczeń. Macierz sztywności geometrycznej uwzględnia jedynie dodatkowe siły wynikające z działania wstępnie wprowadzonych sił osiowych. W przypadku ich braku całkowita macierz sztywności jest równoznaczna macierzy sztywności liniowej i jeśli istnieje mechanizm infinitezymalny, to jest ona osobliwa.

Inaczej dzieje się w przypadku uwzględnienia w obliczeniach wpływu nieliniowości geometrycznej, który maleje wraz z usztywnieniem konstrukcji (tab. 4.9). Wtedy rozwiązanie następuje w sposób iteracyjny, aktualizując w każdym kroku wartości sił wewnętrznych w konstrukcji powstałych na skutek przemieszczeń. Umożliwia to uwzględnienie w obliczeniach jednej z podstawowych cech „czystych tensegrity”, a mianowicie fakt, że obciążenia powodujące przemieszczenia zgodne z postacią mechanizmu infinitezymalnego w sposób naturalny – wynikający z geometrii – sprężają i usztywniają konstrukcję. Z powodu występowania cięgien o minimalnej długości takie obciążenia zawsze wprowadzają rozciąganie do cięgien i ściskanie do zastrzałów, niezależnie od zwrotu przyłożonej siły.

Zarówno samonapężenie, jak i obciążenie zewnętrzne powodują sprężenie konstrukcji. Zatem wpływ wstępnego sprężenia zależy od stosunku wielkości sił tego sprężenia do sił wywoływanych przez obciążenie zewnętrzne. W tabelach 4.10 i 4.11 porównano wielkości sił wewnętrznych wywołanych obciążeniem zewnętrznym o różnych wartościach oraz wywołane tymi obciążeniami przemieszczenia.

Tab. 4.10 *Simplex* – siły normalne wywołane obciążeniami zewnętrznymi bez wstępnego sprężenia

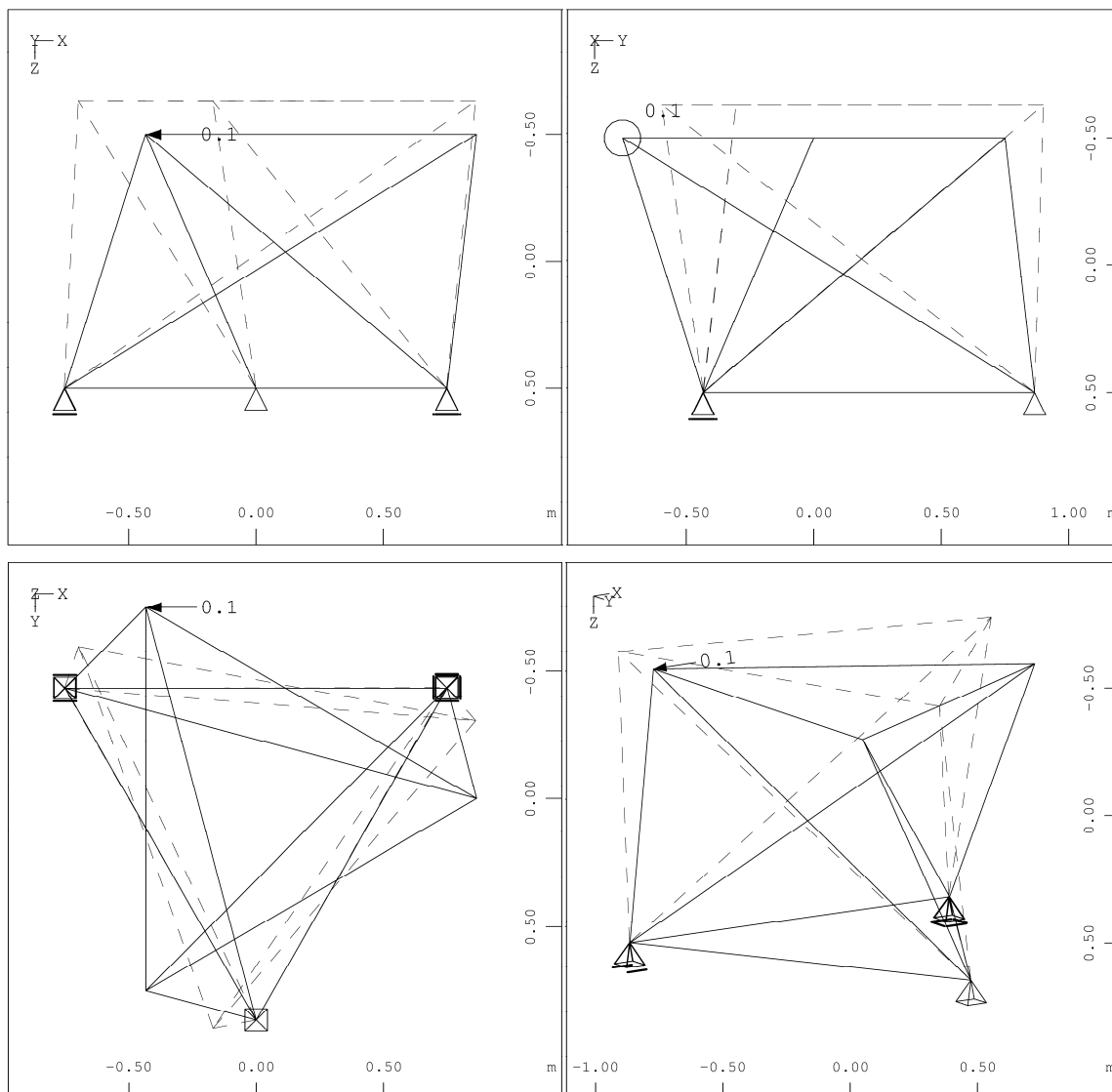
Obliczenia w programie Sofistik z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej		
Rodzaj elementów	Siły normalne wywołane obciążeniem zewnętrznym [kN]	
	wartość obciążenia zewnętrznego	
	0,10 kN	10,00 kN
krótsze cięgna	0,480 ÷ 0,545	8,499 ÷ 16,096
dłuższe cięgna	0,533 ÷ 0,670	3,587 ÷ 17,930
zastrzały	-1,192 ÷ -1,125	-31,882 ÷ -24,112

Tab. 4.11 *Simplex* – wpływ wstępnego sprężenia konstrukcji na przemieszczenia w zależności od wielkości obciążenia zewnętrznego

Obliczenia w programie Sofistik z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej		
Siła sprężenia w dłuższych cięgnach [kN]	Przemieszczenie pionowe węzła nr 4 [mm]	
	pod obciążeniem pionowym wynoszącym:	
	0,10 kN	10,00 kN
0,00	6,40	33,33
0,25	5,56	33,14
1,24	2,93	32,35
2,48	1,59	31,36
4,96	0,81	29,40
14,89	0,28	22,12

Porównanie wartości sił w dłuższych cięgnach z tabeli 4.10 z rozpatrywanymi wielkościami sił wstępnego sprężenia wskazuje, że przy obciążeniu 0,10 kN siły od wstępnego sprężenia są większe niż siły obciążeń zewnętrznych, a przy obciążeniu 10,00 kN są mniejsze bądź porównywalne. Przekłada się to na dużo większy wpływ wstępnego sprężenia na przemieszczenia w przypadku mniejszego z obciążeń, co obrazuje tabela 4.11.

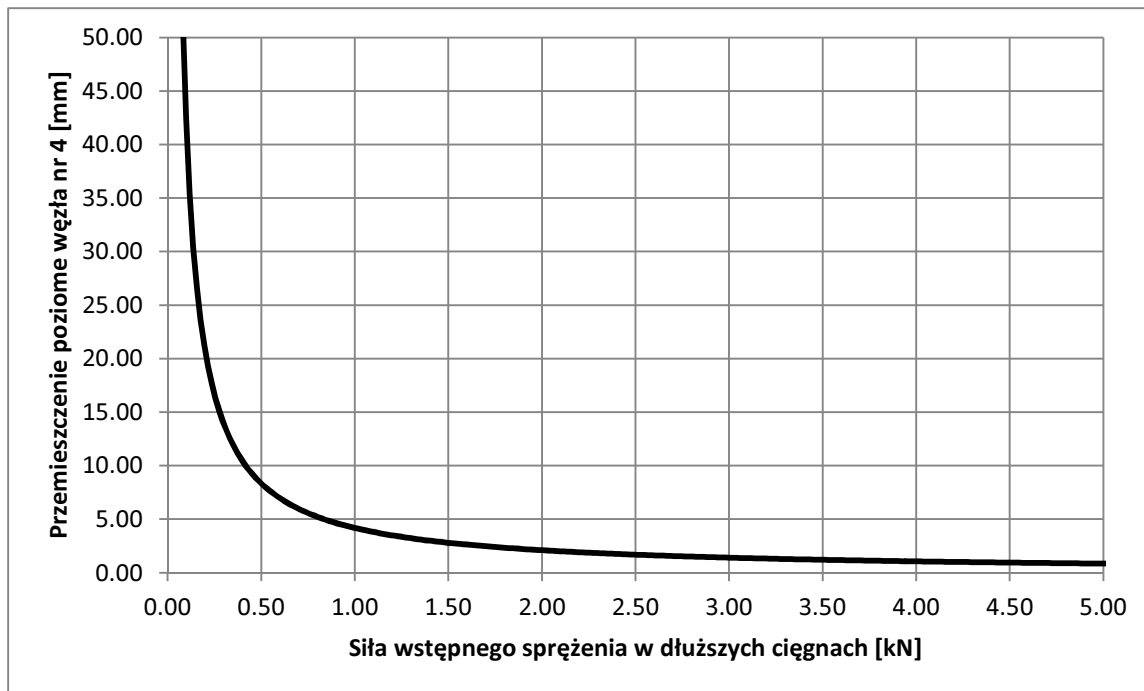
Dla porównania wykonano obliczenia w przypadku poziomego przyłożenia siły zewnętrznej.



Rys. 4.7 Simplex – obciążenie statyczne i przemieszczenie pod jego wpływem – przypadek obciążenia poziomego w węzle nr 4

Podobnie jak w przypadku obciążenia pionowego obciążenie poziome również powoduje przemieszczenia zgodne z postacią mechanizmu infinitezimalnego. Zatem skutek przyłożenia poziomej siły konstrukcja jest skręcana, a górny trójkąt przemieszcza się w kierunku pionowym.

Wpływ sprężenia na przemieszczenia poziome obciążanego węzła jest analogiczny do przypadku z obciążeniem pionowym. Zależność tę przedstawia rysunek 4.8, obrazujący wyniki obliczeń wg teorii II rzędu.

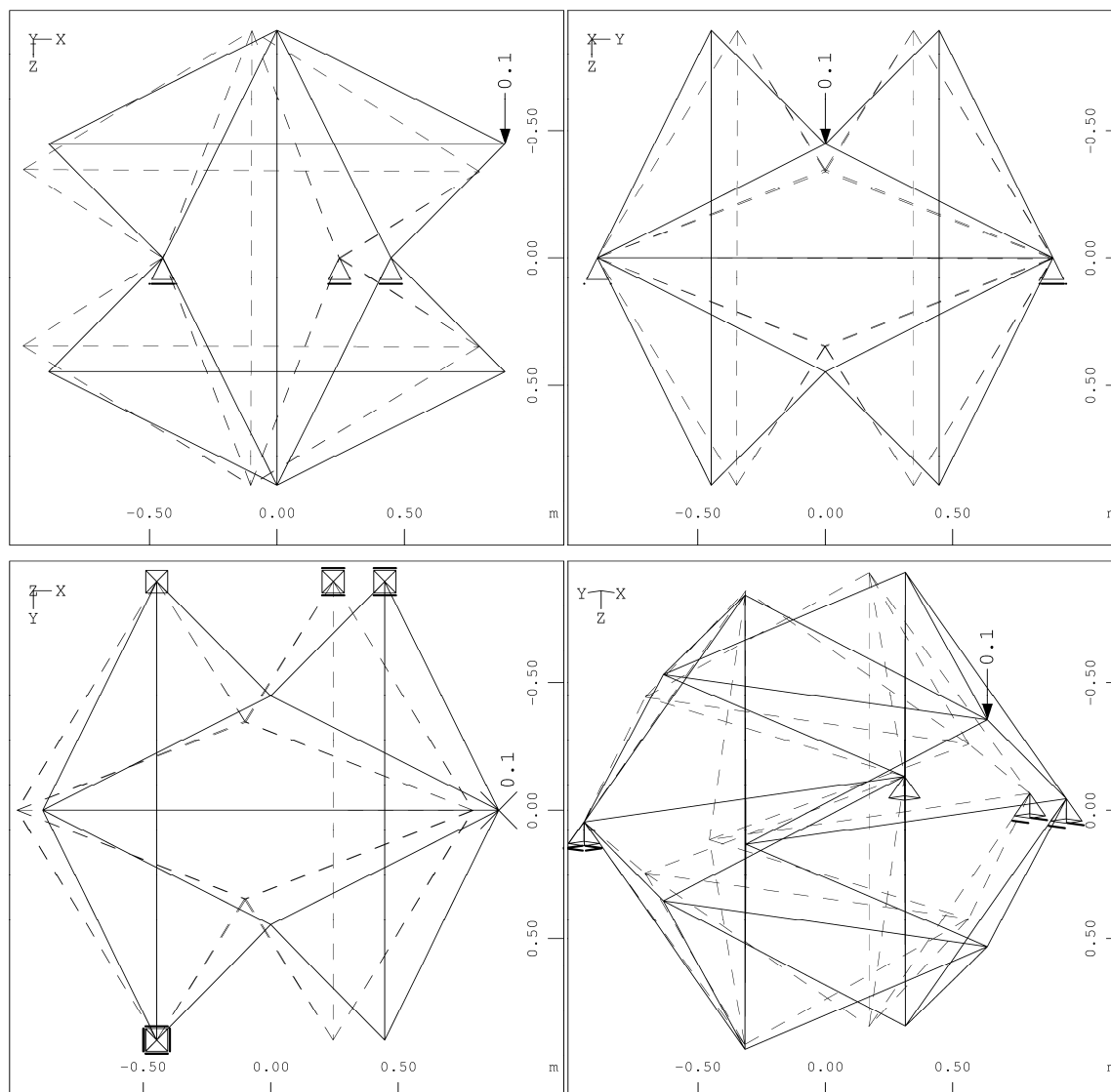


Rys. 4.8 Simplex – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia poziomego w węźle nr 4

4.2.2 Rozszerzony ośmiościan tensegrity

Obliczenia dotyczące odpowiedzi konstrukcji na oddziaływanie statyczne przeprowadzono również dla pozostałych trzech modułów. Metody obliczeń były analogiczne do tych przedstawionych w rozdziale 4.2.1.

W przypadku rozszerzonego ośmiościanu tensegrity jako pierwsze przyłożono pionowe obciążenie o wartości 0,10 kN w węźle oznaczonym w tabeli 4.3 numerem 11. Obciążenie i postać przemieszczeń konstrukcji pod jego wpływem przedstawiono na rysunku 4.9. Wartości przemieszczeń dla wybranych wartości sił wstępnego sprężenia zestawiono w tabeli 4.12.

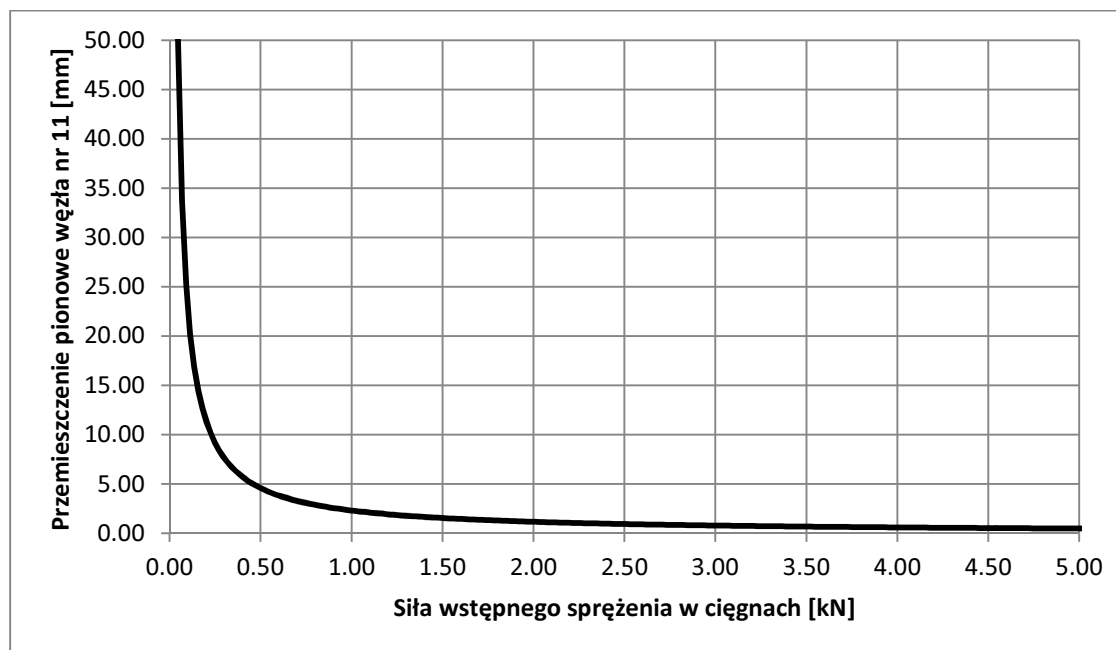


Rys. 4.9 Rozszerzony ośmiościan tensegrity – obciążenie statyczne i przemieszczenie pod jego wpływem – przypadek obciążenia pionowego w węzle nr 11

Tab. 4.12 Rozszerzony ośmiościan tensegrity – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węzle nr 11

Obciążenie pionowe węzła nr 11 siłą 0,1 kN			
Siła sprężenia w cięgnach [kN]	Przemieszczenie pionowe węzła nr 11 [mm]		
	Mathematica	Sofistik	
	wg teorii		
	II rz.	II rz.	II rz. + nielin. geom.
0,14	16,87	16,94	5,58
0,90	2,56	2,56	2,42
2,71	0,87	0,87	0,87
4,52	0,54	0,54	0,54
13,56	0,20	0,20	0,20

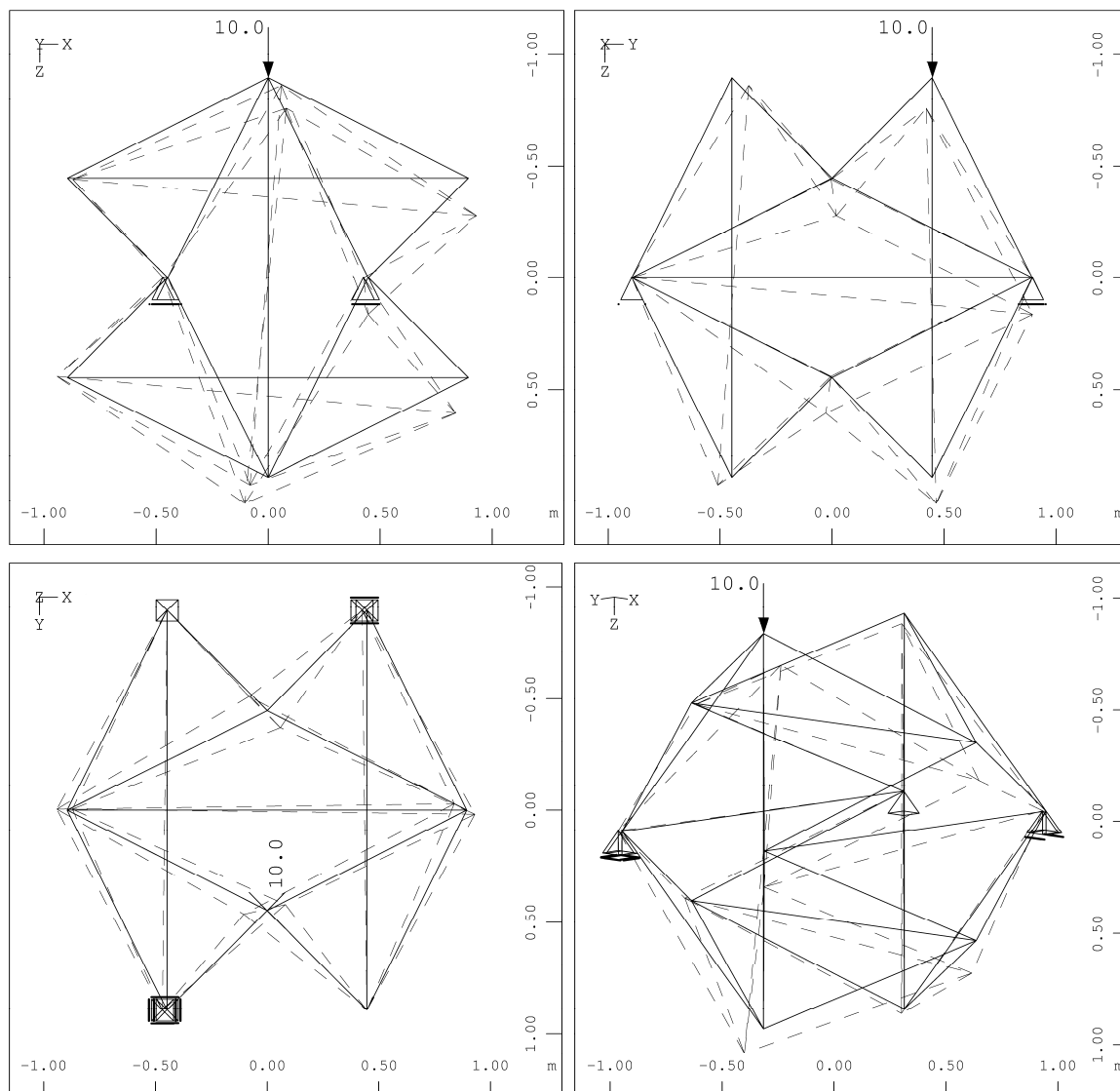
Kierunek obciążenia jest zgodny z kierunkiem ruchu prętów w mechanizmie infinitezmalnym. Obciążenie i przemieszczenie jednego z zastrzałów w jednej z płaszczyzn symetrii powoduje podobne przemieszczenie pozostałych elementów ściskanych. W związku ze zgodnością kierunku obciążenia i postaci mechanizmu charakter wpływu sprężenia na przemieszczenia prętów jest analogiczny do wcześniej przedstawionych i został zobrazowany na rysunku 4.10 (wg teorii II rzędu).



Rys. 4.10 Rozszerzony ośmiościan tensegrity – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 11

Drugim przypadkiem obciążenia jest siła pionowa o wartości 10,00 kN przyłożona w węźle nr 6. Ma ona dużo większą wartość ze względu na to, że jej kierunek nie odpowiada postaci mechanizmu infinitezmalnego.

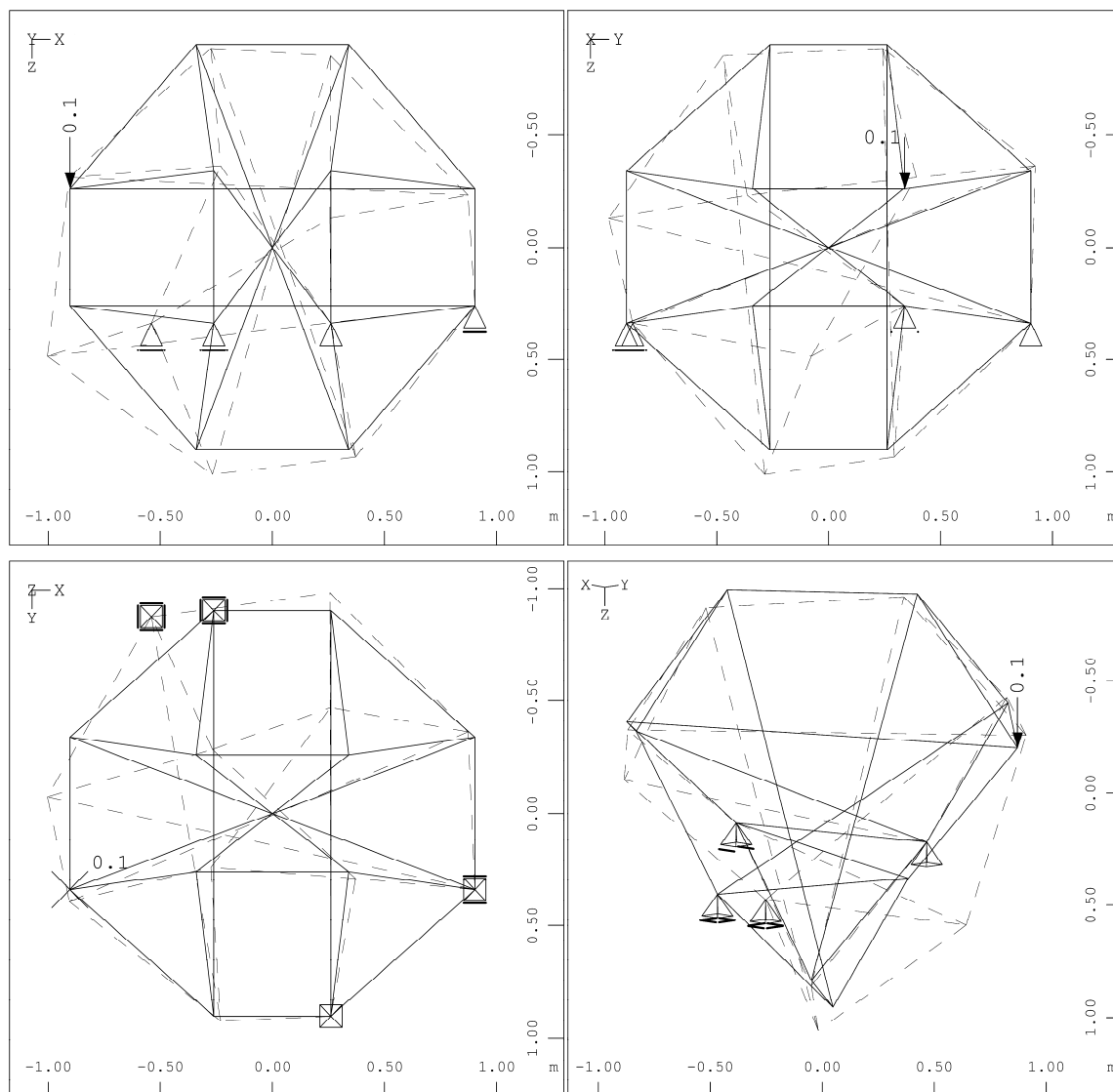
Obliczenia wykazały niemal całkowity brak wrażliwości przemieszczenia pod siłą na wartość wstępnego sprężenia konstrukcji. Przemieszczenie pionowe obciążonego węzła wyniosło 0,687310 mm przy braku wstępnego sprężenia i 0,686141 mm przy wstępnym sprężeniu odpowiadającym sile 13,56 kN w cięgnach. Ponadto wyniki wykazały bardzo dużą różnicę sztywności w zależności od miejsca i kierunku przyłożenia obciążenia. Postać przemieszczeń i obciążenie przedstawiono na rysunku 4.11.



Rys. 4.11 Rozszerzony ośmiościan tensegrity – obciążenie statyczne i przemieszczenie pod jego wpływem – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 6

4.2.3 Czworoscian ścięty tensegrity

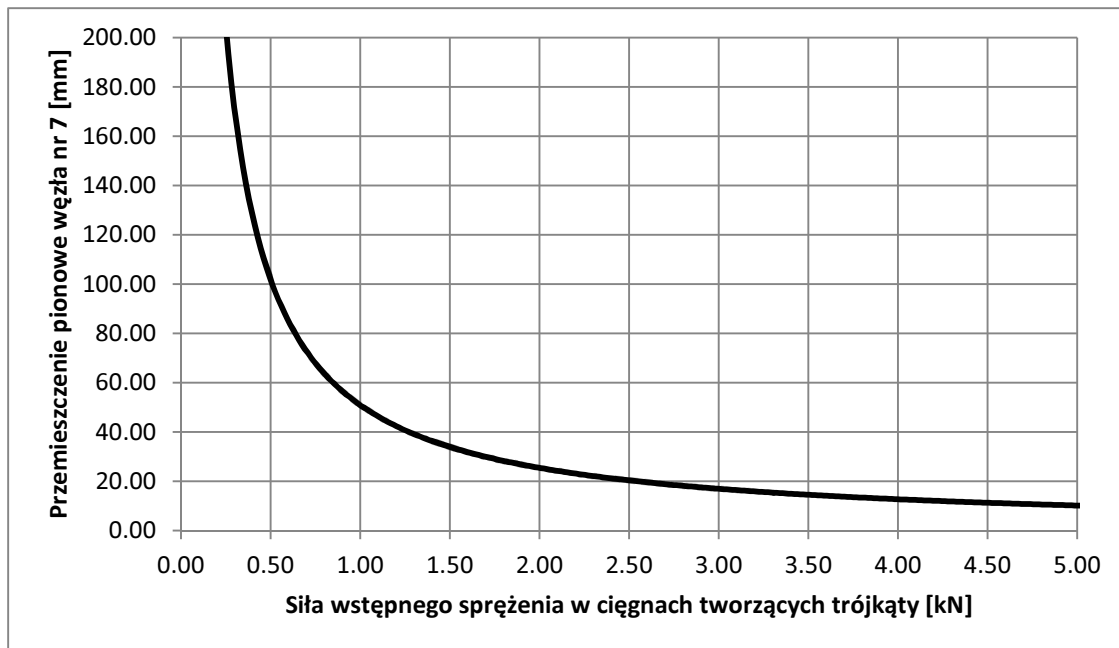
Czworościan ścięty tensegrity obciążono siłą pionową o wartości 0,10 kN w węźle nr 7 (tab. 4.5). Obciążenie i postać przemieszczenia pod jego wpływem przedstawia rysunek 4.12. Wyniki przemieszczeń dla wybranych wartości sił wstępnego sprężenia zestawiono w tabeli 4.13. i przedstawiono na rysunku 4.13 (wg teorii II rzędu).



Rys. 4.12 Czworoscian ścięty tensegrity – obciążenie statyczne i przemieszczenie pod jego wpływem – przypadek obciążenia pionowego w węzle nr 7

Tab. 4.13 Czworoscian ścięty tensegrity – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węzle nr 7

Obciążenie pionowe węzła nr 7 siłą 0,1 kN			
Siła sprężenia w cięgnach trójkątów [kN]	Przemieszczenie pionowe węzła nr 7 [mm]		
	Mathematica	Sofistik	
	wg teorii		
	II rz.	II rz.	II rz. + nielin. geom.
0,16	309,25	362,99	42,04
0,82	61,86	63,21	33,97
1,65	30,94	31,06	25,32
3,29	15,48	15,51	14,98
9,87	5,17	5,17	5,18

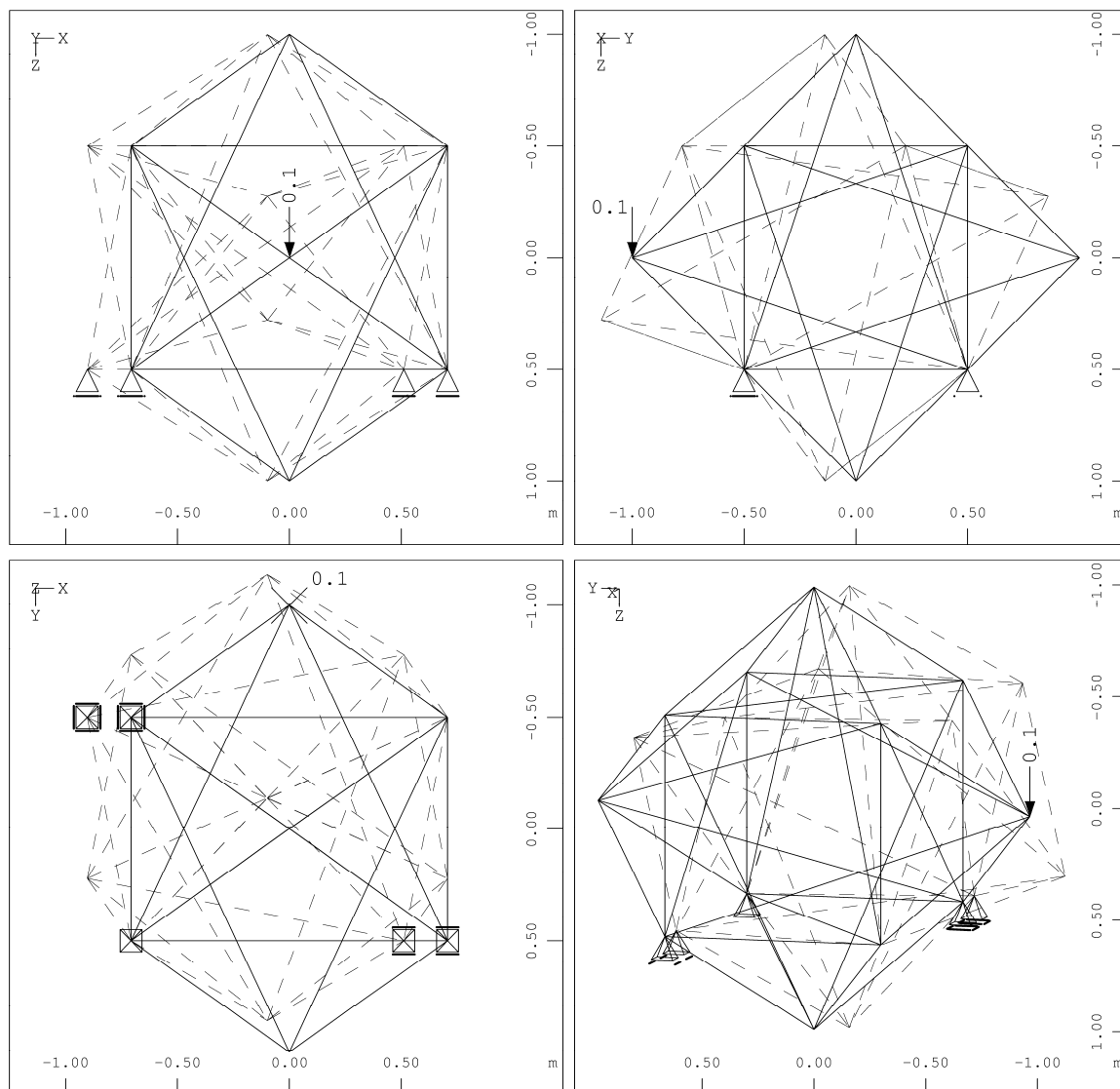


Rys. 4.13 Czworoscian ścięty tensegrity – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 7

Pomimo występowania w module aż siedmiu mechanizmów infinitezimalnych, wstępne sprężenia konstrukcji wpływa na usztywnienie wszystkich z nich. Jednak duża liczba mechanizmów wpływa za to, że przemieszczenia przy tych samych obciążeniach są większe niż w wcześniejszych przykładach.

4.2.4 Sześćcio-ośmiościan tensegrity

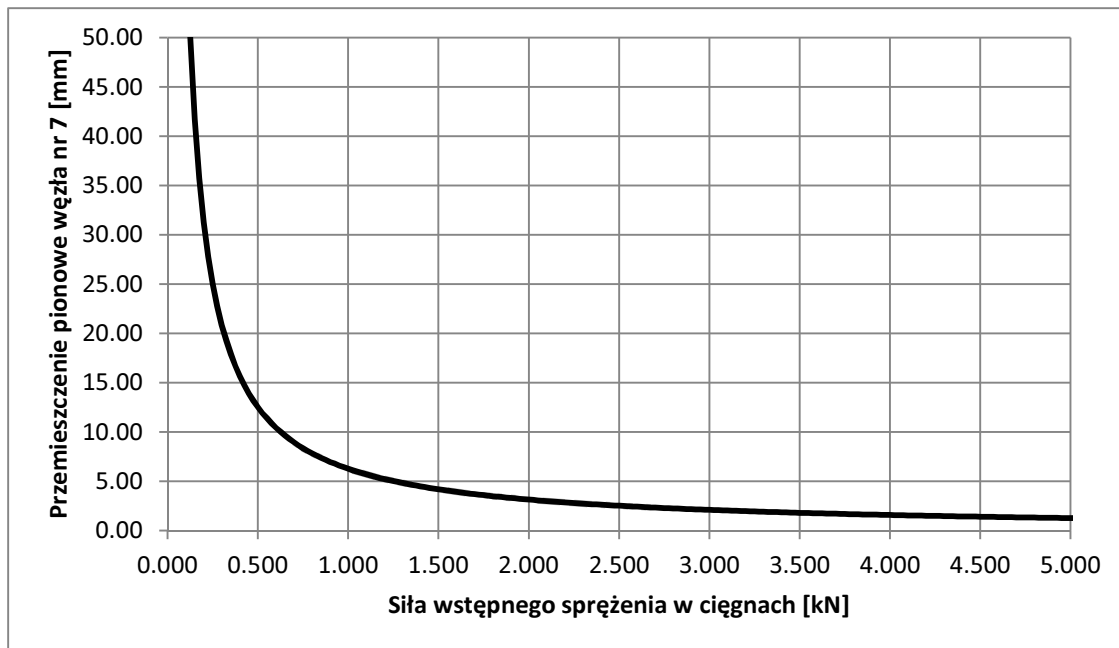
Sześćcio-ośmiościan tensegrity obciążono siłą pionową o wartości 0,10 kN w węźle nr 7 (tab. 4.7). Obciążenie i postać przemieszczenia pod jego wpływem przedstawia rysunek 4.14. Ze względu na występowanie siedmiu stanów samonapężenia, wstępnego sprężania dokonano siłami o proporcjach wynikających z sumy stanów samonapężenia (tab. 4.7). Wyniki przemieszczeń dla wybranych wartości sił wstępnego sprężenia zestawiono w tabeli 4.14. i przedstawiono na rysunku 4.15 (wg teorii II rzędu).



Rys. 4.14 Sześćcio-ośmiościan tensegrity – obciążenie statyczne i przemieszczenie pod jego wpływem – przypadek obciążenia pionowego w węzle nr 7

Tab. 4.14 Sześćcio-ośmiościan tensegrity – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węzle nr 7

Obciążenie pionowe węzła nr 7 siłą 0,1 kN			
Siła sprężenia w cięgnach [kN]	Przemieszczenie pionowe węzła nr 7 [mm]		
	Mathematica	Sofistik	
	wg teorii		
	II rz.	II rz.	II rz. + nielin. geom.
0,25	25,02	25,26	9,69
1,00	6,27	6,29	5,57
2,50	2,52	2,53	2,50
5,00	1,27	1,28	1,27
15,00	0,44	0,44	0,44



Rys. 4.15 Sześćo-ośmiościan tensegrity – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 7

Podobnie jak w przypadku rozszerzonego ośmiościanu tensegrity można znaleźć takie obciążenie konstrukcji, które nie działa w kierunku ruchu prętów związanym z mechanizmem infinitezymalnym. Na przykład przemieszczenie pionowe węzła nr 6 (najwyżej położony węzeł) pod wpływem pionowego obciążenia przyłożonego do tego węzła jest niemal niezależne od poziomu wstępnego sprężenia konstrukcji. Przy obciążeniu wynoszącym 10 kN przemieszczenie wyniosło 0,793078 mm przy braku sprężenia i 0,788217 mm przy wstępnym sprężeniu odpowiadającym sile 15,00 kN w cięgnach.

4.2.5 Wnioski

Przeprowadzona analiza wykazała istotny wpływ sprężenia na własności mechaniczne modułów tensegrity w zakresie statycznym. Można rozróżnić dwa zasadnicze przypadki: przypadek pierwszy – kiedy kierunek obciążenia jest zgodny z kierunkiem ruchu obciążanych prętów w mechanizmie infinitezymalnym – oraz przypadek drugi – odwrotny. W pierwszym z nich wprowadzenie do konstrukcji wstępnego sprężenia znacząco zwiększa sztywność konstrukcji i zmniejsza przemieszczenia spowodowane obciążeniem, pod warunkiem że siły wstępnego sprężenia są większe od sił w prętach wywołanych obciążeniem zewnętrznym. W drugim przypadku efekt ten jest minimalny. Zaobserwowano również, że samo obciążenie zewnętrzne może usztywniać mechanizmy infinitezymalne występujące w konstrukcji.

Cięgna nie przenoszą ściskania, są więc nieliniowe fizycznie. Choć w zakresie rozciągania mają charakterystykę zbliżoną do sprężystej (pomijając wpływ zwisu na efektywny moduł sprężystości), to w zakresie ściskania nie mają one sztywności. Jednak zakładając, że poziom wstępnego sprężenia jest na tyle wysoki, że w cięgnach we wszystkich sytuacjach obliczeniowych występuje rozciąganie, problem można uznać za fizycznie liniowy. Porównanie wyników obliczeń potwierdza jednak fakt, że rozpatrywane problemy są nieliniowe geometrycznie. Zatem w odniesieniu do konstrukcji tensegrity właściwa jest analiza z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej, na przykład za pomocą metody Newtona-Raphsona (lub jej zmodyfikowanej wersji). Stwierdzono, że o ile w przypadku niewielkiego poziomu samonapężenia konstrukcji konieczna jest analiza nieliniowa geometrycznie, o tyle w przypadku większego poziomu sprężenia wystarczające mogą być obliczenia z uwzględnieniem wyłącznie macierzy sztywności i sztywności geometrycznej.

Pomimo wyraźnego usztywnienia mechanizmów infinitezymalnych pod wpływem sił samonapężenia ocena ilościowa otrzymanych wyników wskazuje na małą sztywność „czystych tensegrity” w przypadku obciążenia zgodnego z postacią mechanizmu infinitezymalnego.

4.3 Wpływ sprężenia na własności dynamiczne modułów

W celu zbadania wpływu wstępnego sprężenia cięgien na własności dynamiczne modułów przeprowadzono obliczenia częstotliwości i postaci drgań własnych wszystkich modułów. Rozpatrywano konstrukcje niepodparte. Obliczenia wykonano przy użyciu programu do obliczeń symbolicznych Mathematica, a wyniki sprawdzono przy użyciu oprogramowania inżynierskiego MES – Sofistik. W obliczeniach wykorzystano metodę opisaną w rozdziale 3.2.1, z uwzględnieniem wzoru na częstotliwość drgań własnych: $f = \omega/2\pi$, gdzie ω – częstość drgań własnych (wzór (3.47)).

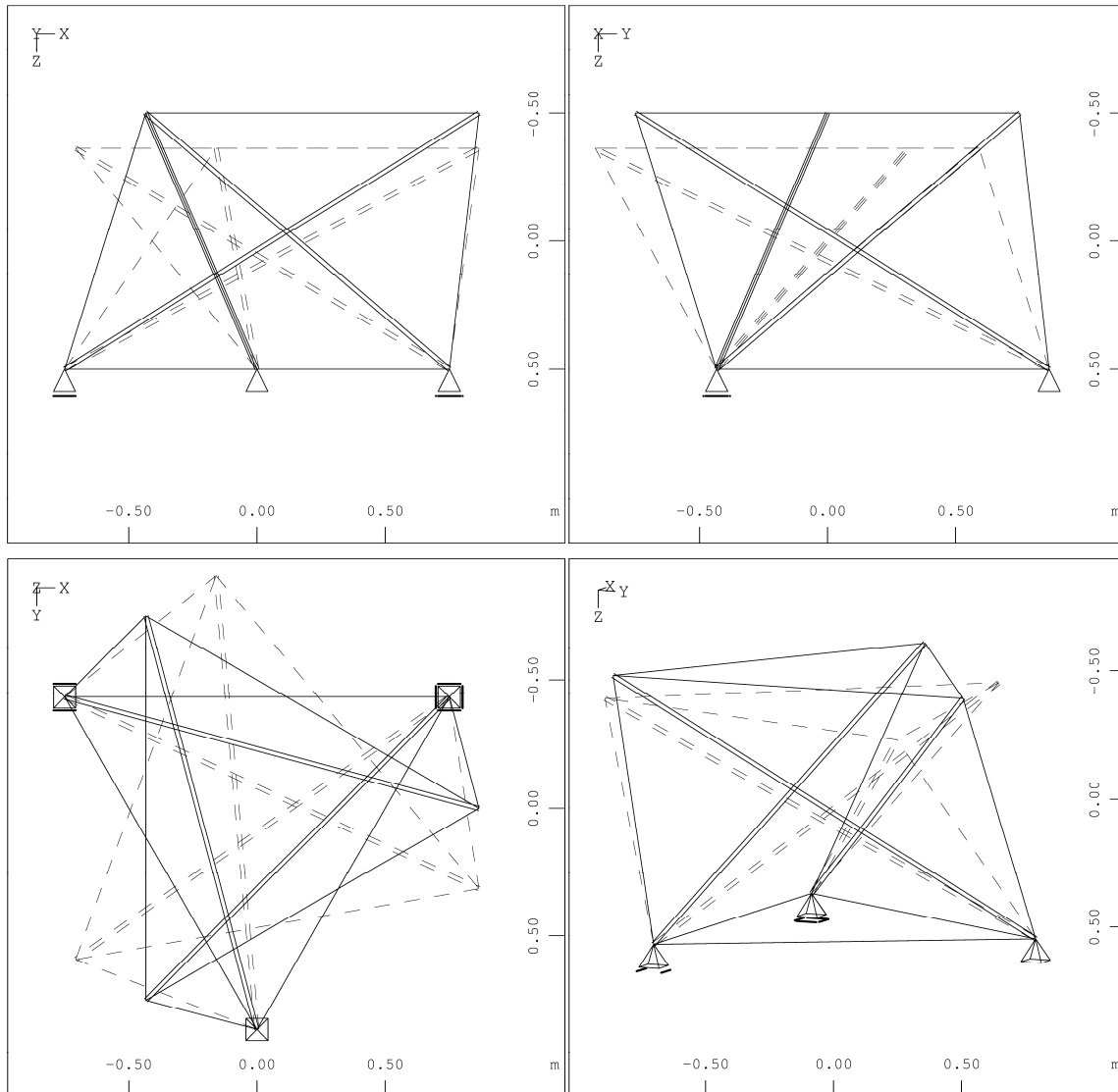
Porównanie wyników z obliczeń symbolicznych z wynikami z programu Sofistik wykazało pełną zgodność wszystkich częstotliwości drgań własnych, niezależnie od wielkości wstępnego sprężenia konstrukcji.

W obliczeniach przyjęto wielkości geometryczne i materiałowe takie, jak opisano we wstępie do rozdziału 4.2. Analizę przeprowadzono na modelach konstrukcji podpartych.

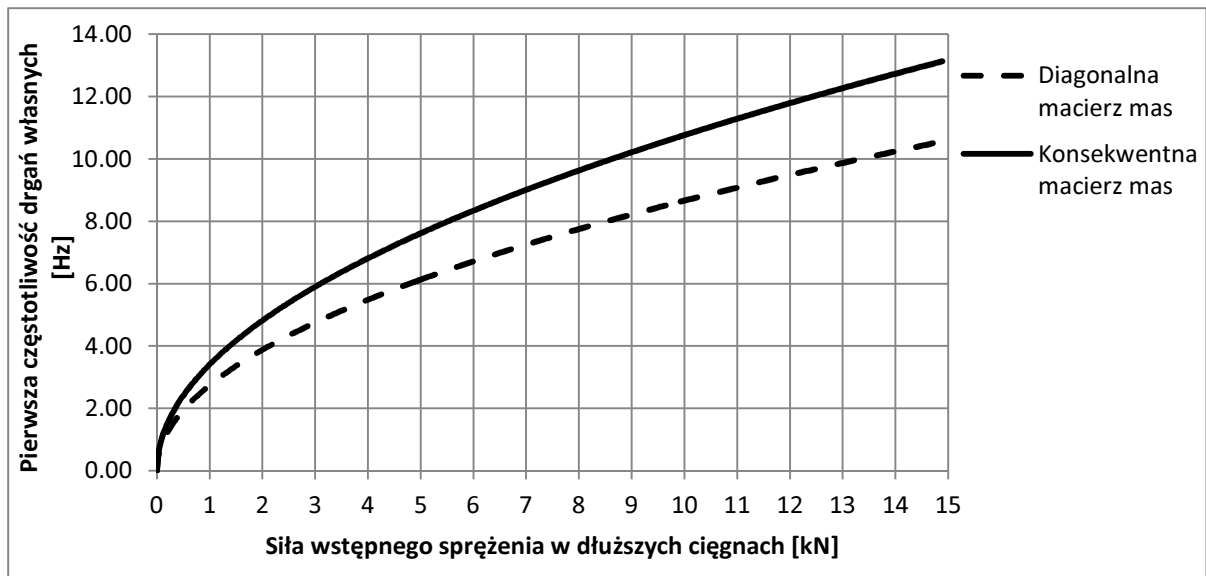
4.3.1 Graniastosłup prawidłowy tensegrity (*simplex*)

Na rysunku 4.16 przedstawiono pierwszą postać drgań własnych, a rysunek 4.17 obrazuje zależność pierwszej częstotliwości od poziomu wstępnego sprężenia, zgodnego z proporcjami

stanu samonapężenia. Kolejne częstotliwości drgań własnych są niemal całkowicie niewrażliwe na wielkość poziomu wstępnego sprężenia konstrukcji. Na przykład druga częstotliwość drgań własnych bez wstępnego sprężenia wyniosła 61,5595 Hz, a ze sprężeniem odpowiadającym sile 14,89 kN w dłuższych cięgnach wyniosła 61,6671 Hz.



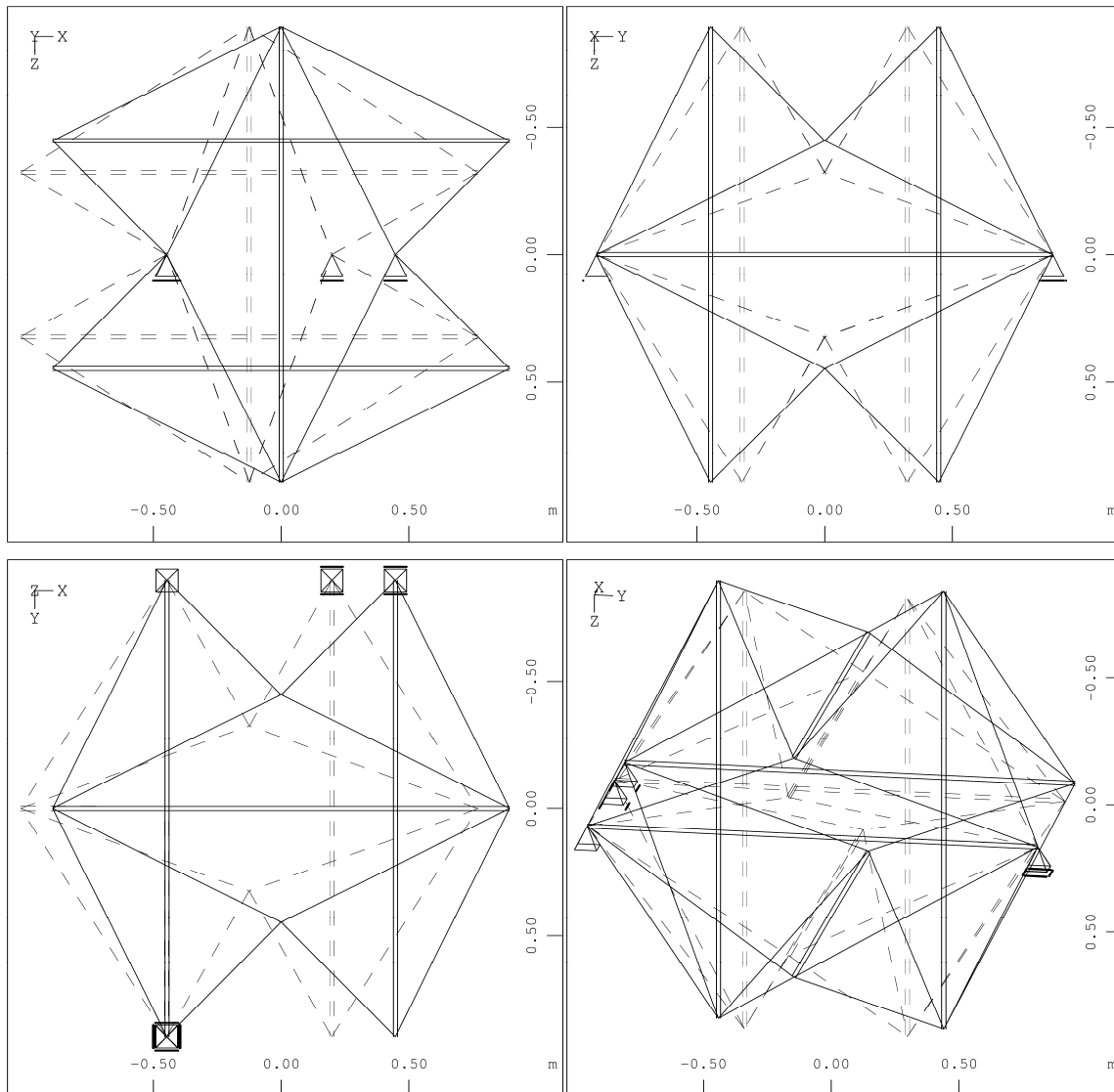
Rys. 4.16 Simplex – pierwsza postać drgań własnych



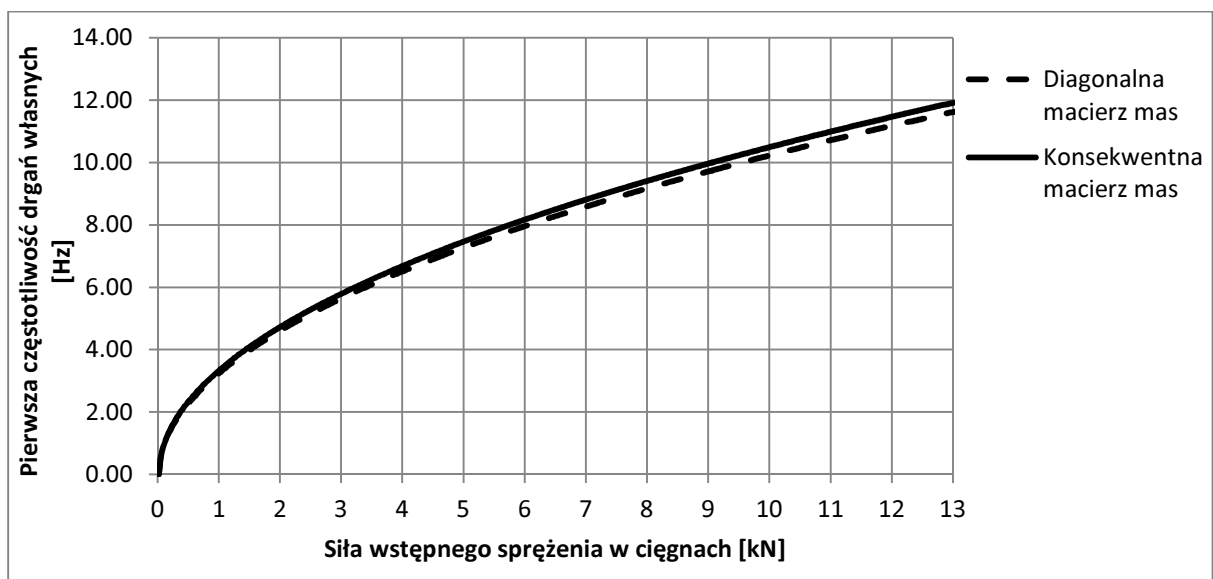
Rys. 4.17 *Simplex* – wpływ sprężenia na pierwszą częstotliwość drgań własnych

4.3.2 Rozszerzony ośmiościan tensegrity

Pierwszą postać drgań własnych przedstawiono na rysunku 4.18. Podobnie jak w przypadku modułu *simplex*, jedynie pierwsza częstotliwość drgań własnych w sposób wyraźny zależy od wielkości wstępnego sprężenia (rys. 4.19). Zagadnienie jest znacznie mniej czułe na wybór rodzaju macierzy mas (diagonalna czy konsekwentna) niż było to w przypadku modułu *simplex* (por. rys. 4.17 i 4.19).



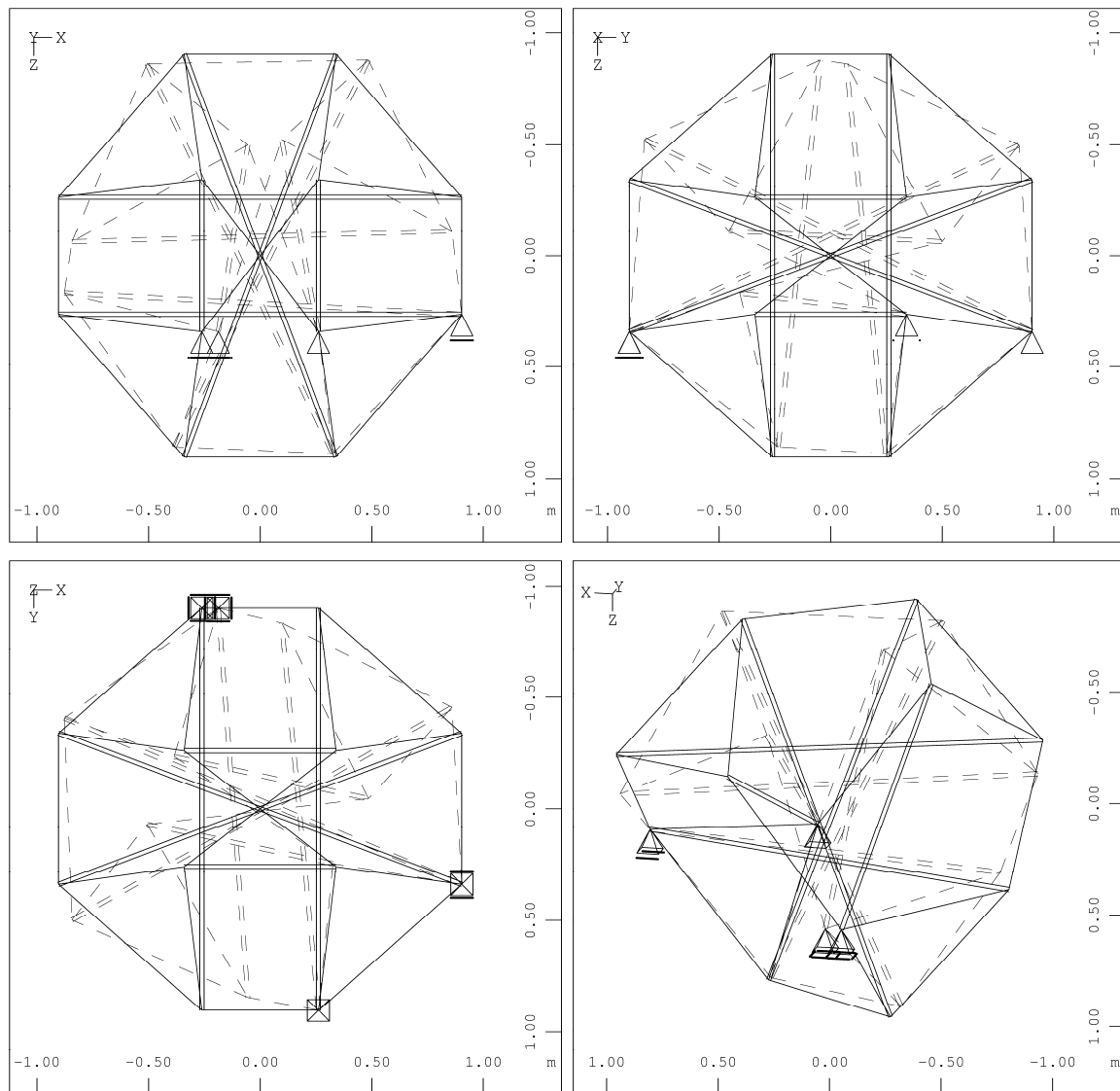
Rys. 4.18 Rozszerzony ośmiościan tensegrity – pierwsza postać drgań własnych



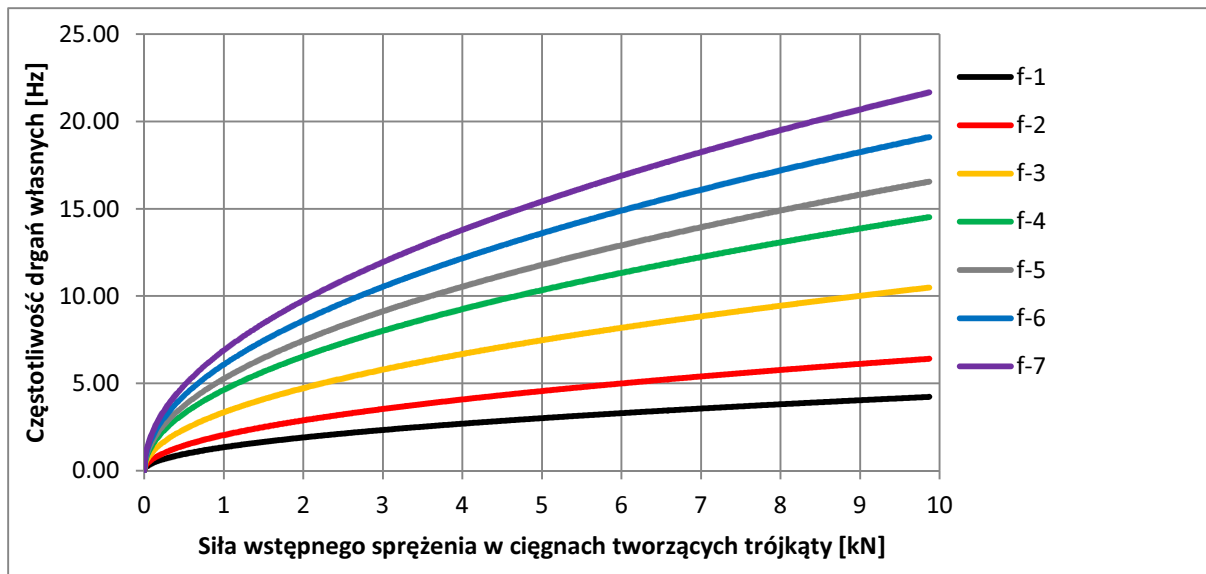
Rys. 4.19 Rozszerzony ośmiościan tensegrity – wpływ sprężenia na pierwszą częstotliwość drgań własnych

4.3.3 Czworoscian ścięty tensegrity

Przypadek czworoscianu ściętego tensegrity jest szczególny, ponieważ występuje w nim aż siedem mechanizmów infinitesimalnych. Obliczenia wykazały, że w takiej konstrukcji jej wstępne sprężenie układem sił samonapężenia ma wpływ na wszystkie siedem postaci drgań własnych związanych ze wspomnianymi mechanizmami. Na rysunku 4.20 przedstawiono tylko jedną, wybraną postać drgań własnych konstrukcji. Rysunek 4.21 obrazuje wpływ wstępnego sprężenia cięgien na pierwsze siedem częstotliwości drgań własnych przy konsekwentnej macierzy mas. Poza pierwszymi siedmioma częstotliwościami drgań własnych wpływ sprężenia konstrukcji jest znikomy. Wyniki przy zastosowaniu diagonalnej macierzy mas są mniejsze niż przy macierzy konsekwentnej. Różnica zależy od częstotliwości drgań własnych i wyniosła od około 7% (trzecia częstotliwość drgań) do ponad 30% (druga częstotliwość drgań).



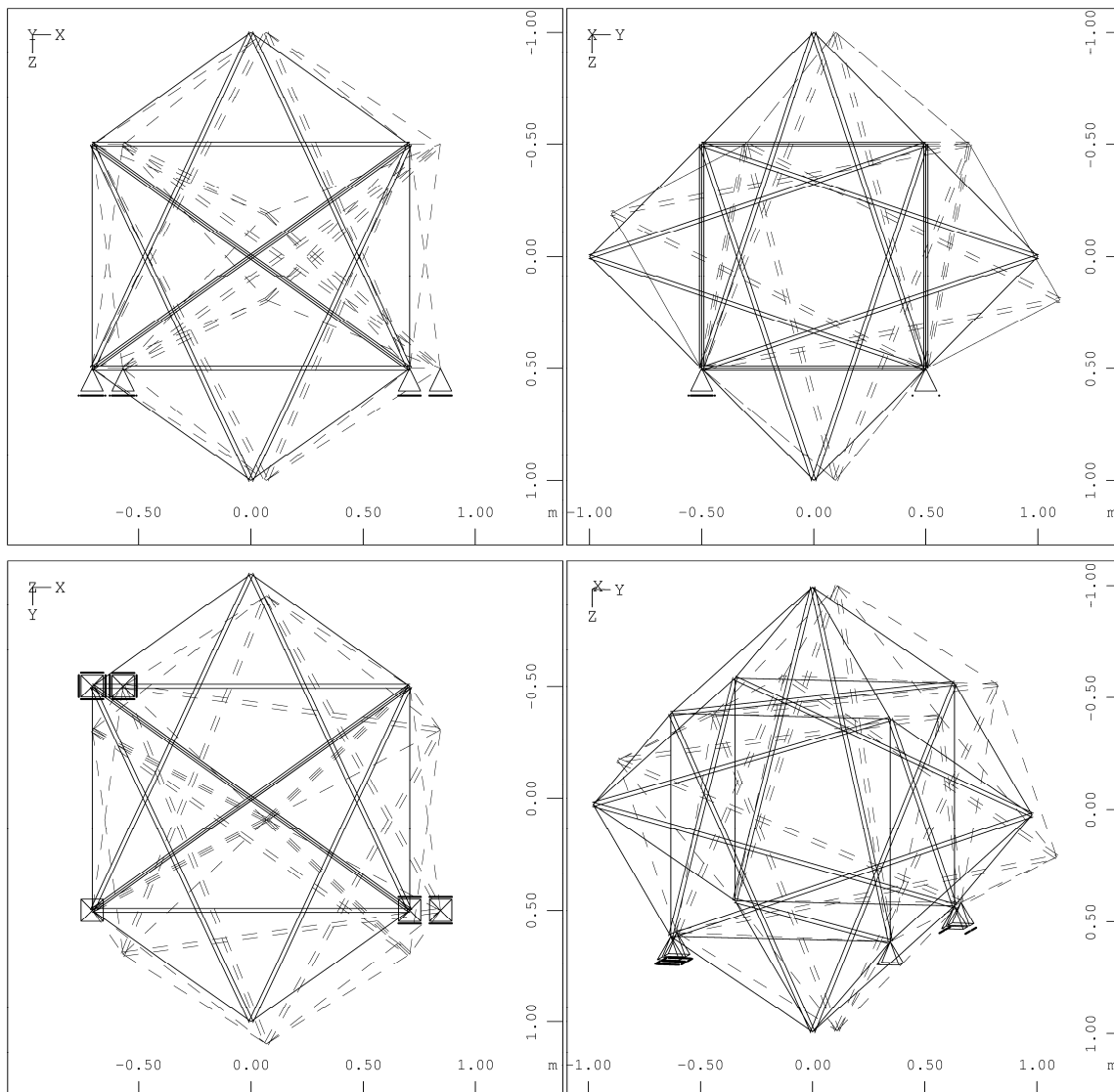
Rys. 4.20 Czworoscian ścięty tensegrity – siódma postać drgań własnych



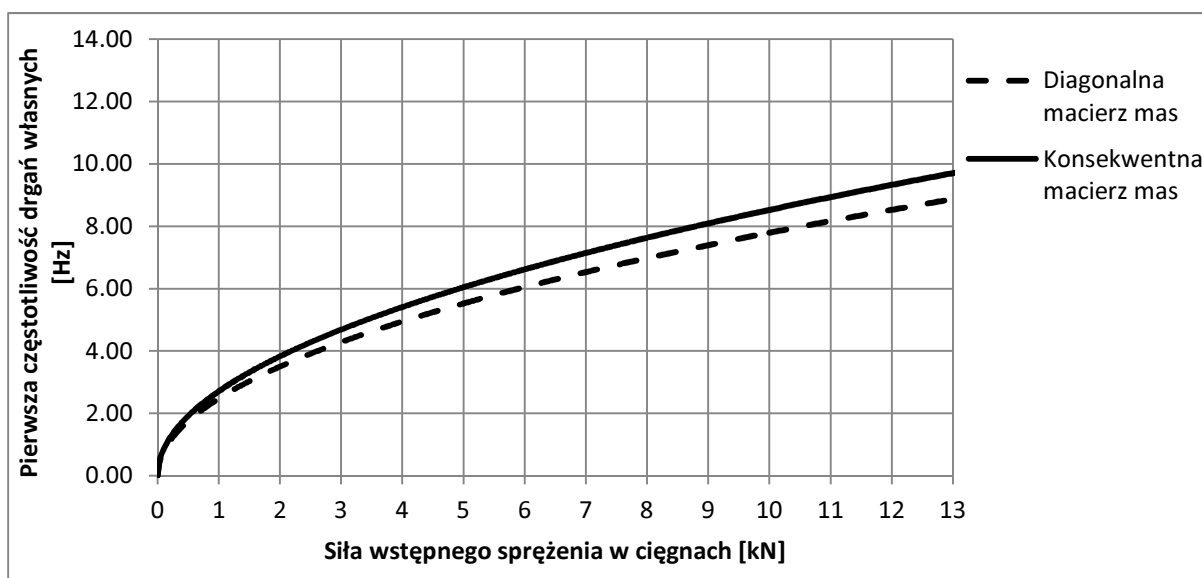
Rys. 4.21 Czworoscian ścięty tensegrity – wpływ sprężenia na pierwsze częstotliwości drgań własnych (konsekwentna macierz mas elementu)

4.3.4 Sześćcio-ośmiościan tensegrity

W sześćcio-ośmiościanie tensegrity jedynie pierwsza częstotliwość w sposób wyraźny zależy od poziomu wstępnego sprężenia konstrukcji. Przedstawiono ją na rysunku 4.22. Wstępnego sprężenia konstrukcji dokonano siłami o proporcjach wynikających z sumy stanów samona-prężenia (tab. 4.7). Zależność pierwszej częstotliwości drgań własnych od poziomu wstępnego sprężenia oraz wpływ rodzaju macierzy mas przedstawiono na rysunku 4.23.



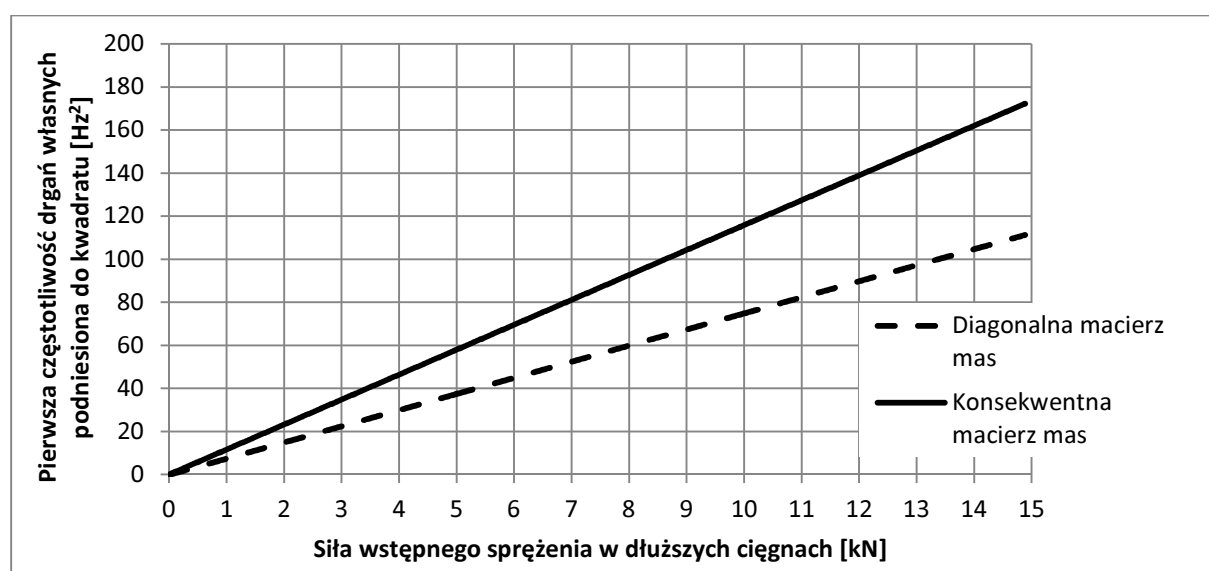
Rys. 4.22 Sześćcio-ośmiościan tensegrity – pierwsza postać drgań własnych



Rys. 4.23 Sześćcio-ośmiościan tensegrity – wpływ sprężenia na pierwszą częstotliwość drgań własnych

4.3.5 Wnioski

Analiza wpływu sprężenia na własności dynamiczne modułów tensegrity wykazała, że wstępne sprężenie konstrukcji ma wyraźny wpływ na częstotliwości drgań własnych, odpowiadających postaciom mechanizmów infinitezymalnych. Częstotliwości zmieniają się od zera aż do wartości akceptowalnych z inżynierskiego punktu widzenia. Analiza wyników wskazuje na fakt, że zależność między poziomem samonapężenia konstrukcji i kwadratem częstotliwości drgań własnych jest liniowa. Na rysunku 4.24 przedstawiono taką zależność na przykładzie modułu typu *simplex*. Zmiana częstotliwości drgań własnych pod wpływem sprężenia jest na tyle duża, że zmiana poziomu wstępnego sprężenia konstrukcji mogłaby być z powodzeniem stosowana do sterowania własnościami dynamicznymi konstrukcji.



Rys. 4.24 *Simplex* – zależność między kwadratem pierwszej częstotliwości drgań własnych i siłą wstępnego sprężenia

Porównanie wyników obliczeń z zastosowaniem diagonalnej i konsekwentnej macierzy mas wykazało, że w tego typu analizie stosowanie macierzy diagonalnej może prowadzić do powstawania błędów, ponieważ opis taki modeluje cechy bezwładnościowe w sposób uproszczony. Różnice w wynikach występują, gdy podczas drgań elementy podlegają znaczącym obrotom w porównaniu z pozostałymi przemieszczeniami. Na przykład, w przypadku pierwszej częstotliwości drgań własnych modułu typu *simplex*, odpowiadającej skrętnej postaci drgań, wyniki z użyciem konsekwentnej macierzy mas były o 24% wyższe niż w przypadku użycia macierzy diagonalnej. Dla porównania, różnice w wynikach w pierwszej częstotliwości drgań własnych rozszerzonego ośmiościanu tensegrity wyniosły około 3%. W pierwszej

postaci drgań własnych tego modułu zastrzały podlegają jedynie ruchowi postępowemu (bez obrotów).

4.4 Porównanie własności modułów w ujęciu kontynualnym

Struktura tensegrity jest skomplikowana zarówno pod względem geometrii, jak i nietypowego sposobu jej pracy. W celu lepszego zrozumienia zachowania konstrukcji proponuje się kontynualny opis własności modułów tensegrity. Umożliwi to w przyszłości wykorzystanie tego rodzaju modeli do projektowania wielomodułowych konstrukcji tensegrity typu belkowego, płytowego lub powłokowego. Ocena własności typowych modułów tensegrity pozwoli na ich dobór przy zastosowaniach w wymienionych strukturach wielomodułowych.

Celem budowy modelu są: ocena własności tensegrity, które odpowiadają typowym postaciom deformacji, ocena wpływu zróżnicowania cech cięgien i zastrzałów na własności modułu, ocena wpływu samonapężenia na deformację oraz porównanie własności modułów tensegrity. W związku z tym rozpatrywano przypadek ogólny, to jest bez sprecyzowanych wielkości przekrojów i materiałów elementów konstrukcyjnych. Ocenie poddano cztery moduły opisane w rozdziale 4.1. Wielkość elementów dobrano w ten sposób, aby miały zbliżone wymiary w każdym z kierunków. Wszystkie moduły wpisują się w sferę o promieniu R .

4.4.1 Model kontynualny modułów tensegrity

Podstawą opisu kontynualnego będzie porównanie energii sprężystej konstrukcji tensegrity w ujęciu MES z energią sprężystą bryły, zgodnie z liniową teorią sprężystości. Modele MES oparte są na sformułowaniu kratownicy z uwzględnieniem macierzy sztywności geometrycznej, natomiast kontynualny odpowiednik bazuje na symetrycznej teorii sprężystości [Green: 2002] [Gilewski: 2013b].

Energię sprężystą w liniowej teorii sprężystości (*LTS*) można wyrazić wzorem:

$$E_s^{LTS} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}^{LTS} \boldsymbol{\varepsilon} dV, \quad (4.2)$$

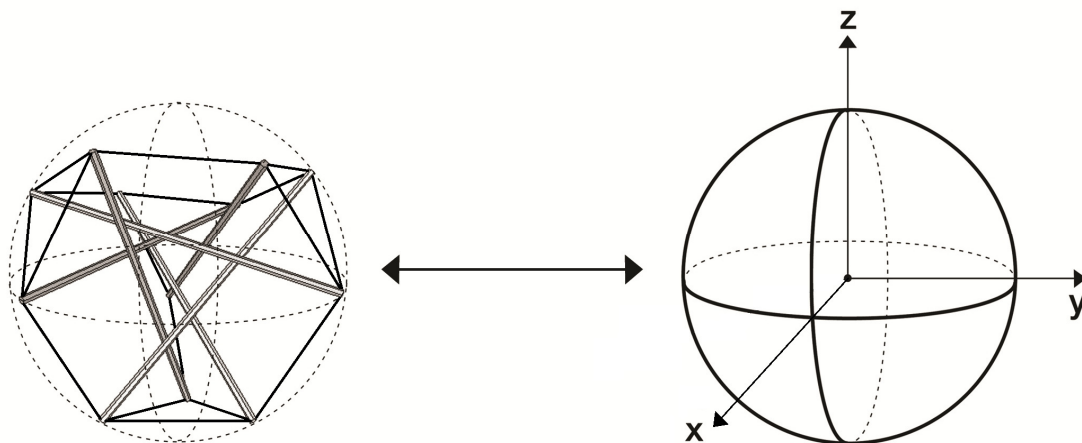
gdzie: $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$ – wektor zawierający odkształcenia, \mathbf{E}^{LTS} – macierz współczynników sprężystości (macierz reprezentacji tensora sprężystości).

Energia sprężysta struktury tensegrity w ujęciu MES ma postać formy kwadratowej wektora przemieszczeń węzłowych:

$$E_s^{MES} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}. \quad (4.3)$$

W macierzy \mathbf{K} uwzględniono część liniową oraz macierz sztywności geometrycznej \mathbf{K}_G .

Aby ocenić własności mechaniczne struktury tensegrity, proponuje się porównanie energii kuli (o promieniu R) o stałych odkształceniach w ramach teorii sprężystości oraz niepodpartej struktury tensegrity, której geometria zawarta jest w kuli (rys. 4.25).



Rys. 4.25 Tensegrity i kontinuum

Zatem energia sprężysta kuli o promieniu R wynosi:

$$E_s^{LTS} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}^{LTS} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}^{LTS} \boldsymbol{\varepsilon} \frac{4}{3} R^3. \quad (4.4)$$

Załóżmy, że współrzędne węzłów tensegrity wyrażone są za pomocą parametru R , wtedy współrzędne węzła i można zapisać w następujący sposób: $\{R\alpha_{xi}, R\alpha_{yi}, R\alpha_{zi}\}$. Aby porównać oba wyrażenia na energie sprężyste, parametry węzłowe zawarte w wektorze \mathbf{q} należy wyrazić przez średnie wartości przemieszczeń i ich pochodnych w środku kuli, przy wykorzystaniu szeregu Taylora:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) &= f(x, y, z) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\Delta z + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z)(\Delta x)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z)(\Delta y)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)(\Delta z)^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z)\Delta x \Delta z + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z)\Delta y \Delta z + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

Parametry węzła i można opisać przez wartości średnie w środku kuli, przyjmując $\Delta x = R\alpha_{xi}, \Delta y = R\alpha_{yi}, \Delta z = R\alpha_{zi}$.

W wyrażeniu na energię sprężystą tensegrity występują iloczyny pierwszych pochodnych przemieszczeń po wszystkich trzech zmiennych. Współczynniki występujące przy tych ilo-

czynach można przypisać odpowiednim współczynnikom macierzy sprężystości \mathbf{E}^{LTS} , jako współczynnikom występującym w rozwinięciu wyrażenia (4.2) przy tych samych iloczynach pochodnych przemieszczeń i określić tym samym cechy tensegrity odpowiadające poszczególnym stanom odkształcenia.

Jeżeli rozważany model jest prawidłowy i w związku z tym można porównać własności tensegrity z własnościami kuli w symetrycznej teorii sprężystości, to w wyrażeniu na energię sprężystą tensegrity powinny zanikać człony przy iloczynach przemieszczeń przez przemieszczenia i ich pochodne. W rozwinięciach energii sprężystej tensegrity pojawią się człony, w których występują wyższe niż pierwsza pochodne przemieszczeń. Człony te nie mieszczą się w zakresie symetrycznej teorii sprężystości i należy je uznać za parametry wyższego rzędu.

Rozważania dotyczące tensegrity można odnieść do jednego z typowych modeli konstytutywnych liniowej teorii sprężystości. Postać macierzy sprężystości ciała anizotropowego w notacji Voighta jest następująca (por. np. [Green: 2002] [Jemioło: 2012]):

$$\mathbf{E}_s^{LTS} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ & & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ & & & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ & & & & E_{55} & E_{56} \\ \text{sym.} & & & & & E_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Występuje tu 21 różnych współczynników. Wyróżnia się osiem rodzajów symetrii, które mogą wystąpić jako szczególne przypadki macierzy (4.6) [Chadwick: 2001]. Liczba różnych współczynników jest wtedy mniejsza i wynosi 13, 9, 6, 5, 3 lub 2. Szczególne postaci macierzy można znaleźć w literaturze [Chadwick: 2001] [Green: 2002] [Jemioło: 2012].

4.4.2 Analiza porównawcza

Analizę przeprowadzono na przykładzie modułów trójzastrzałowego graniastosłupa prawidłowego, rozszerzonego ośmiościanu, czworościanu ściętego i sześćo-ośmiościanu tensegrity. Moduły zostały wpisane w sferę o promieniu R . Przyjęto układy sił samonapężenia z dokładnością do mnożnika S tak, aby w zastrzałach występowało ściskanie, a w cięgnach rozciąganie. Zastosowano następujące oznaczenia:

$$k = \frac{(EA)_{Zastrzal}}{(EA)_{Ciegno}}, \quad (EA)_{Ciegno} = EA, \quad \sigma = \frac{S}{EA}. \quad (4.7)$$

Poniżej przedstawiono wyniki obliczeń uzyskane za pomocą programu do obliczeń symbolicznych Mathematica. Przyjęto układy współrzędnych wg rozdziału 4.1.

Trójostrzałowy graniastosłup prawidłowy tensegrity (*simplex*) (tab. 4.1)

$$\mathbf{E}_s^{LTS} = \begin{bmatrix} 3e_{12} & e_{12} & e_{13} & 0 & e_{15} & e_{15} \\ & 3e_{12} & e_{13} & 0 & -e_{15} & -e_{15} \\ & & e_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & e_{12} & -e_{15} & e_{15} \\ & & & & e_{13} & 0 \\ [sym. & & & & & e_{13} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

gdzie:

$$e_{12} = \frac{EA}{4/3 R^2} (1,13651 + 0,39677 k - 0,0483574 \sigma),$$

$$e_{13} = \frac{EA}{4/3 R^2} (0,22904 + 0,567009 k + 0,19343 \sigma),$$

$$e_{33} = \frac{EA}{4/3 R^2} (2,27944 + 0,405145 k - 0,386859 \sigma),$$

$$e_{15} = \frac{EA}{4/3 R^2} (-0,0363014 + 0,335389 k + 0,157045 \sigma).$$

Rozszerzony ośmiościan tensegrity (tab. 4.3)

$$\mathbf{E}_s^{LTS} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & e_{11} & e_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & e_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & e_{12} & 0 & 0 \\ & & & & e_{12} & 0 \\ [sym. & & & & & e_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

gdzie:

$$e_{11} = \frac{EA}{4/3 R^2} (4,38178 + 3,57771 k + 0,565685 \sigma),$$

$$e_{12} = \frac{EA}{4/3 R^2} (2,19089 - 0,282843 \sigma).$$

Czworościan ścięty tensegrity (tab. 4.5)

$$\mathbf{E}_s^{LTS} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & e_{11} & e_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & e_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & e_{12} & 0 & 0 \\ & & & & e_{12} & 0 \\ sym. & & & & & e_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

gdzie:

$$e_{11} = \frac{EA}{4/3 R^2} (2,63019 + 3,02144 k + 0,256576 \sigma),$$

$$e_{12} = \frac{EA}{4/3 R^2} (1,25816 + 0,419797 k - 0,128288 \sigma).$$

Sześćo-ośmiościan tensegrity (tab. 4.7)

$$\mathbf{E}_s^{LTS} = \begin{bmatrix} 4e_{23} & 2e_{23} & 2e_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & 5e_{23} & e_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & 5e_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2e_{23} & 0 & 0 \\ & & & & 2e_{23} & 0 \\ sym. & & & & & e_{23} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

gdzie:

$$e_{23} = \frac{EA}{4/3 R^2} (1,00000 + 0,866025 k).$$

Moduł *simplex* można scharakteryzować za pomocą największej liczby współczynników sprężystości spośród badanych struktur. W tym przypadku otrzymano najbogatszy opis własności tensegrity, zdefiniowany 4 różnymi współczynnikami sprężystości. Niektóre z nich rosną wraz ze wzrostem sił samonapężenia, inne maleją. Podobne wyniki można otrzymać dla analogicznych modułów o większej liczbie zastrzałów. Liczba współczynników i ich układ, w szczególności wyrazów na diagonalu macierzy \mathbf{E}_s^{LTS} (4.8) oraz w jej pierwszej części, mogą sugerować właściwości sprężyste zbliżone do izotropii poprzecznej. Wyróżnienie jednego kierunku (z) wynika z geometrii modułu. Opis modułu różni się jednak rozkładem współczynników i jest bogatszy od opisu izotropii poprzecznej o współczynnik e_{15} , który nie występuje w opisie tego rodzaju modelu konstytutywnego.

Drugi i trzeci moduł, pomimo ich złożoności, można scharakteryzować za pomocą jedynie dwóch współczynników sprężystości, z których jeden rośnie, a drugi maleje wraz ze wzrostem sił samonapężenia. Chociaż do opisu obu konstrukcji potrzeba jedynie dwóch niezależnych współczynników, właściwości sprężystych modułu nie można uznać za izotropowe. Rozkład współczynników w tensegrity jest zupełnie inny niż w izotropii. Występowanie tak niewielu współczynników wynika z symetrii względem środka sfery opisanej na module oraz z jednakowej długości elementów.

Czwarty z analizowanych modułów można opisać za pomocą jednego paramateru, który nie zależy od stanu samonapężenia. Wynik jest nieco zaskakujący i wynika zapewne z innej od pozostałych struktury modułu, w którym przenikają się sztywne trójkąty.

Wpływ samonapężenia na własności tensegrity różni się w zależności od modułu. Na przykład w module *simplex* wpływ samonapężenia jest około trzykrotnie większy w kierunku osi z układu współrzędnych niż w pozostałych kierunkach. Moduły oparte na rozszerzonym ośmiościanie i czworościanie ściętym we wszystkich kierunkach są jednakowo czułe na wpływ samonapężenia. Nietypowa liczba różnych stałych wskazuje, że trudno jest określić właściwości modułów tensegrity jako jeden z przypadków grup symetrii. Należy raczej określać je jako symetria o szczególnych własnościach materiałowych, w których współczynniki są jednakowe lub zerowe.

Poszczególne współczynniki macierzy sprężystości modelu kontynualnego opisują zdolność modułów tensegrity do typowych deformacji zgodnie z wyrażeniem (4.2), które można przedstawić w postaci:

$$E_s^{LTS} = \frac{1}{2} \int_V \left(\begin{array}{l} E_{11}\varepsilon_x^2 + E_{22}\varepsilon_y^2 + E_{33}\varepsilon_z^2 + E_{44}\gamma_{xy}^2 + E_{55}\gamma_{xz}^2 + E_{66}\gamma_{yz}^2 + 2E_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y + \\ + 2E_{13}\varepsilon_x\varepsilon_z + 2E_{23}\varepsilon_y\varepsilon_z + 2E_{45}\gamma_{xy}\gamma_{xz} + 2E_{46}\gamma_{xy}\gamma_{yz} + 2E_{56}\gamma_{xz}\gamma_{yz} + \\ + 2E_{14}\varepsilon_x\gamma_{xy} + 2E_{15}\varepsilon_x\gamma_{xz} + 2E_{16}\varepsilon_x\gamma_{yz} + 2E_{24}\varepsilon_y\gamma_{xy} + 2E_{25}\varepsilon_y\gamma_{xz} + \\ + 2E_{26}\varepsilon_y\gamma_{yz} + 2E_{34}\varepsilon_z\gamma_{xy} + 2E_{35}\varepsilon_z\gamma_{xz} + 2E_{36}\varepsilon_z\gamma_{yz} \end{array} \right) dV. \quad (4.12)$$

Obecność samonapężenia może zwiększać lub zmniejszać energię odkształcenia określonego rodzaju. Z punktu widzenia przyszłej konstrukcji inżynierskiej najważniejsza jest ocena jednorodnych stanów deformacji, za które odpowiadają współczynniki diagonalne. Ocena modułów na podstawie modelu kontynualnego może pozwolić na wybór optymalnych z punktu widzenia stawianych im celów modułów, wielkości ich elementów, konfiguracji i poziomu samonapężenia w konstrukcjach wielomodułowych. Otwartym pozostaje pytanie o sposób łączenia modułów, tak aby nie utracić własności modułu pojedynczego.

Rozdział 5

Możliwości zastosowania tensegrity w budownictwie mostowym

Moduły tensegrity oraz konstrukcje powstałe na skutek ich połączenia pozwalają na dość zróżnicowane kształtowanie formy geometrycznej konstrukcji. Poprzez powiększenie tej grupy o konstrukcje o cechach tensegrity otrzymuje się stosunkowo szerokie spektrum możliwości zastosowania konstrukcji tensegrity w budownictwie. Nie sposób jednak rozważać jedynie zagadnień geometrycznych – bez analizy ilościowej, polegającej na badaniu odpowiedzi konstrukcji na realne obciążenia wynikające z przypisywanej jej funkcji. W niniejszym rozdziale skupiono się na pierwszej grupie zagadnień. Odpowiedź przykładowych konstrukcji na podstawowe obciążenia zostanie przedstawiona w rozdziale 6. Warto jednak podkreślić, że ze względu na brak dostatecznej sztywności konstrukcji, rozważania dotyczące konstrukcji mostowych ograniczono jedynie do kładek dla pieszych i kładek pieszo-rowerowych.

5.1 Konstrukcje jednomodułowe

Ze względu na specyfikę kształtu konstrukcji mostowych, w których jeden bądź dwa wymiary są znacznie mniejsze od pozostałych, zastosowanie pojedynczych modułów tensegrity do konstrukcji przęseł wydaje się być nieuzasadnione. Podstawowe moduły tensegrity mają kształt o porównywalnych wymiarach we wszystkich trzech kierunkach w przestrzeni trójwymiarowej. Co prawda istnieją tensegrity o rozbudowanej, skomplikowanej geometrii, mogące przyjmować praktycznie dowolne kształty w przestrzeni, jednak wydzielenie w nich modułów składowych nie jest możliwe. Ogólnie można stwierdzić, że mają one charakterystykę podobną do niektórych konstrukcji wielomodułowych, takich jak wieża Snelsona opisana w kolejnej części pracy.

Możliwe jest natomiast zastosowanie modułów typu *simplex* lub pokrewnych (o innej liczbie zastrzałów) jako elementów przede wszystkim ściskanych, tj. podpór pośrednich obiektów mostowych. W takim wypadku można zastosować moduł o celowo wydłużonej wysokości, chociaż ze względów statyczno-wytrzymałościowych zabieg ten musi być ograniczony (wydłużenie zastrzałów i zwiększenie sił ściskających). W konsekwencji podpory mają

wysoki stosunek pola podstawy do wysokości i ich zastosowanie jest ograniczone jedynie do niewysokich podpór.

5.2 Konstrukcje wielomodułowe

Znacznie większe możliwości zastosowania mają konstrukcje wielomodułowe, ze względu na dość dużą dowolność w kształtowaniu ich formy. Moduły tensegrity można połączyć między innymi w sposób liniowy, uzyskując struktury możliwe do wykorzystania w konstrukcjach mostowych jako belki lub słupy oraz w sposób płytowy do konstrukcji płyt pomostów. Poniżej przedstawiono różne sposoby łączenia modułów tensegrity wraz z przykładami obrazującymi różnorodność stosowanych metod.

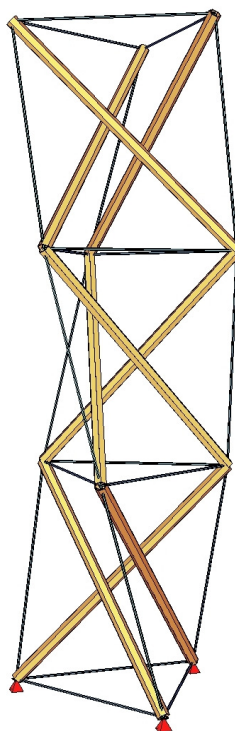
5.2.1 Słupy

Do budowy słupów możliwych do zastosowania jako podpory pośrednie obiektów mostowych, podobnie jak w przypadku konstrukcji jednomodułowych, można użyć modułów typu *simplex* lub pokrewnych. W takich zastosowaniach możliwe jest również wykorzystanie innych rodzajów modułów, jednak tensegrity oparte na graniastosłupach wydają się odpowiadać tej funkcji w pewnym sensie w sposób naturalny. Mają one wyraźnie określone i odpowiednio rozbudowane podstawy, dzięki czemu istnieje możliwość ich postawienia na płaskim podłożu (fundamencie), bez konieczności stosowania dodatkowych elementów, uzyskując słup o schemacie statycznym zbliżonym do utwierdzonego u podstawy.

Nasuwa się pytanie o sposób połączenia modułów w celu uzyskania konstrukcji liniowej. Rozpatrzmy graniastosłup prawidłowy tensegrity o trzech zastrzałach (*simplex*). W tym przypadku można zastosować jeden w dwóch sposobów połączenia modułów.

Połączenie węzeł-węzeł

Moduły można ustawić na sobie, łącząc węzły górnej podstawy dolnego modułu z dolną podstawą modułu górnego. Połączenie następuje bez tworzenia podwójnych węzłów lub podwójnych cięgien, zatem górna podstawa jednego modułu stanowi zarazem dolną podstawę drugiego modułu.



Rys. 5.1 Wieża z modułów typu *simplex* – połączenie węzeł-węzeł

Uzyskana w ten sposób konstrukcja zachowuje w sobie cechy składowych modułów. To znaczy, że w dalszym ciągu można w niej wyodrębnić taką liczbę mechanizmów infinitezmalnych i stanów samonapężenia, ile modułów zostało z sobą połączonych. Zatem każdy moduł można indywidualnie sprężyć stanem samonapężenia, co nie powoduje żadnych przemieszczeń w konstrukcji, a siły sprężenia występują jedynie w elementach w obrębie tego modułu. Mechanizmy infinitezmalne wiążą się z obrotami każdej z podstaw (poza podstawą podpartą) względem osi słupa.

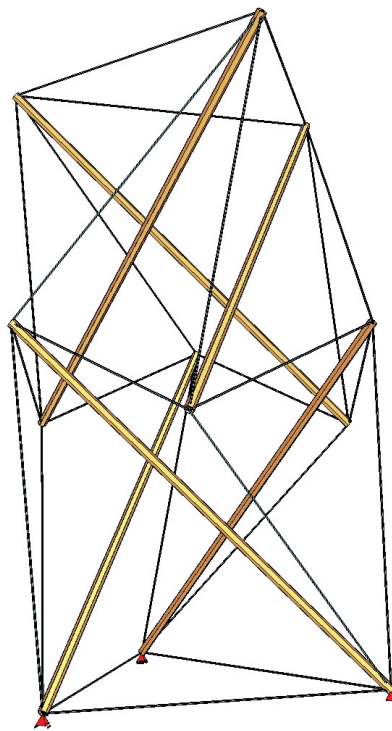
Aby konstrukcja pod wpływem obciążenia pionowego nie skręcała się nadmiernie w jednym kierunku, kolejne moduły mogą być na zmianę lewo- i prawoskrętne. Takie rozwiązanie zastosowano w przypadku wieży w targowej w Rostocku (rys. 2.10).

Pomimo połączenia wielu elementów ściskanych w pojedynczych węzłach (tensegrity klasy 2 wg Skeltona i de Oliveiry [Skelton: 2009a]) w dalszym ciągu mamy do czynienia z czystym tensegrity (K+ S+ M+ N+ W+ C+), ponieważ oprócz występowania wspomnianych mechanizmów i stanów samonapężenia, konstrukcja ma pozostałe cechy tensegrity – jest kratownicą z nieciągłym układem elementów ściskanych wewnątrz ciągłego układu ciągłych.

Połączenie zastrzał-cięgno

W poprzednim rozwiązaniu, chociaż zachowana jest „czystość” konstrukcji tensegrity, łączonych jest więcej niż jeden elementów ściskanych w węźle. W ten sposób traci się wizualną lekkość związaną z występowaniem zastrzałów „zawieszonych w powietrzu”, utrzymywanych jedynie przez cięgna. Ponadto niektóre definicje tensegrity nakładają wymóg występowania tylko jednego elementu ściskanego w węźle.

Moduły typu *simplex* można połączyć w inny sposób, tak jak dokonał tego Kenneth Snelson w swoim patencie [Snelson: 1965] i w rzeźbie Needle Tower (rys. 2.10). W wieży Snelsona dolne węzły górnego modułu trafiają na środki cięgien dolnego modułu. Można powiedzieć, że moduły na siebie zachodzą – górne węzły dolnego modułu i dolne węzły górnego modułu nie są w jednej płaszczyźnie. W konstrukcji stosuje się dodatkowe cięgna, łączące dolne węzły górnego modułu z dolną podstawą dolnego modułu.



Rys. 5.2 Wieża Snelsona – połączenie zastrzał-cięgno

Chociaż proces powstania takiej konstrukcji został przedstawiony jako łączenie modułów, to wieża Snelsona stanowi całkowicie nową konstrukcję tensegrity, o cechach innych niż wynikałoby to jedynie ze złożenia z sobą pojedynczych modułów. Posiada tylko jeden mechanizm infinitezymalny, stabilizowany przez tylko jeden stan samonapężenia, niezależnie od liczby połączonych modułów. Poszukiwanie formy tego tensegrity było przedmiotem rozważań wielu badaczy [Tibert: 2003a]. Wieżę Snelsona można zatem rozpatrywać zarówno jako

złożoną z modułów, jak również jako samodzielną konstrukcję tensegrity, niebędącą modułem i należącą do obszernej grupy tensegrity nieopartych na bryłach geometrycznych.

Podział metod łączenia modułów na typy węzeł-węzeł i zastrzał-cięgno dotyczą nie tylko słupów, ale wszystkich konstrukcji wielomodułowych. Również pozostałe rozważania dotyczące dodawania dodatkowych elementów przy łączeniu modułów czy zachowania cech indywidualnego modułu w gotowej konstrukcji można uogólnić na inne rodzaje wielomodułowych tensegrity.

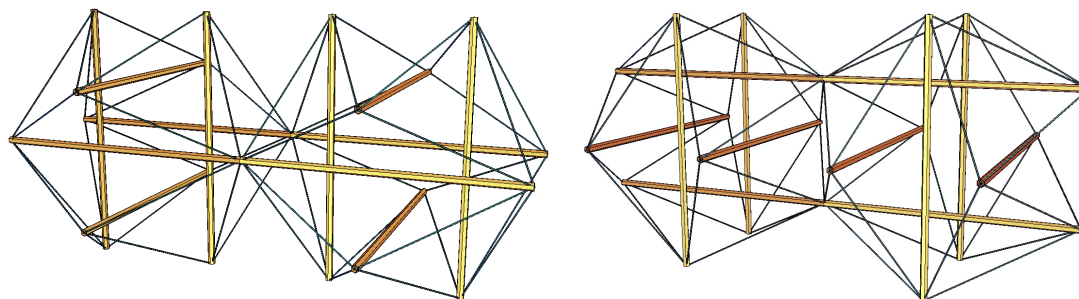
5.2.2 Przęsła

Elementem decydującym o klasyfikacji obiektu mostowego do określonego typu konstrukcji są jego przęsła, ponieważ pełnią kluczową rolę w podstawowej funkcji obiektu, jaką jest przeprowadzenie ruchu nad przeszkodą. Moduły tensegrity z powodzeniem mogą być łączone liniowo i tworzyć struktury poddawane zginaniu.

Podobnie jak w przypadku słupów, można łączyć wiele rodzajów modułów. Ze względu na prostopadłość zastrzałów rozszerzony ośmiościan tensegrity jest łatwy w formowaniu podłużnych konstrukcji (jak również jego wersje pokrewne z dalszym „rozsuwaniem” – rysunek 4.3). Z kolei obecność czterech węzłów w jednej płaszczyźnie w sześćo-ośmiościanie tensegrity pozwala na łatwe łączenie modułów, a wolna przestrzeń w jego środku pozwala na stworzenie konstrukcji z jazdą pośrednią. Poniższe przykłady mają na celu wskazanie możliwości i różnorodności sposobów łączenia modułów i nie wyczerpują listy możliwych rozwiązań.

Rozszerzony ośmiościan tensegrity – łączenie z użyciem dodatkowych elementów

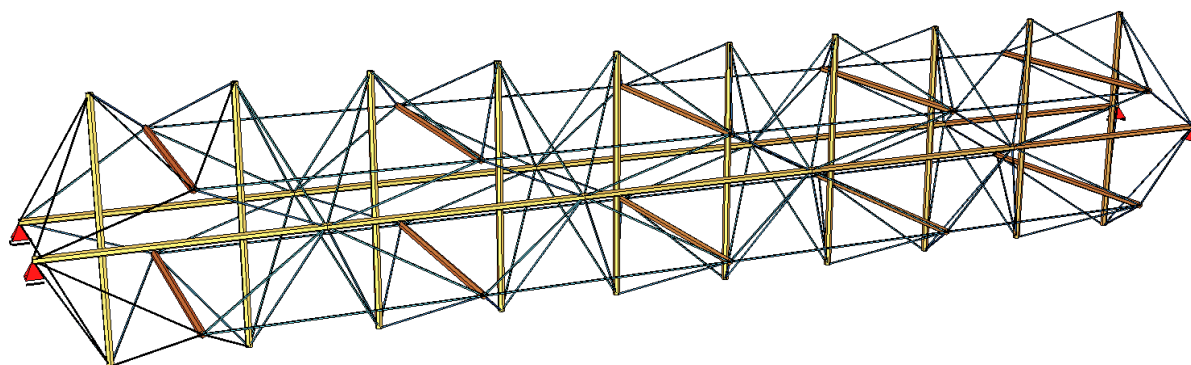
Chociaż rozszerzony ośmiościan tensegrity dzięki właściwościom geometrycznym i czytelnemu układowi sił samonapężenia wydaje się być w sposób naturalny modułem przydatnym z punktu widzenia budownictwa, to już sposób łączenia modułów tego typu jest kwestią wymagającą przemyślenia. Aby zachować prostopadłość elementów, należy łączyć z sobą moduły ustawione w ten sam sposób, poprzez zetknięcie z sobą dwóch węzłów (rys. 5.3).



Rys. 5.3 Połączenie rozszerzonych ośmiościanów tensegrity

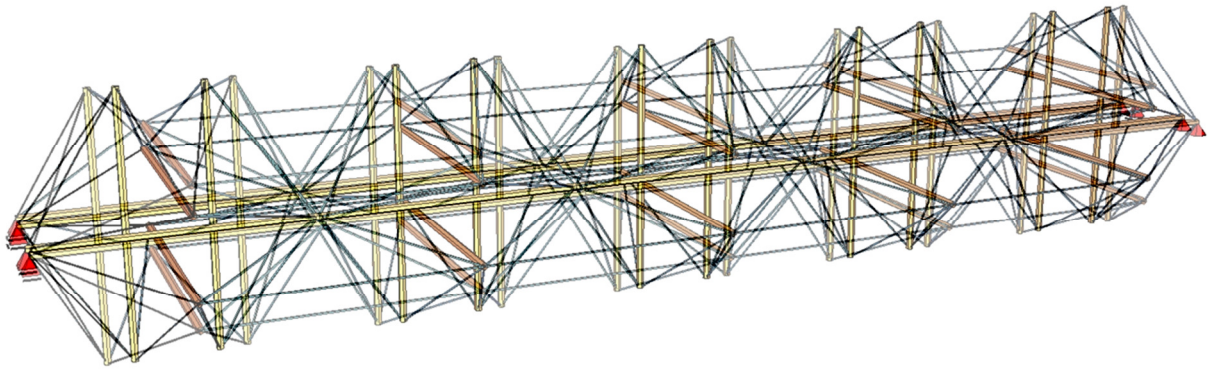
Ten sposób połączenia modułów wiąże się z powstaniem mechanizmów skończonych, chyba że połączenie będzie sztywne. Wtedy jednak zastrzały będą zginane, a więc konstrukcja przestanie być kratownicą i tensegrity. Zatem jeśli ograniczymy rozważania do kratownic, to aby konstrukcja mogła być użyteczna do zastosowań inżynierskich, niezbędne jest zastosowanie dodatkowych elementów łączących moduły składowe.

Rozpatrzmy dwa sposoby liniowego połączenia rozszerzonych ośmiościanów tensegrity za pomocą dodatkowych cięgien. Pierwszą z nich przedstawiono na rysunku 5.4 (I typ).

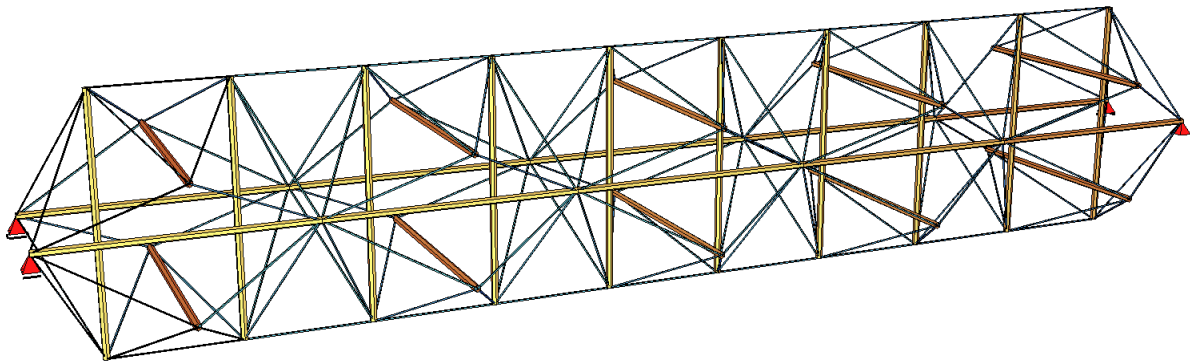


Rys. 5.4 Dodatkowe cięgna łączące moduły – I typ

Połączenie I typu polega na dodaniu cięgien łączących z sobą węzły poziomych, poprzecznych zastrzałów sąsiednich modułów. W ten sposób usztywnia się połączenie modułów, likwidując mechanizm, który umożliwiał ich wzajemny obrót wokół osi przechodzącej przez wspólne dla modułów węzły. Choć zostały dodane nowe cięgna, konstrukcja pozostaje czystym tensegrity, ponieważ występuje w niej mechanizm infinitezymalny (rys. 5.5), jak i wszystkie pozostałe cechy tensegrity ($K+ S+ M+ N+ W+ C+$). Dzieje się tak za sprawą przemyślanego sposobu połączenia modułów. W przypadku jak na rysunku 5.3 mechanizmy infinitezymalne pojedynczych modułów zastąpione są przez jeden wspólny mechanizm o analogicznej postaci (por. rys. 4.18), tj. wszystkie zastrzały poruszają się w kierunku środków sfer opisanych na module. Ze względu na połączenie zastrzałów mechanizmy te nie mogą być niezależne. Dodatkowe cięgna zostały umieszczone między węzłami, które przy takiej postaci mechanizmu są w stałej odległości. Dlatego dodatkowe elementy nie są rozciągane ani ścisane w przypadku działania mechanizmu infinitezymalnego, a więc nie usztywniają go.



Rys. 5.5 Połączenie modułów I typu – mechanizm infinitymalny



Rys. 5.6 Dodatkowe cięgna łączące moduły – II typ

Inna sytuacja występuje w przypadku, gdy w celu likwidacji mechanizmów skończonych połączone zostaną węzły pionowych zastrzałów – II typ (rys. 5.6). Wtedy mechanizm infinitymalny nie istnieje, ponieważ jego postać musiałaby się wiązać ze zmianą długości dodatkowych cięgien. Jest to konstrukcja o cechach tensegrity, ponieważ poza brakiem mechanizmu infinitymalnego ma wszystkie pozostałe cechy tensegrity ($K+ S+ M- N+ W+ C+$). W obu przypadkach w każdym z modułów występuje oddzielny stan samonapężenia, nie wpływający na pozostałe elementy.

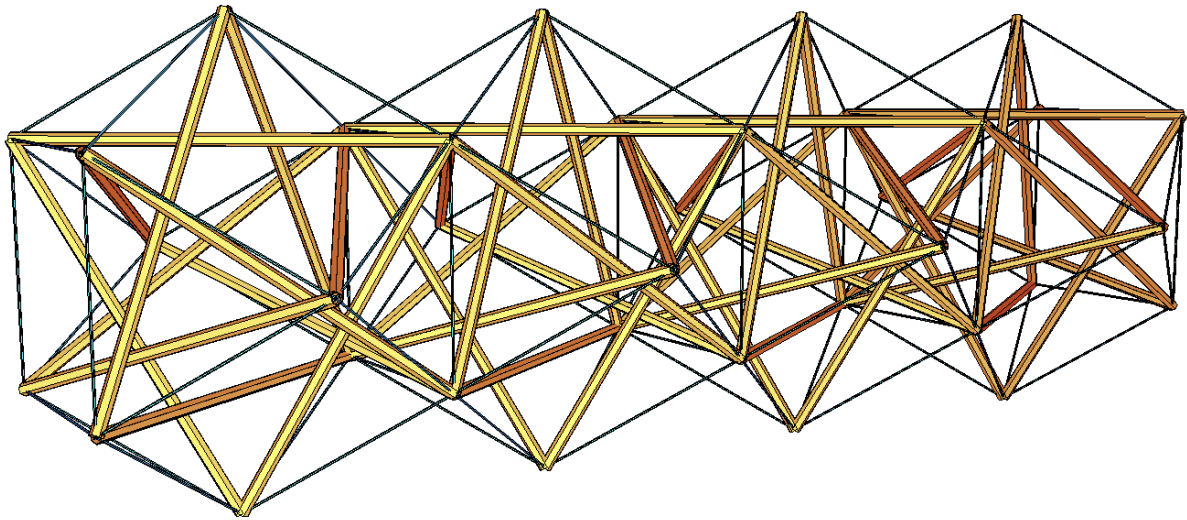
Chociaż pierwszy ze sposobów połączenia modułów, w przeciwieństwie do drugiego, nie likwiduje mechanizmu infinitymalnego, a powstała konstrukcja jest czystym tensegrity, to należy zadać pytanie, czy różnica we właściwościach tensegrity ma wpływ na zachowanie się tak powstałej konstrukcji inżynierskiej. Jednym z wniosków płynących z analizy wybranych modułów tensegrity (rozd. 4) jest fakt usztywniania konstrukcji wraz ze wzrostem sił samonapężenia. Przykłady wykazały jednak, że wpływ ten jest istotny jedynie w przypadku obciążenia działającego zgodnie z kierunkiem przemieszczeń w mechanizmie infinitymalnym oraz w przypadku zgodnej z nim postaci drgań własnych. Sama zaś konstrukcja odznacza się znacznie większą sztywnością w pozostałych kierunkach. Zatem aby w pełni wykorzystać właściwości tensegrity, w tym silny wpływ samonapężenia na sztywność konstrukcji, koniecz-

ne jest tworzenie konstrukcji z zachowaniem mechanizmów infinitezymalnych przy odpowiednim sposobie przyłożenia obciążenia. Z drugiej zaś strony w zastosowaniach inżynierskich najczęściej pożądaną cechą konstrukcji jest jej duża sztywność, na którą niekorzystnie wpływają mechanizmy infinitezymalne. Wydaje się więc, że wykorzystanie konstrukcji tensegrity w budownictwie może odbywać się dwutorowo. Z jednej strony w typowych zastosowaniach, gdzie sztywność konstrukcji jest podstawowym kryterium, zastosowane mogą być konstrukcje o cechach tensegrity bez mechanizmów infinitezymalnych lub z dodatkowymi elementami usztywniającymi je. Z drugiej strony w konstrukcjach o specjalnym przeznaczeniu – konstrukcjach rozwijanych, sterowanych, „inteligentnych”, możliwość stosunkowo łatwego sterowania właściwościami konstrukcji za pomocą sił samonapężenia jest cechą bardzo pożądaną. Wymaga to występowania mechanizmów infinitezymalnych, jednak nie pozostaje bez wpływu na sztywność konstrukcji.

W przedstawionych rozwiązaniach połączenia rozszerzonych ośmiościanów tensegrity własności modułów składowych mają znaczenie lokalne. Globalna sztywność konstrukcji gwarantowana jest głównie przez dodatkowe elementy. Konstrukcję można porównać do brył sztywnych połączonych za pomocą zewnętrznych cięgien. Załóżmy, że obciążenie zewnętrzne miałyby być przyłożone pionowo do górnych węzłów (kierunek niezgodny z postacią mechanizmu infinitezymalnego). W tym przypadku nie wydaje się, aby łączenie modułów z zachowaniem mechanizmu infinitezymalnego lub bez miało znaczenie dla globalnej, giętej sztywności konstrukcji. Cechy tensegrity nie są jednak bez znaczenia w tego typu konstrukcjach, ponieważ nie można zapominać o innej, podstawowej własności mechanicznej tych konstrukcji, czyli o istnieniu stanu samonapężenia w modułach. Umożliwia on wprowadzenie dowolne dużych sił (z ograniczeniem wytrzymałościowym) sprężających składowe moduły, zapewniając, że nawet pod wpływem dużych obciążeń zewnętrznych ciągną pozostają rozciągane. Przedstawione konstrukcje, mimo zastosowania dodatkowych elementów, w dalszym ciągu są lekkie i występuje w nich znaczna przewaga elementów rozciąganych nad ścisłymi. Zlikwidowany w II typie połączenia mechanizm infinitezymalny powstał jako naturalna konsekwencja procesu poszukiwania formy tensegrity modułu poprzez minimalizację (lub maksymalizację) długości elementów kratownicy i ma kluczowe znaczenie dla istnienia w konstrukcji elementów wyłącznie ścisłanych lub wyłącznie rozciąganych. Choć konstrukcja nie jest już czystym tensegrity, to cechy modułów składowych rzutują na jej właściwości. Powyższe wnioski zostaną zweryfikowane numerycznie i uściślone w rozdziale 6.2.

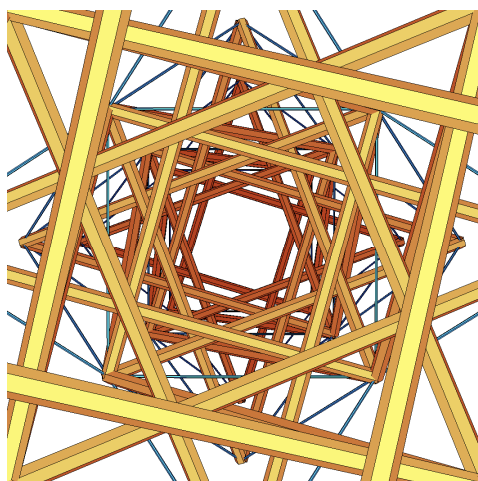
Sześćcio-ośmiościan tensegrity – łączenie bez dodatkowych elementów

Geometria sześćcio-ośmiościanu tensegrity pozwala na proste połączenie modułów tego typu, bez konieczności stosowania dodatkowych elementów łączących, podobnie jak w przypadku wieży złożonej z ustawionych na sobie modułów typu *simplex*. Połączenie następuje poprzez 4 węzły znajdujące się w jednej płaszczyźnie (rys. 5.7). Ponieważ węzły należące do dwóch sąsiadujących modułów są połączone między sobą cięgnami, to cięgna te należą do dwóch modułów jednocześnie.



Rys. 5.7 Połączenie sześćcio-ośmiościanów tensegrity

Konstrukcja może być podparta na kilka sposobów. Podparcie może nastąpić jedynie w czterech skrajnych dolnych węzłach, we wszystkich ośmiu skrajnych węzłach (dwa zewnętrzne kwadraty) lub tylko na jednym końcu (jeden zewnętrzny kwadrat). We wszystkich przypadkach konstrukcja nie jest czystym tensegrity, ale ma jego cechy ($K + S + M - N + W + C +$). W obiekcie inżynierskim opartym na takiej strukturze pomost może zostać umieszczony na górnych węzłach. Możliwe jest również zaprojektowanie obiektu z jazdą pośrednią, przy wykorzystaniu wolnej przestrzeni znajdującej się wewnątrz modułów (rys. 5.8). Przestrzeń można zwiększyć, stosując zmienione proporcje lub podobne struktury o większej niż 4 liczbie węzłów w podstawie (konstrukcje, które nie są czystymi tensegrity). Interesujące może być zastosowanie jazdy pośredniej i podparcia jednostronnego, które można wykorzystać w konstrukcjach rozwijanych, o schemacie wspornikowym w fazie rozwijania.



Rys. 5.8 Wolna przestrzeń wewnątrz sześćo-ośmiościanu tensegrity

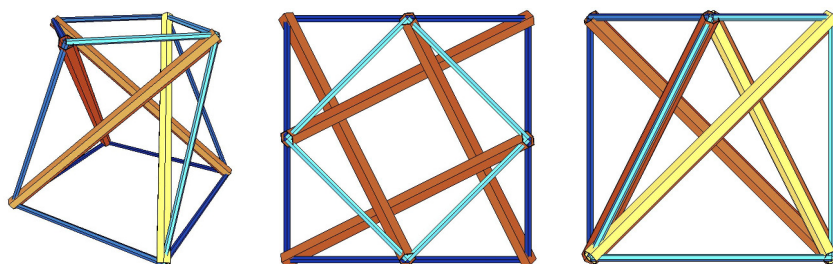
Warto zwrócić uwagę na problem wprowadzenia wstępnego prężenia siłami samonapężenia w tego typu rozwiązaniu. Pojedynczy moduł ma aż 7 stanów samonapężenia, a więc wprowadzenie siły do jednego elementu nie wprowadza automatycznie sił do pozostałych elementów zgodnie z pożądanymi znakami sił (por. rozdz. 4.1.4). Co więcej, niektóre elementy są wspólne dla sąsiadujących modułów, a więc w przypadku prefabrykacji sprężonych modułów konieczne jest podwojenie niektórych cięgien, albo trzeba dokonać sprężenia całej konstrukcji *in situ*. Nie można wykluczyć, że z powodów technologicznych wprowadzenie wstępnego sprężenia zgodnego ze stanem samonapężenia będzie niemożliwe.

5.2.3 Płyty

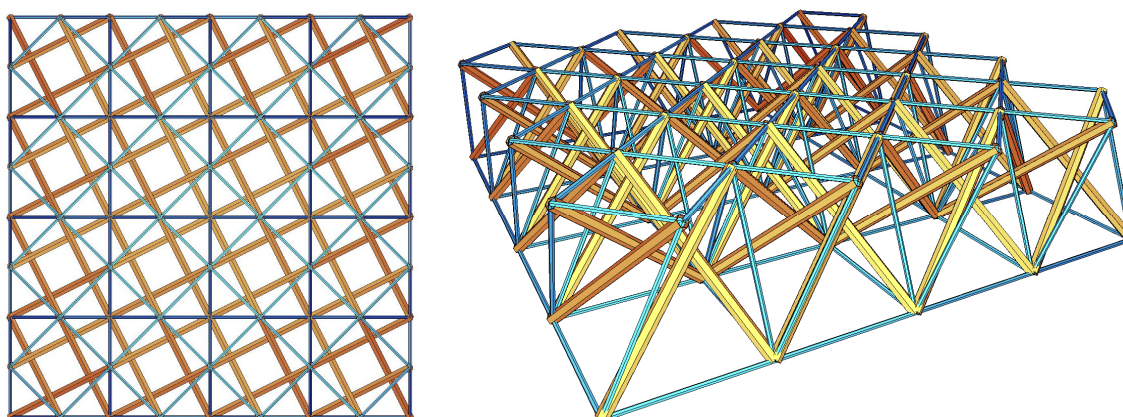
W rozdziale 2.2.3 przedstawiono przykłady zaczerpnięte z literatury, dotyczące przestrzennych kratownic dwuwarstwowych. Tego typu struktury mogą być wykorzystane do konstrukcji płyt pomostów lub ustrojów płytowych. W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną zagadnienia związane z wybranymi przykładami takich konstrukcji.

Płyta ze zmodyfikowanych czterostrzałowych modułów typu *simplex*

Konstrukcję tego typu można znaleźć między innymi w pracach [Wang: 1998] [Raducanu: 2001]. Modułem podstawowym jest czterostrzałowy moduł typu *simplex*, w którym górna podstawa została zmniejszona w ten sposób, że jej rzut wpisuje się w obrys dolnej podstawy (rys. 5.9). Kwadratowe podstawy, ze względu na prostopadły układ, pozwalają na stosunkowo łatwe budowanie struktur płytowych. Połączenie modułów nie wymaga zastosowania dodatkowych elementów, a cięgna dolnych podstaw są wspólne dla sąsiednich modułów (rys. 5.10). Uzyskana konstrukcja nie ma mechanizmów infinytezymalnych i jest konstrukcją o cechach tensegrity ($K+ S+ M- N+ W+ C+$).



Rys. 5.9 Zmodyfikowany, czterozastrzałowy moduł typu *simplex* do konstrukcji płytowych – aksonometria, widok z góry, widok z boku



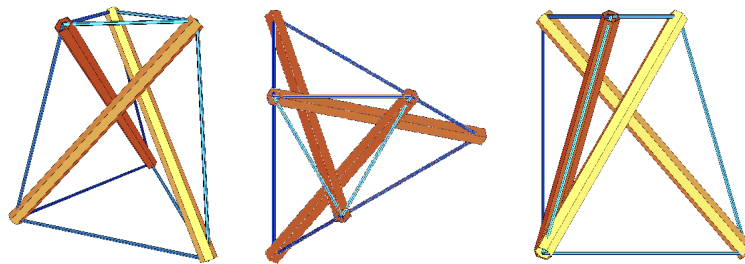
Rys. 5.10 Płyta ze zmodyfikowanych, czterozastrzałowych modułów typu *simplex* – widok z góry, perspektywa

Każdy z modułów składowych, podobnie jak w przypadku połączeń liniowych, pomimo wspólnych węzłów i cięgien z pozostałą częścią konstrukcji zachowuje indywidualny stan samonapężenia. Z definicji stan samonapężenia nie oddziałuje na pozostałą część konstrukcji, ponieważ wszystkie siły działające w tym stanie równoważą się, a zatem nie powodują przemieszczeń węzłów (pomijając efekt skrócenia elementów). O ile jednak w przypadku łączenia z sobą modułów rozszerzonego ośmiościanu tensegrity za pomocą dodatkowych cięgien z powodzeniem można sprefabrykować poszczególne części, o tyle w przypadku czterozastrzałowych modułów typu *simplex* jest inaczej. Występowanie wspólnych cięgien dolnych podstaw wiąże się z koniecznością ich dublowania lub wykonania sprężenia w gotowej strukturze, podobnie jak przy łączeniu sześćo-ośmiościanu tensegrity. W tym wypadku sprężenie w istniejącej konstrukcji jest ułatwione, ze względu na występowanie pojedynczych stanów samonapężenia w każdym z modułów i możliwość ich sprężenia poprzez naciąg pojedynczego cięgna. Brak dodatkowych elementów ma również swoje zalety. Przede wszystkim połączenie wcześniej przygotowanych i sprężonych modułów kończy fazę budowy związaną z konstrukcją nośną i jej sprężeniem. W przypadku takim jak przeszło z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity zawsze konieczne jest ostateczne sprężenie dodatkowych cięgien po połączeniu modułów składowych.

Płyty ze zmodyfikowanych trójzastrzałowych modułów typu *simplex*

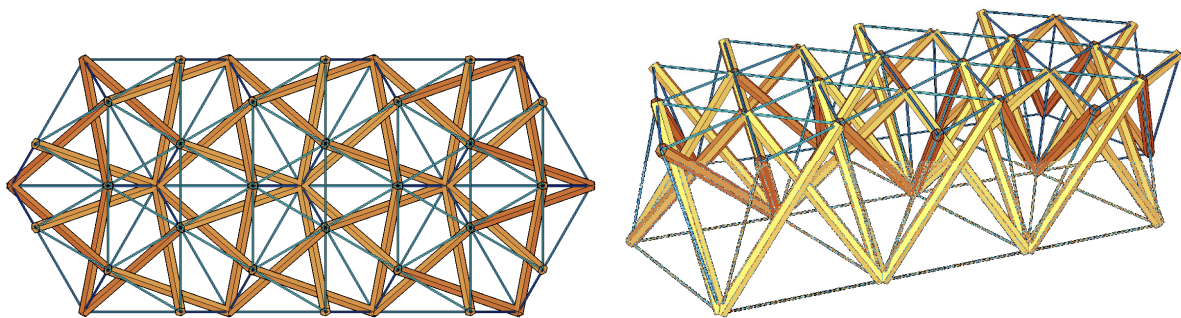
W literaturze przedstawiono kilka prób tworzenia płyt z trójzastrzałowych modułów typu *simplex* w układzie zastrzał-ciężno [Wang: 1998] [Kono: 1999]. Spośród bardzo wielu różnych możliwości łączenia tego typu modułów poniżej przedstawiono dwie odmienne koncepcje połączenia typu węzeł-węzeł z użyciem lub bez dodatkowych cięgien (por. [Gilewski: 2013a]).

Podobnie jak w poprzednim przykładzie posłużono się modułem typu *simplex* o górnej podstawie zmniejszonej tak, że jej rzut wpisuje się w obrys dolnej podstawy (rys. 5.11). Moduły połączone z sobą w węzłach większych podstaw. Jako uzupełnienie przestrzeni między mniejszymi podstawami zastosowano dodatkowe cięgia (rys. 5.12).

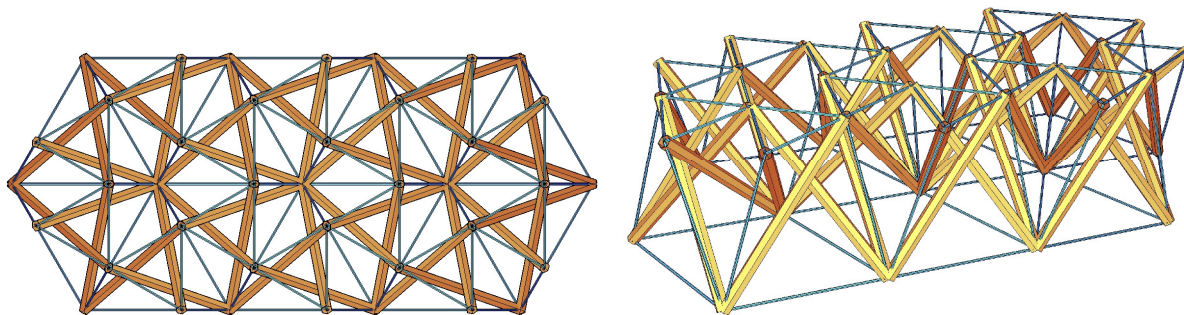


Rys. 5.11 Zmodyfikowany, trójzastrzałowy moduł typu *simplex* do konstrukcji płytowych – perspektywa, widok z góry, widok z boku

Właściwości konstrukcji są podobne do pierwszego przykładu wielomodulowej płyty. Tu również mamy do czynienia z konstrukcją o cechach tensegrity ($K+S+M-N+W+C+$), z indywidualnymi stanami samonapężenia modułów. Występują jednak dodatkowe cięgia łączące mniejsze podstawy modułów.

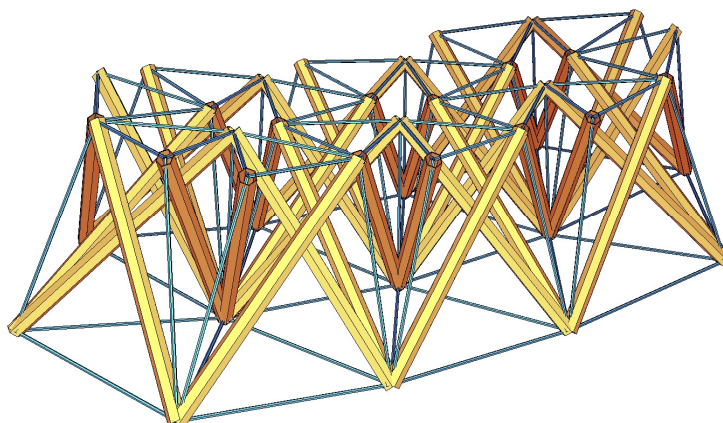


Rys. 5.12 Płyta ze zmodyfikowanych, trójzastrzałowych modułów typu *simplex* – widok z góry, perspektywa



Rys. 5.13 Płyta ze zmodyfikowanych, trójzastrzałowych modułów typu *simplex* bez dodatkowych cięgien – widok z góry, perspektywa

Jeśli nie zastosuje się dodatkowych cięgien, uzyskuje się strukturę przedstawioną na rysunku 5.13. Brak dodatkowych elementów sprawia, że siatka cięgien górnej płaszczyzny traci swoją regularność – nie składa się już wyłącznie z jednakowych trójkątów równobocznych. Natomiast w takim rozwiązaniu występuje jeden mechanizm infinitezymalny, który można usztywnić poprzez wprowadzenie sił samonapężenia. W obrębie modułów mechanizm polega na obrocie ich górnych podstaw, a globalnie jego charakter jest giętny (rys. 5.14). Jest to przykład płytowej konstrukcji wielomodułowej, która zachowuje wszystkie cechy tensegrity, a zatem jest to „czyste tensegrity”. Postać mechanizmu sprawia, że w takim ustroju możliwa jest zmiana jego sztywności giętniej poprzez zmianę poziomu sprężenia, co może być wykorzystane w konstrukcjach sterowanych.

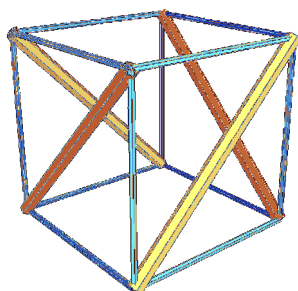


Rys. 5.14 Płyta ze zmodyfikowanych, trójzastrzałowych modułów typu *simplex* bez dodatkowych cięgien – postać mechanizmu infinitezymalnego

Płyta Raducanu i Motro

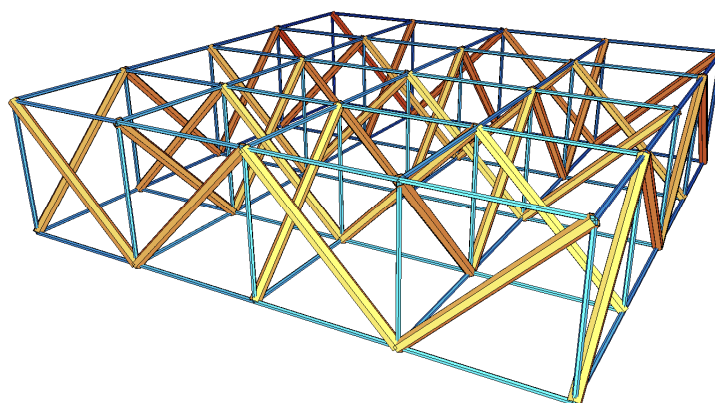
Konstrukcja płyty opatentowana przez Viniciusa Raducanu i René Motro w 2001 roku złożona jest z sześciennych „komórek” składających się z cięgien z zastrzałami na przekątnych powierzchni ścian bocznych (rys. 5.15). Nie są to moduły tensegrity. Poprzez połączenie

przynajmniej czterech: dwóch lewo- i dwóch prawoskrętnych komórek można otrzymać konstrukcję typu tensegrity.



Rys. 5.15 Składowa komórka do konstrukcji płyty Raducanu i Motro

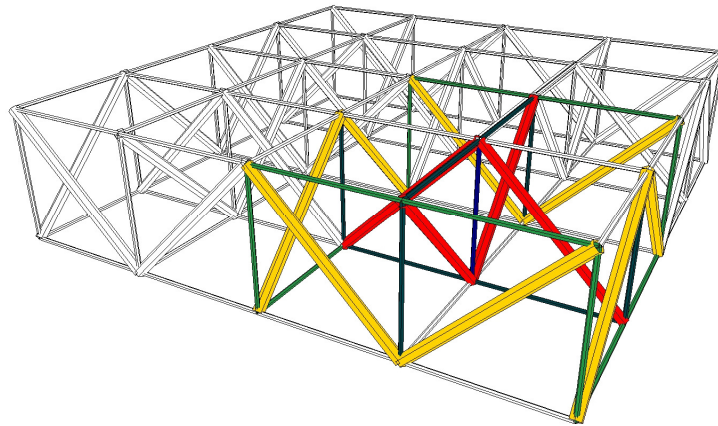
Rozpatrzmy płytę złożoną z szesnastu komórek (rys. 5.16). Można w niej zauważyć prostopadle przeplatające się, płaskie kratownice, złożone z ukośnych zastrzałów i ortogonalnych cięgien. W oryginalnej płycie Raducanu i Morto skrajne kratownice zastąpione są ukośnymi cięgnami łączącymi zewnętrzne węzły, dzięki czemu wszystkie elementy są objęte stanami samonapężenia.



Rys. 5.16 Płyta zbudowana z modułów Raducanu i Motro – perspektywa

Charakterystyka konstrukcji jest odmienna niż w dwóch wcześniejszych przykładach. Zastrzały nie rozpierają cięgien tak jak w „czystych tensegrity” – oba typy elementów znajdują się we wspólnych płaszczyznach, przez co struktura składa się z prostopadle ułożonych płaskich dźwigarów. Z tego powodu elementy ściskane leżą na brzegu struktury a nie wewnątrz układu elementów rozciąganych. Składowa komórka nie jest modułem tensegrity – występują w niej ruchy sztywne i nie posiada stanów samonapężenia. W konsekwencji samonapężenie obejmuje większą część struktury. Jeden z wyznaczonych w sposób analityczny stanów samonapężenia przedstawiono na rysunku 5.17. Taki rozkład sił wewnętrznych można uzyskać

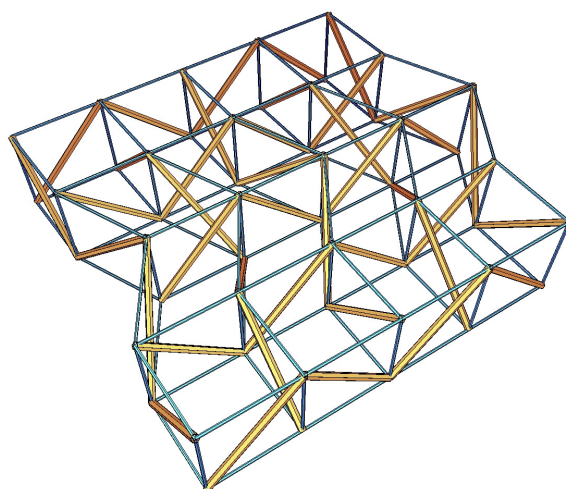
w rzeczywistej konstrukcji poprzez skrócenie pionowego cięgna, które jest ustawione centralnie w stosunku do sprężonych komórek. Analogicznie można postąpić z pozostałymi ośmioma wewnętrznymi, pionowymi cięgnami. Z powodu zastosowania skrajnych kratownic w takiej konstrukcji występują cięgna nieobjęte stanem samonapężenia. Przy przyłożeniu pionowego zewnętrznego obciążenia do górnych węzłów pręty te są zerowe.



Rys. 5.17 Płyta zbudowana z modułów Raducanu i Motro – *self-stress*

Analiza modalna tej konstrukcji wykazała występowanie mechanizmów polegających na ruchu poszczególnych płaskich kratownic w kierunku ich podłużnej osi (rys. 5.18). Mechanizmy usztywniają się przy sprężeniu konstrukcji siłami samonapężenia, czyli są infinitezymalne. Ustrój można zatem sklasyfikować jako konstrukcję o cechach tensegrity ($K+ S+ M+ N+ W- C+$). Jeśli struktura miałaby zostać użyta jako konstrukcja płyty pomostu znajdującej się między dwoma dźwigarami, niezbędne może być dodatkowe podparcie na poprzecznicach lub zastosowanie stężeń poziomych usztywniających konstrukcję w kierunku wzdłuż osi obiektu. Podobnie wyglądałby problem z poziomymi siłami przyłożonymi poprzecznie do pomostu w przypadku użycia płyty jako ustroju nośnego przeseł obiektu mostowego. Alternatywnie, zamiast dodatkowych elementów konstrukcyjnych lub podpierających, usztywnienie poprzeczne może być uzyskane poprzez zastosowanie odpowiednio wysokiego stanu samonapężenia. Jednakże po raz kolejny należy się zastanowić, czy pozostawienie w konstrukcji mechanizmów infinitezymalnych jest celowe z punktu widzenia projektowania konstrukcji inżynierskich. Likwidacja mechanizmów wydaje się być w tym przypadku łatwiejszym i skuteczniejszym sposobem usztywnienia konstrukcji. Z drugiej strony pozioma postać ruchu mechanizmu infinitezymalnego i jej zależność od stanu samonapężenia konstrukcji potencjalnie mogłaby zostać wykorzystana do sterowania konstrukcją. Na przykład w analizie drgań po-

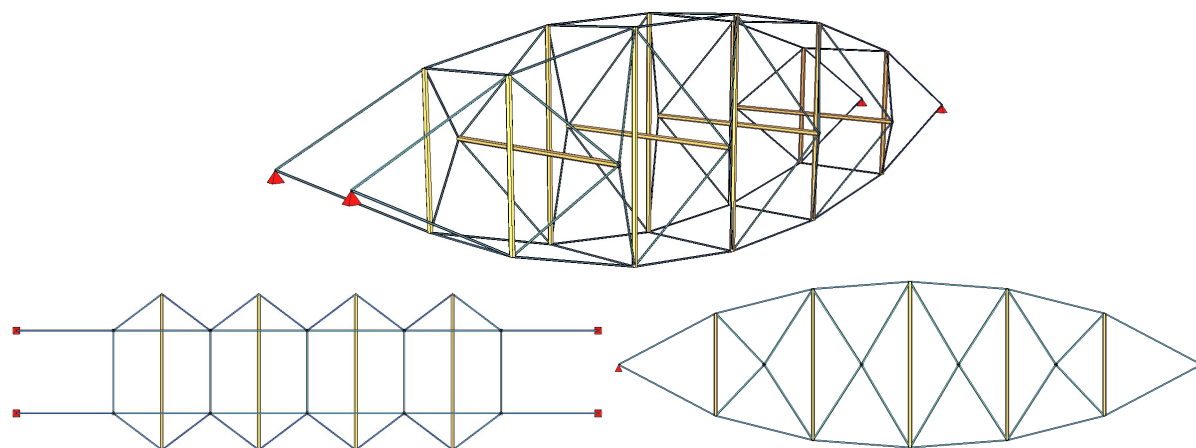
ziomych wywołanych obciążeniem wiatrem można zastosować tłumienie aktywne polegające na zmianie częstotliwości tej postaci drgań własnych.



Rys. 5.18 Płyta zbudowana z modułów Raducanu i Motro – mechanizm infinitezymalny

5.3 Inne konstrukcje o cechach tensegrity

Wśród innych, niemodułowych konstrukcji tensegrity na szczególną uwagę zasługują konstrukcje oparte na podporach nieprzesuwnych. Wielokrotnie stosowane ustroje cięgnowe konstrukcji dachowych złożone z dźwigarów w postaci pary naprężonych cięgien rozpartych przez pionowe zastrzały mogą być inspiracją do wykorzystania w konstrukcjach mostowych. Zastosowanie równoległych dźwigarów tego typu i połączenie ich za pomocą poprzecznic w postaci poziomych zastrzałów rozpiętych między cięgnami prowadzi do rozwiązania przedstawionego na rys. 19. Rozważania na temat takiej konstrukcji można znaleźć na przykład w [Briseghella: 2011].



Rys. 5.19 Konstrukcja mostowa o cechach tensegrity – perspektywa, widok z góry, widok z boku

Należy podkreślić, że jest to konstrukcja o cechach tensegrity. O ile w innych omawianych przykładach w tym rozdziale konstrukcje nie były czystymi tensegrity, ze względu na brak mechanizmów infinitezymalnych, o tyle w tym przypadku problemem jest warunek znajdowania się elementów ściskanych wewnątrz układu elementów rozciąganych. W czystym tensegrity siły rozciągające w zewnętrznym, ciągłym układzie cięgien utrzymywane są poprzez rozpierające je, ściskane zastrzały. Chociaż w tym wypadku zastrzały rzeczywiście stykają się jedynie z otaczającymi je cięgnami, to główne cięgna rozpięte są pomiędzy sztywnymi podporami znajdującymi się na zewnątrz układu elementów rozciąganych. Zatem jest to konstrukcja o cechach tensegrity ($K+ S+ M+ N+ W+* C+$), o stanie samonapężenia zależnym od warunków podparcia. Przedrostek *samo-* w definicji samonapężenia oznacza niezależność od warunków podparcia, jednakże w tym przypadku reakcje mają te same wartości i kierunki oraz przeciwne zwroty, to znaczy że podpory z powodzeniem mogłyby zostać zastąpione długim, poziomym zastrzałem (choć byłoby to nieracjonalne). Nie ma to zatem wpływu na pozostałe cechy tensegrity (por. przykład kratownicy złożonej z dwóch elementów połączonych liniowo – rozdz. 2.1.3 i 3.2.2). W konstrukcji występuje dziesięć mechanizmów infinitezymalnych. Wiążą się one z występowaniem w przekroju poprzecznym wielu prostokątnych pól złożonych z pionowych zastrzałów i poziomych cięgien. W związku z tym postaci mechanizmów polegają na ścinaniu tychże pól. Podobnie jak w przypadku płyty opartej na rozwiązaniu Raducanu i Motro mechanizmy występują w płaszczyźnie poprzecznej. Można je usztywnić poprzez dodanie stężeń lub zastosowanie sprężenia konstrukcji.

W obiekcie mostowym tego typu elementy płyty pomostu układa się na poziomych zastrzałach – poprzecznicach (jazda pośrednia). Obciążenia poprzez płytę pomostu przekazywane są na poprzecznice. Oczywiście w związku z tym poprzecznicą będzie zginana. Jeśli jednak płyta zostanie odpowiednio podparta i nie będzie miała wpływu na globalną sztywność konstrukcji, to zginanie poprzecznicą będzie miało jedynie charakter lokalny. Poprzez poprzecznice siły przekazywane są do węzłów w postaci sił skupionych. Globalnie zatem konstrukcja zachowuje się jak kratownica, nie dystrybuując momentów zginających między jej prętami, i może być uznana za konstrukcję o cechach tensegrity. Jednakże jeśli celem projektowym będzie uzyskanie jak największej sztywności konstrukcji (a tak zazwyczaj się dzieje), to włączony do współpracy pomost może stanowić stężenie poprzeczne konstrukcji i zwiększać jej sztywność (kosztem cech tensegrity).

Warto również zwrócić uwagę na wyraźnie zaznaczone dwa kierunki pracy konstrukcji – zginanie w kierunku pionowym i poziomym. Globalnie konstrukcja jest sprężona podłużnie, co usztywnia ją w kierunku pionowym. Siły rozciągające wynikające ze sprężenia głównych

ciągów powodują ścisnienie pionowych zastrzałów. Lokalnie w kierunku poprzecznym poziome, ścisnione zastrzały rozciągają i rozciągają ukośne ciągną. Siła z ukośnych ciągów przekazywana jest na poziome, poprzeczne ciągną i na pionowe zastrzały, jak również na główne ciągną, które w ujęciu lokalnym stanowią podparcie konstrukcji. Układ lokalny spręża i usztywnia konstrukcję w kierunku poziomym, jak również służy przekazaniu obciążeń zewnętrznych na dźwigary.

Rozdział 6

Specyfika projektowania kładek tensegrity

6.1 Podstawowe zagadnienia technologiczne

Konstrukcje tensegrity nie są typowe, zatem mogą wymagać szczególnych rozwiązań technologicznych. Mimo to niektóre znane i sprawdzone rozwiązania można z powodzeniem zaadaptować do zastosowania w tych konstrukcjach. W niniejszym rozdziale przedstawiono zarys wybranych zagadnień technologicznych wraz z przykładami istniejących rozwiązań.

6.1.1 Materiały

Wybór materiałów konstrukcji nośnej obiektów mostowych tensegrity zdeterminowany jest przede wszystkim występowaniem dużych sił osiowych w elementach. Elementy konstrukcyjne (pomijając płytę pomostu) znajdują się pod wpływem działania sił osiowych o znacznych wartościach wynikających z odpowiedzi na obciążenia zewnętrzne, jak również z wysokich wartości siły sprężających konstrukcję. W takim przypadku naturalnym wyborem spośród materiałów inżynierskich są materiały metalowe, chociaż możliwe jest również zastosowanie innych rozwiązań.

Materiały metalowe

W tego typu zastosowaniach mostowych najczęściej stosowanymi materiałami są stale węglowe i stopowe. Ponadto używane są rozwiązania z użyciem stopów aluminium. Coraz częściej spotyka się stosowanie stali galwanizowanych i nierdzewnych. W konstrukcjach tensegrity proponowane rozwiązania użycia elementów stalowych należy podzielić na dwie podstawowe grupy materiałów. Pierwszą z nich jest stal konstrukcyjna walcowana na gorąco, której gatunki i parametry wytrzymałościowe wymienione są w normie [PN-EN 1993-1-1], a w przypadku stali wyższych klas w [PN-EN 1993-1-12]. Drugą jest grupa stali wysokowęglowych przeznaczonych do ciągnięcia na zimno, z której otrzymuje się wysoko wytrzymałe druty. Stale drugiej grupy służą do wytwarzania cięgien sprężających w postaci drutów i splotów, a później kabli sprężających, a także do wytwarzania lin stalowych.

Wybór konkretnego rozwiązania technologicznego oraz materiału konstrukcyjnego wiąże się przede wszystkim z trzema parametrami: znakiem siły normalnej, wielkością siły normalnej i długością elementu. Stal konstrukcyjna walcowana na gorąco jako jedyna z powyższych używana jest powszechnie w elementach ściskanych.

Najprostszym rozwiązaniem wydaje się być zastosowanie jednego z systemów prętowych (rys. 6.1), które oferują nie tylko cięgna prętowe, ale także cały system połączeń między elementami, rozwiązań miejsc krzyżowania się elementów, zakotwień itp. Oferowane są również zastrzały kompatybilne z systemem. Dzięki temu projektowanie jest znacznie ułatwione, między innymi za sprawą gotowych rozwiązań węzłów. Konstrukcja, ze względu na spójność wszystkich elementów, może być bardzo estetyczna. Ograniczeniem w stosowaniu całego systemu jest maksymalna długość zastrzałów. O ile w przypadku cięgien możliwe jest zastosowanie muf łączących krótsze odcinki, o tyle elementy ściskane, ze względu na warunek wyboczenia, nie mogą być dłuższe niż przewidziano w katalogach. W przypadku konstrukcji tensegrity złożonych z modułów gotowe rozwiązania zastrzałów mogą znaleźć zastosowanie, ponieważ długość zastrzałów ograniczona jest do pojedynczego modułu. W innym wypadku pręt ściskany musi zostać zaprojektowany indywidualnie. Dodatkowo, w cięgnach możliwe jest zamontowanie śruby rzymskiej i wprowadzenie za jej pomocą siły sprężającej. Jeśli cięgno nie ma odpowiedniej długości, sprężenie trzeba wykonać w zakotwieniu. Najważniejszą zaletą stosowania tego typu systemów jest ich prostota, znacząco ułatwiająca montaż oraz późniejsze użytkowanie i konserwację konstrukcji.



Rys. 6.1 Przykład zastosowania cięgien prętowych w budynku: system Detan [źródło: materiały informacyjne firmy Halfen]

Przykładami tego typu rozwiązań są systemy cięgnowe Detan, Macalloy oraz system firmy Pfeifer ZSS. W tabeli 6.1 przedstawiono wybrane parametry tych systemów. Ciężna prętowa dostosowana są do przenoszenia sił o wartościach od kilkudziesięciu do nawet kilku tysięcy megapaskali. Tak wysoka nośność ciężnych wynika z ich stosowania nie tylko jako stężenia w budynkach, ale również jako podwieszenia w mostach łukowych i podwieszonych kładkach (rys. 6.2). Zatem zakres wartości wydaje się być wystarczający dla zastosowania w kładkach typu tensegrity. Ponadto ciężna mają parametry typowe dla stali konstrukcyjnej, w tym wysoki moduł sprężystości podłużnej na poziomie około 200 GPa. W systemach stosuje się zabezpieczenie antykorozyjne typowe dla konstrukcji stalowych.

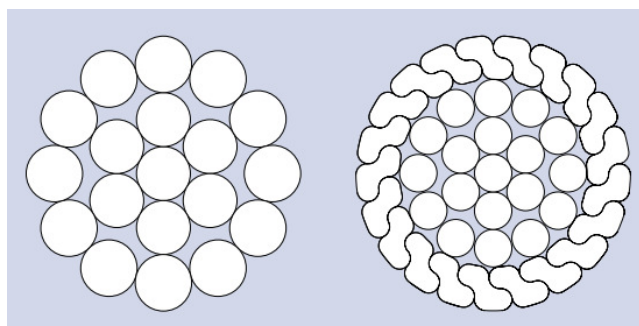


Rys. 6.2 Przykład zastosowania ciężnych prętowych w kładce nad ul. Żwirki i Wigury w Warszawie: system Macalloy 460 [zdjęcie własne]

Tab. 6.1 Przykładowe systemy cięgien prętowych [na podstawie katalogów produktów i PN-EN 1993-1-1]

	System					
	Detan-S460	Detan-E	Macalloy 460	Macalloy 520	Macalloy S460	Pfeifer ZSS
Stal		nierdzewna			nierdzewna	
Moduł sprężystości stali [GPa]	210		205	205	190	210
f_y ($t \leq 40\text{mm}$)	460 MPa	460 MPa	460 MPa	520 MPa	460 MPa	460 MPa
f_u ($t \leq 40\text{mm}$)	540 MPa		610 MPa	660 MPa	610 MPa	540 MPa
Średnica systemowa [mm]	10 ÷ 95	6 ÷ 30	10 ÷ 100	10 ÷ 100	10 ÷ 97	10 ÷ 100
Nośność obliczeniowa [kN]	21 ÷ 2823	9 ÷ 262	24 ÷ 3029	26 ÷ 3277	24 ÷ 1677	26 ÷ 3146

Innym typem cięgien są liny stalowe. Rozróżnia się kilka typów takich lin. Najważniejsze z nich to liny spiralne otwarte i zamknięte (rys. 6.3). Konstrukcja liny polega na skróceniu wiązki drutów stalowych. W przypadku lin zamkniętych, w celu ochrony liny przed korozją i zwiększenia jej gładkości stosuje się zamknięcie zewnętrznymi warstwami z drutów profilowanych (zazwyczaj zetowych) [Pałkowski: 1994].



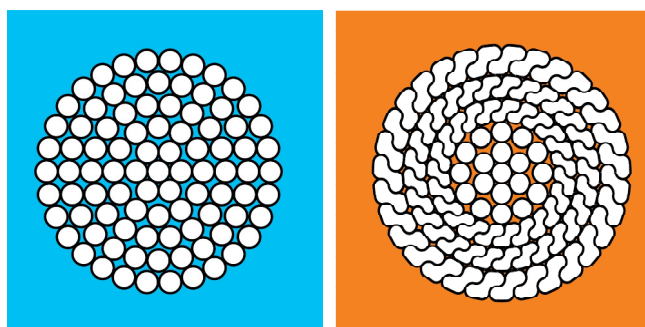
Rys. 6.3 Przykładowe przekroje lin spiralnych otwartych i zamkniętych [źródło: materiały informacyjne firmy Pfeifer]

Podobnie jak w przypadku cięgien prętowych, producenci oferują nie tylko liny, ale i całe systemy dostosowane do poszczególnych średnic lin, zawierające elementy łączące i kończące, ułatwiające konstruowanie węzłów. Przykładami mogą być systemy firm Bridon i Pfeifer. W tabeli 6.2 zestawiono wybrane parametry lin.

Tab. 6.2 Przykładowe systemy cięgien linowych [na podstawie katalogów produktów]

	System				
	Pfeifer PE	Pfeifer PG	Pfeifer PV	Bridon SS	Bridon LC
Stal	nierdzewna				
Lina spiralna	otwarta	otwarta	zamknięta	otwarta	zamknięta
Moduł sprężystości liny [GPa]	130	160	160	175 ÷ 155	165
Średnica systemowa [mm]	6 ÷ 37	8 ÷ 36	21 ÷ 140	13 ÷ 165	20 ÷ 180
Charakterystyczna siła zrywająca [kN]	26 ÷ 945	59 ÷ 1189	405 ÷ 20000	171 ÷ 25200	368 ÷ 31000

Chociaż moduł sprężystości podłużnej drutu wynosi około 195 GPa, liny spiralne mają mniejszy moduł sprężystości podłużnej, ale i tak jest on stosunkowo duży dzięki małym rozmiarom pustych przestrzeni wewnątrz liny. Nośność największych lin jest znacznie większa od nośności największych prętów⁹, ze względu na zastosowanie stali o znacznie wyższej wytrzymałości oraz ze względu na większe średnice produkowanych lin. Przy dużych średnicach lin stosuje się bardziej złożone przekroje (rys. 6.4). Tak duże nośności pozwalają na wykorzystanie cięgien linowych w dużych mostach podwieszonych (rys. 6.5) i wiszących oraz konstrukcjach przekryć dachowych dużych rozpiętości. Liny zamknięte zastosowano między innymi w konstrukcji wieży tensegrity w Warnow. Warto zauważyć, że liny o takiej konstrukcji przed zamontowaniem przeciąga się wstępnie w celu zmniejszenia doraźnych i reologicznych strat sprężenia, zwiększenia i ustalenia współczynnika sprężystości, sprawdzenia docelowej długości liny, a także polepszenia właściwości zmęczeniowych. Zabezpieczenie antykorozyjne lin (poza linami ze stali nierdzewnej) może polegać na cynkowaniu ogniowym lub natrikowym pojedynczych drutów, stosowaniu olejów, smarów i innych substancji wewnątrz liny, a także pokryciu liny typowymi dla konstrukcji stalowych powłokami malarskimi.



Rys. 6.4 Przykładowe przekroje lin spiralnych o większych średnicach [źródło: materiały informacyjne firmy Pfeifer]

⁹ W tab. 6.1 i 6.2 podano różne rodzaje nośności.



Rys. 6.5 Przykład zastosowania ciągów linowych Bridon LC: Most Fleher, Düsseldorf, Niemcy [źródło: Wikimedia Commons, autor: Christian Fu Mueller, licencja: CC BY 2.0]

W konstrukcjach tensegrity zastosowanie mogą znaleźć ciąga linowe o mniejszych średnicach, szczególnie w przypadku konstrukcji wielomodułowych, ze względu na występowanie sił o umiarkowanych wartościach. Inaczej może być w przypadku ciągów w konstrukcjach tensegrity i konstrukcjach o cechach tensegrity, w których występują ciąga ciągle na całej długości ustroju lub na znaczącym jej fragmencie. W takich ciągach zasadne może być użycie większych sił sprężających, przy większej długości elementów. Wtedy oprócz lin o większych średnicach zastosowanie mogą znaleźć kable z wiązek splotów.

Kable złożone z wielu splotów to wysoko zaawansowane technicznie rozwiązanie, umożliwiające wykonywanie obiektów, począwszy od lekkich kładek dla pieszych, a skończywszy na największych drogowych obiektach mostowych (rys. 6.6). W najpopularniejszych rozwiązaniach kabel składa się z równoległej wiązki siedmiodrutowych splotów. Kable używane są w systemach sprężenia obejmujących oprócz samego kabla także rozwiązania zakotwień czynnych i biernych, zarówno do konstrukcji stalowych, jak i betonowych, a także rozwiązania siodła i tłumików drgań. Przykładami mogą być systemy podwieszeń firm BBR i Freyssinet. Wybrane parametry obu systemów zestawiono w tabeli 6.3.



Rys. 6.6 Przykład zastosowania kabli z wiązek równoległych splotów Freyssinet HD: Wiadukt Millau, Millau, Francja [źródło: Flickr, autor: TijsB, licencja: CC BY-SA 2.0]

Tab. 6.3 Przykładowe systemy kabli z wiązki równoległych splotów [na podstawie katalogów produktów]

	System		
	BBR HiAm CONA	Freyssinet H1000	Freyssinet HD
Nominalna wytrzymałość na rozciąganie stali [MPa]	1860	1860	1860
Moduł sprężystości stali [GPa]	195	195	195
Liczba drutów w splocie	7	7	7
Pole przekroju splotu [mm ²]	150	150	150
Liczba splotów w kablu	1 ÷ 217	4 ÷ 19	12 ÷ 169
Charakterystyczna siła zrywająca [kN]	279 ÷ 60543	1116 ÷ 5301	3348 ÷ 47151

Zakres sił, na które przygotowane są tego typu systemy, znacząco wykracza poza potrzeby konstrukcji kładek tensegrity – ich nośność jest wystarczająca. Systemy HD, jak i HiAm przeznaczone są głównie do dużych obiektów i chociażby ze względu na formę zakotwień mogą być trudne w zastosowaniu w obiektach tensegrity (chyba że dotyczy to kabli o dużych długościach, kotwionych w podporach, jak w przykładzie w rozdz. 5.3). Specjalnie na potrzeby mniejszych obiektów stworzony został system H1000, w którym zastosowano uproszczone zakotwienia. W rozwiązaniach obu firm stosuje się wielostopniową ochronę antykorozyjną.

Na przykład w systemach Freyssinet każdy ze splotów jest chroniony poprzez galwanizację drutów, wypełnienie przestrzeni między drutami kompozycją woskową oraz umieszczenie ich w indywidualnej osłonce z polietylenu. Wiązka splotów chroniona jest przez zewnętrzną osłonkę z HDPE (polietylen o dużej gęstości; rys. 6.7). Możliwe jest także użycie innych materiałów i metod do ochrony antykorozyjnej kabli.



Rys. 6.7 Przekrój przez dziewiętnastosplotowy kabel firmy Freyssinet [źródło: materiały informacyjne firmy Freyssinet (a)]

Inne nowoczesne materiały konstrukcyjne

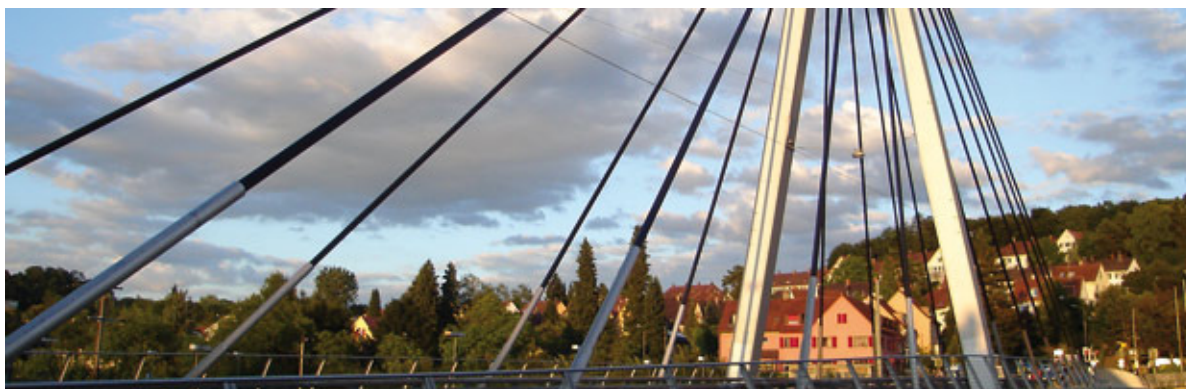
Rozważania na temat konstrukcji tensegrity nie muszą odnosić się jedynie do rozwiązań aktualnie używanych i sprawdzanych. Duże siły osiowe występujące w elementach konstrukcyjnych sprawiają, że być może w przyszłości w tego typu konstrukcjach znajdą zastosowanie materiały i technologie dopiero rozwijane lub nawet jeszcze nieznanne. Jednymi z nowoczesnych materiałów, które już znalazły zastosowanie w konstrukcjach mostowych są kompozyty polimerowe.

Kompozyty polimerowe złożone są ze zbrojenia z włókien polimerowych oraz spoiwa. Spoiwem jest żywica połączona z utwardzaczem oraz wypełniaczami i innymi dodatkami. W mostownictwie zastosowanie znajdują kompozyty polimerowe zbrojone włóknami węglowymi (CFRP), szklanymi (GFRP) i aramidowymi (AFRP) [Zobel: 2006]. Włókna mają decydującą rolę w kształtowaniu własności mechanicznych materiału. Największą wytrzymałość na rozciąganie mają kompozyty z włóknami węglowymi. Wytrzymałość na rozciąganie kompozytów CFRP (w ortotropowym układzie włókien) osiąga 3000 MPa, podczas gdy wytrzymałość GFRP jest zazwyczaj nieco wyższa od stali konstrukcyjnych. Jednakże problemem w przypadku włókien węglowych, w przeciwieństwie do włókien szklanych, jest ich bardzo duża kruchość. Moduł Younga kompozytów CFRP jest zbliżony do stali, podczas gdy kompozyty GFRP mają niską, wręcz niezadowalającą sztywność.

Wybór żywicy, będącej głównym składnikiem spoiwa, wpływa na inne właściwości materiału. Stosuje się żywice: poliestrowe, epoksydowe, winyloestrowe i fenolowe. Najważniejsze cechy żywic określono w [Zobel: 2006]. Żywica poliestrowa ma bardzo dobre właściwości przetwórcze i nienajgorsze użytkowe, ale odznacza się dużym skurczem. Żywica epoksydowa jest trudniejsza w przetwórstwie, ale ma bardzo mały skurcz. Żywica winyloestrowa ma podobne właściwości przetwórcze i jest utwardzana jak żywica poliestrowa, wyróżnia ją dobra odporność chemiczna i termiczna oraz stabilność wymiarowa. Żywica fenolowa ma bardzo dużą odporność na wysokie temperatury i praktycznie jest niepalna.

Najważniejsze cechy kompozytów polimerowych to bardzo wysoka wytrzymałość w stosunku do masy, anizotropowość, wysoka wytrzymałość zmęczeniowa. Kompozyty polimerowe nie ulegają korozji, nie przewodzą prądu, a ich parametry nie zmieniają się pod wpływem niskich temperatur. Problemem jest natomiast palność i obniżenie parametrów pod wpływem wysokich temperatur. Rozwiązaniem problemu jest stosowanie dodatków hamujących rozwój płomieni i samogaszenie oraz użycie żywic fenolowych w przypadku miejsc zagrożonych pożarem. Wszystkie te cechy sprawiają, że możliwe jest wykorzystanie kompozytów polimerowych w konstrukcjach mostowych oraz konstrukcjach tensegrity. Użycie CFRP jako materiału do zastosowania w zastrzałach konstrukcji tensegrity proponują Dalilsafaei i Tibert [Dalilsafaei: 2012].

Włókno węglowe z powodzeniem może być stosowane także do konstrukcji cięgien, chociaż problemem pozostaje ścinanie. Mimo że elementy ciągnowe są wyłącznie rozciągane, a materiał w postaci drutów ma doskonałe parametry przy osiowym działaniu siły (wytrzymałość na rozciąganie: od 2000 do 4500 MPa, moduł sprężystości podłużnej: od 200 do 650 GPa), to ryzyko związane z kruchością i występowaniem sił ścinających w strefie zakotwienia sprawia, że również w elementach ciągnowych włókno węglowe może być wykorzystywane jedynie przy krzyżowym ułożeniu włókien węglowych, czyli w postaci kompozytu [Noisternig: 2000]. Mimo to problem ścinania nadal występuje i konieczne jest projektowanie specjalnych zakotwień. Przykład zastosowania CFRP w konstrukcji cięgien w podwieszonym moście drogowym przedstawiono na rysunku 6.8.



Rys. 6.8 Przykład zastosowania CFRP w cięgnach podwieszenia obiektu mostowego: Wiadukt Storchen, Winterhur, Szwajcaria [źródło: materiały informacyjne firmy BBR]

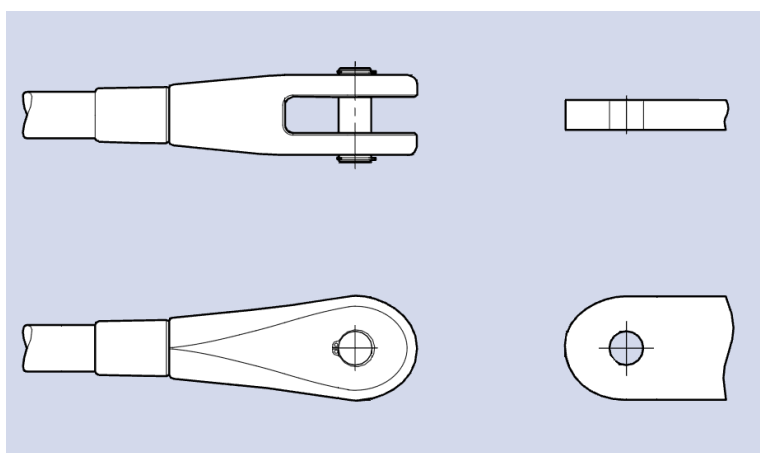
Tempo rozwoju inżynierii materiałowej pozwala sądzić, że w niedalekiej przyszłości pojawią się nowe materiały, będące w coraz lepszy sposób przystosowane do różnych, w tym inżynierskich rozwiązań. Przykładem mogą być produkowane już dziś włókna o handlowej nazwie Zylon¹⁰, które potencjalnie mogłyby zostać wykorzystane w cięgnach sprężających. Włókna w odmianie HM mają wytrzymałość na rozciąganie wynoszącą 5,8 GPa przy module sprężystości przy rozciąganiu równym 270 GPa [materiały informacyjne firmy Toybo]. Materiał jest odporny na wysoką temperaturę i jest praktycznie niepalny. Dziś używany jest na przykład w bolidach Formuły 1 i stratosferycznych balonach badawczych NASA.

6.1.2 Połączenia elementów

W tensegrity, podobnie jak niemal w każdej konstrukcji stalowej, występuje konieczność zaprojektowania węzłów łączących elementy. Pomimo tego, że tensegrity są kratownicami, to rozwiązania typowe dla tych konstrukcji nie są użyteczne w połączeniach typu ciągnozastrzał. W kratownicach łączone są zazwyczaj pręty z kształtowników, a przegubowość węzłów wynika z mniejszej sztywności giętej prętów i blach węzłowych w połączeniu. Większe zastosowanie mogą mieć rozwiązania typowe dla konstrukcji ciągnowych, takich jak niektóre przekrycia dachowe, mosty podwieszane i wiszące czy łukowe z podwieszonym pomostem. W tego typu konstrukcjach połączenia często dostosowane są do zagwarantowania możliwości obrotu elementów ciągnowych w węźle, co jest korzystne dla pracy konstrukcji oraz ułatwia jej montaż. Również w konstrukcjach tensegrity złożonych w większości z cięgien, do których wprowadza się duże siły sprężające, swoboda obrotu cięgien jest istotna przy projektowaniu węzłów.

¹⁰ Włókna z poli(p-fenyleno-2,6-benzobisoksazolu) (PBO).

Najbardziej rozpowszechnionym sposobem łączenia ciągów z innymi elementami jest połączenie widlaste (zwane widelcowym). Jest ono standardowo stosowane w przypadku ciągów linowych i prętowych. Przy mniejszych średnicach znajduje zastosowanie również w zakotwieniach kabli wielosplotowych (np. system H1000). Na końcu cięgna znajduje się widelec składający się z części łączącej z cięgnem i zakończeniem złożonym z dwóch równoległych blach z osiowo umieszczonymi okrągłymi otworami (rys. 6.9). Połączenie z blachą węzłową lub inną częścią węzła następuje poprzez sworznie przechodzące przez blachy łączonych elementów. Jest to najczęściej stosowana metoda połączeń ciągów w niewielkich obiektach mostowych podwieszonych lub łukowych z podwieszeniem, chociaż stosowana jest również w dużych obiektach (rys. 6.10). Takie zamocowanie cięgna gwarantuje pełną przegubowość w jednym kierunku, chociaż sztywność węzła w drugą stronę również jest niewielka. Możliwe jest podwojenie rozwiązania poprzez zastosowanie dodatkowego, pośredniego elementu (rys. 6.10).

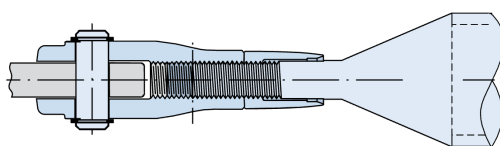


Rys. 6.9 Głowica widlasta systemu firmy Pfeifer [źródło: materiały informacyjne firmy Pfeifer]



Rys. 6.10 Przykłady zastosowań połączeń widlastych w obiektach mostowych (od lewej): kładka nad ul. Żwirki i Wigury w Warszawie [zdjęcie własne], Most Severn, Walia/Anglia (granica), Wielka Brytania [źródło: Flickr, autor: Nik Stanbridge, licencja: CC BY-NC-ND 2.0]

Połączenie widlaste z powodzeniem stosowane jest również w przypadku elementów ściskanych, takich jak systemowe zastrzały prętowe (rys. 6.11, 6.12). Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że w konstrukcjach tensegrity w jednym węźle łączonych jest wiele różnych elementów i o ile możliwe jest skonstruowanie węzłów, w których do zastrzałów za pomocą głowic widlastych mocowane są cięgna, o tyle zastrzały można w ten sposób łączyć tylko z innymi zastrzałami. Taka możliwość występuje jedynie w tensegrity klas wyższych niż 1 (wg Skeltona i de Oliveiry [Skelton: 2009a]).



Rys. 6.11 Przekrój końcówki widlastej przy rurze ściskanej: system cięgowy Detan [źródło: materiały informacyjne firmy Halfen]



Rys. 6.12 Przykład zastosowania połączeń widlastych elementów ściskanych w obiekcie mostowym: Kładka Helix, Marina Bay, Singapur [źródło: Flickr, autor: hj_west, licencja: CC BY-SA 2.0]

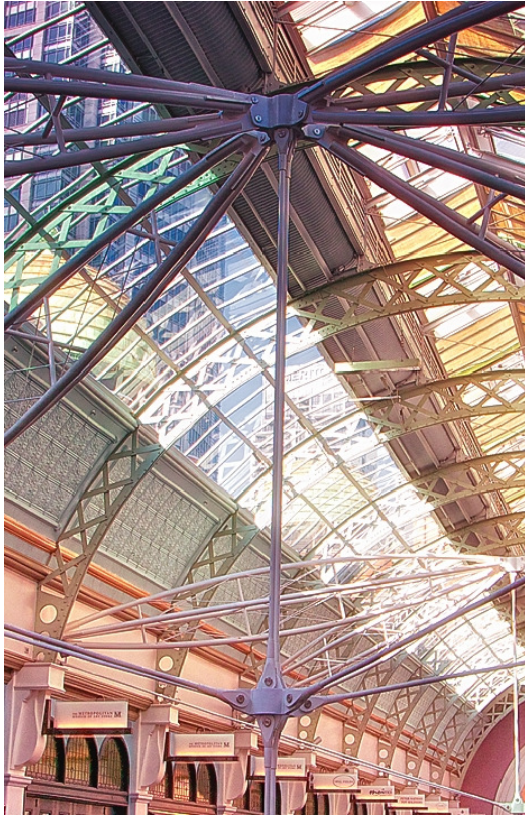
Największym ograniczeniem w prostym zaadaptowaniu powyższych rozwiązań, a zarazem problemem przy projektowaniu węzłów w konstrukcjach tensegrity jest fakt łączenia wielu elementów w jednym węźle. Podobne sytuacje mają miejsce w mostach podwieszonych w pylonie. W przypadku dużych obiektów stosuje się rozbudowane zakotwienia kabli podwieszenia. W mniejszych konstrukcjach możliwe jest użycie prostszych połączeń widlastych (rys. 6.13). Jednakże w obiektach podwieszonych, po pierwsze, większość elementów leży

w jednej płaszczyźnie, a po drugie – węzły wieloelementowe występują tylko w pojedynczych miejscach. W konstrukcjach tensegrity, elementy łączą się w wielu węzłach i wielu płaszczyznach. Zatem największym wyzwaniem jest zaprojektowanie prostych węzłów, które mogą być wielokrotnie powtarzane i które będą łączyły elementy z kilku kierunków.



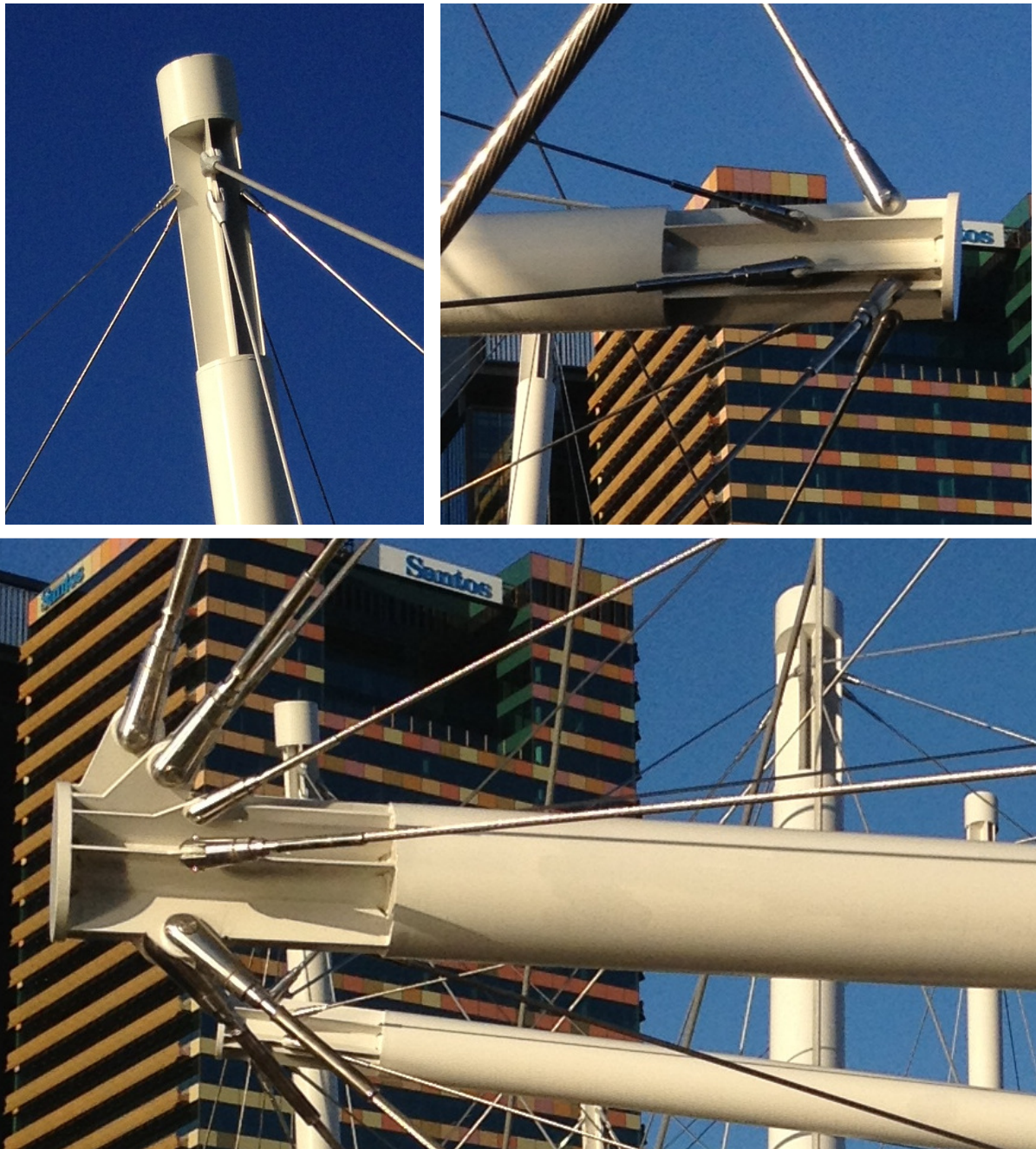
Rys. 6.13 Przykłady połączenia wielu elementów w węzle pylonu (od lewej): Kładka Hungerford, Londyn, Wielka Brytania [źródło: Flickr, autor: Andy Schultz, licencja: CC BY-NC-SA 2.0], Kładka Uniwersytetu Nortumbrii, Newcastle, Wielka Brytania [źródło: Flickr, autor: Phil Thirkell, licencja: CC BY-NC 2.0]

Na zdjęciach (rys. 6.14) przedstawiono dwa nietypowe przykłady stosunkowo prostych rozwiązań węzłów, w których łączone są pręty w wielu płaszczyznach. W pierwszym z nich do prętów pionowych zamocowany jest pierścień. Poziome cięgna połączone są z pierścieniem za pomocą głowic widlastych. W ten sposób możliwe jest połączenie w węzle prętów o dowolnych kierunkach. W drugim przykładzie węzeł ma konstrukcję promieniście rozłożonych blach między dwoma zamykającymi je dyskami. Podobnie jak w pierwszym przykładzie okrągłe elementy umożliwiają rozłożenie prętów wokół jego osi, a głowice widlaste pozwalają na ułożenie prętów ukośnie wobec płaszczyzny, w której leżą te elementy.



Rys. 6.14 Przykłady połączenia wielu elementów w węzle (od lewej): Kładka Hungerford, Londyn, Wielka Brytania [źródło: Flickr, autor: Bruno Girin, licencja: CC BY-SA 2.0], Budynek Królowej Wiktorii, Sydney, Australia [źródło: Deviantart, autor: Michael Domaradzki, licencja: CC BY-NC-SA 3.0]

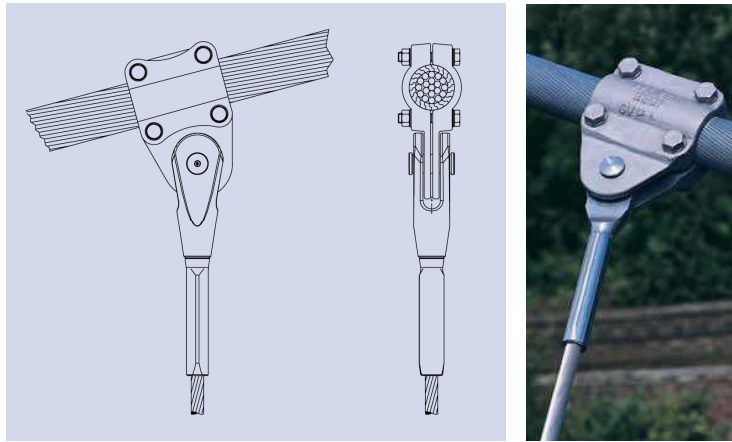
Podobną zasadę zastosowano w Kładce Kurilpa. W każdym węźle występuje jeden rurowy zastrzał. W obrębie jego okrągłego przekroju promieniście przyspawano blachy węzłowe połączone z cięgnami za pomocą głowic widlastych (rys. 6.15). Takie rozwiązanie wydaje się być najprostszym sposobem konstruowania węzłów z jednym zastrzałem i wieloma cięgnami. Prostsze rozwiązania można stosować w przypadku, gdy w węźle znajduje się mniej cięgien lub gdy leżą one w jednej płaszczyźnie.



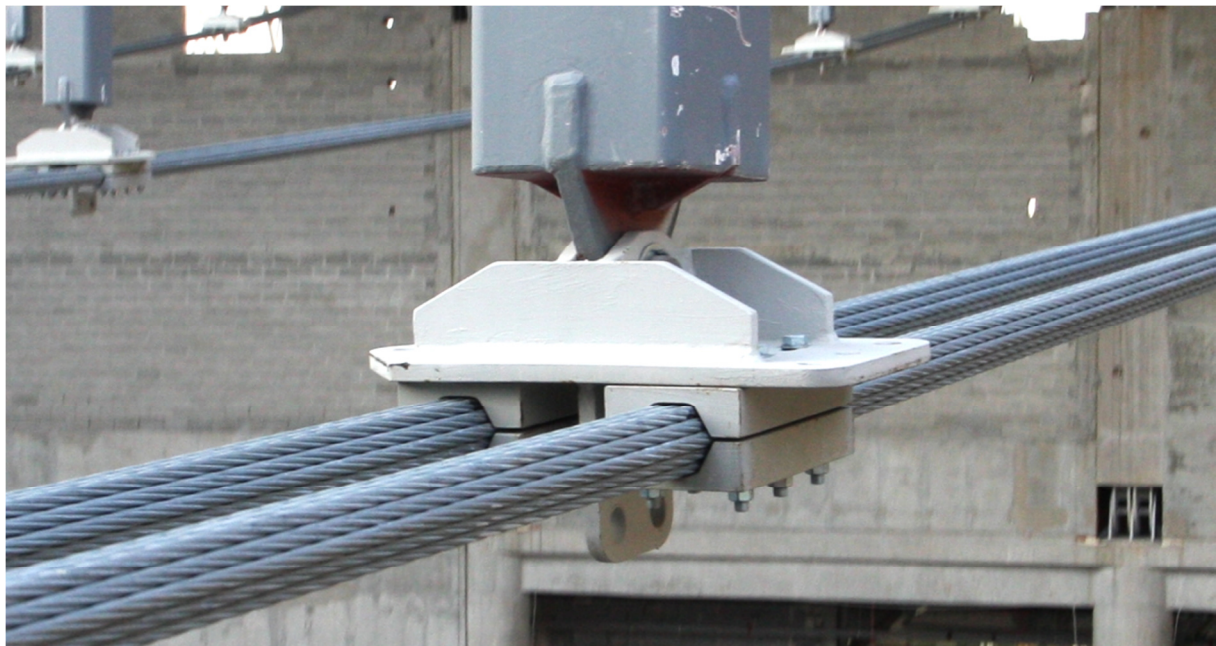
Rys. 6.15 Węzły typu zastrzał-ciężno: Kładka Kurilpa, Brisbane, Australia [źródło: Wikimedia Commons, autor: Kgbo, licencja: CC BY-SA 3.0]

Odrębnym zagadnieniem są konstrukcje o cechach tensegrity, które bazują na długich ciągłych ciężnach. Taki przypadek ma miejsce szczególnie w mostach wiszących i konstrukcjach dachowych dużych rozpiętości. W mostach wiszących do głównych ciągłych lin mocowana jest obejmka, do której za pomocą połączenia widlastego zaczepiane jest pionowe ciężno podwieszające pomost (rys. 6.16). Podobna sytuacja występuje w dźwigarach dachowych, zbliżonych do konstrukcji mostowych z kabli o dużych długościach, kotwionych w podpo-

rach. Różnica polega na tym, że poprzez obejmy na kablach mocowane są zastrzały rozpierające liny, a nie ciągną. (rys 6.17).



Rys. 6.16 Przykład połączenia liny podwieszającej i liny nośnej w moście wiszącym: Kładka Herrenkrug, Magdeburg, Niemcy [źródło: materiały informacyjne firmy Pfeifer]



Rys. 6.17 Połączenie kabli dolnych dźwigara ciągnowego ze słupkiem (zastrzałem): Kraków Arena, Kraków, [zdjęcie własne]

6.1.3 Oparcie pomostu na konstrukcji nośnej

Rozważania na temat oparcia płyty pomostu mogą dotyczyć dwóch aspektów. Z jednej strony istnieje problem technologicznego rozwiązania połączenia i ułożenia płaskiego pomostu przy niejednokrotnie skomplikowanej geometrii struktury, z drugiej strony pomost może zaburzać pewne cechy tensegrity konstrukcji.

Rozwiązania szczegółowe silnie zależą od konkretnego przypadku i nie można wybrać uniwersalnego sposobu oparcia pomostu na konstrukcji. Przykładem najprostszym w odniesieniu do istniejących mostów są konstrukcje złożone z modułów o prostopadłym układzie zastrzałów przy jeździe pośredniej lub inne konstrukcje, w których możliwe jest oparcie płyty pomostu na równoległe położonych zastrzałach. W takim wypadku, jeśli zastrzały ułożone są prostopadle do osi obiektu mostowego, elementy konstrukcji płyty pomostu układane są na zastrzałach dokładnie w taki sam sposób jak w przypadku układania pomostu na poprzecznicach. Można tu zastosować rozwiązania takie jak w niektórych mostach podwieszonych, wiszących bądź łukowych z podwieszonym pomostem (rys. 6.18). W układzie zastrzałów równoległych do osi zastrzały te można traktować jak podłużnice, między którymi układa się elementy pomostu.



Rys. 6.18 Przykład oparcia pomostu na podwieszonych poprzecznicach: Kładka Łukowa Humber Bay, Toronto, Kanada [źródło: Wikimedia Commons, autor: Tudor Costache, licencja: CC BY-SA 3.0]

W płytach złożonych z modułów tensegrity i obiektach z jazdą górą sytuacja nie jest tak klarowna. Pomost trzeba skonstruować na podparciu wielopunktowym. Takie zagadnienie wymaga stosowania dodatkowych podłużnic, poprzecznic lub rusztów podpierających samą płytę pomostu. Chociaż jest to dodatkowy problem, należy podkreślić, że w przypadku płyt złożonych z modułów punkty podparcia mogą znajdować się w niewielkiej odległości, co umożliwia zastosowanie cienkiej płyty pomostu lub materiałów nietypowych takich jak szkło, co jest bardzo pożądane w rozwiązaniach architektonicznych. Szklana tafla pomostu wymaga podparcia liniowego dwóch lub czterech krawędzi (rys. 6.19), a przy bardzo małych rozpiętościach wystarczające jest podparcie narożników.

Najbardziej skomplikowane jest podparcie pomostu na ukośnych zastrzałach lub węzłach znajdujących się na różnej wysokości. Takie zagadnienie wymaga indywidualnego rozwiązania z użyciem dodatkowych elementów.



Rys. 6.19 Zastosowanie tafli szklanych jako płyty pomostu przy małej rozpiętości podłużnic (od lewej): kładka w Banku Reiffeissen, Innsbruck, Austria, Grand Canyon Skywalk, Arizona, Stany Zjednoczone [źródło: materiały informacyjne firmy Glassolutions (a, b)]

Każdy z przedstawionych wariantów wprowadza do konstrukcji dodatkowe elementy w postaci pomostu. Jest to nieuniknione ze względu na funkcję, jaką pełni budowla. Powstaje pytanie, czy w takim razie może istnieć konstrukcja mostowa typu tensegrity, pomimo występowania zginanych elementów pomostu. Odpowiedzi można udzielić poprzez analogię do konstrukcji kratownicowych. Skoro istnieją mosty o dźwigarach kratownicowych, to mogą istnieć konstrukcje mostowe tensegrity. W kratownicach, chociaż teoretycznie powinny występować jedynie siły osiowe, to w rzeczywistości muszą występować elementy zginane związane z pomostem, jak również zginane są same pręty chociażby ze względu na ograniczoną przegubowość węzłów. Zatem o przyporządkowaniu konstrukcji do danego typu ustroju decyduje globalny charakter jej pracy, a nie lokalne efekty związane z jej częściami składowymi.

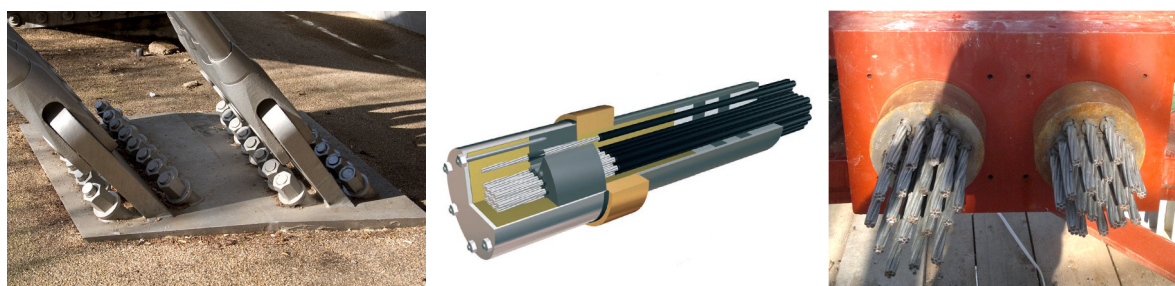
Pomost może zaburzać „czystość” pracy konstrukcji tensegrity w różnym stopniu. W przypadku pomostów opartych na poprzecznicach będących zastrzałami, zastrzały muszą pracować belkowo, jednak zginanie obejmuje tylko poprzecznicę, ze względu na przegubowe połączenia z pozostałymi elementami. Te obciążone są już tylko siłą skupioną w węźle. Globalnie praca pomostu zależy od jego formy. Może to być sztywny, ciągły pomost przejmujący znaczne siły wewnętrzne albo złożony z krótkich, swobodnie podpartych odcinków pomost, nie wnoszący niemal nic do globalnej sztywności konstrukcji. Podobnie w przypadku płyt złożonych z modułów tensegrity. Płyta pomostu może mieć postać od pojedynczych, niez-

leżnych paneli opartych jedynie w węzłach, aż po płytę ciągłą, opartą na sztywnym ruszcie. Mimo to we wszystkich przypadkach, jeśli struktura tensegrity ma kluczowe znaczenie dla sztywności całej konstrukcji, obiekt mostowy może być nazwany tensegrity. Jednakże od tego, jakie cechy ma konstrukcja, będzie zależało jej miejsce w klasyfikacji tensegrity i konstrukcji o cechach tensegrity.

6.1.4 Podparcie konstrukcji

Podparcie konstrukcji typu tensegrity nie różni się znacząco od innych konstrukcji prętowych. W przypadku „czystych tensegrity”, stan samonapężenia jest niezależny od warunków podparcia. Konstrukcja może zatem zostać swobodnie podparta pod wybranymi węzłami na łożyskach lub zamocowana nieprzesuwnie na przykład za pomocą głowic widlastych do blach węzłowych połączonych z fundamentem (brak przesuwu skutkuje dodatkowymi siłami od obciążeń termicznych).

Inny rodzaj podparcia występuje w przypadku, jeśli w konstrukcji zastosowane są ciągną naprężone niezależnie od wewnętrznych stanów samonapężenia, zakotwione w podporach. Wtedy można skorzystać z rozwiązań typowych dla mostów podwieszonych i wiszących. W mniejszych obiektach kotwienie następuje za pomocą głowic widlastych, w większych stosuje się systemowe rozwiązania zakotwień kabli z równoległych wiązek splotów (rys. 6.20).



Rys. 6.20 Przykłady kotwienia ciągien (od lewej): Kładka Milenijna, Londyn, Wielka Brytania [źródło: Flickr, autor: Jeff Jenkins, licencja: CC BY-NC-ND 2.0], przekrój zakotwienia systemu HD [źródło: materiały informacyjne firmy Freyssinet (a)], zakotwienie w konstrukcji stalowej – Kraków Arena, Kraków [zdjęcie własne]

6.1.5 Technologia budowy

Wybór metody budowy każdego obiektu mostowego zależy od wielu czynników. Są to przede wszystkim: rodzaj konstrukcji, rodzaj przeszkody i to, czy przestrzeń pod mostem może zostać zabudowana w trakcie budowy, wzniesienie mostu nad terenem bądź przeszkodą, rozpiętość konstrukcji. Poza czynnikami wymienionymi powyżej wybór metody montażu zależy od potencjału wykonawcy i związanego z nim rachunku ekonomicznego.

Wśród konstrukcji o cechach tensegrity można wyróżnić trzy zasadnicze pod względem montażu grupy:

Grupa I: konstrukcje jednomodułowe lub złożone z nachodzących na siebie modułów,

Grupa II: konstrukcje złożone z połączonych niezależnych modułów tensegrity,

Grupa III: konstrukcje oparte na cięgnach zakotwionych w podporach.

Pierwsza grupa zawiera konstrukcje, które wymagają połączenia i sprężenia wszystkich elementów jednocześnie. Nie jest to łatwe zadanie, szczególnie wzięwszy pod uwagę skomplikowaną strukturę tensegrity. W zależności od wyżej wymienionych warunków można zastosować na przykład: montaż z rusztowań stacjonarnych, nasuwanie wzdłużne lub poprzeczne albo montaż za pomocą dźwigów. Pomost może być wykonywany we wcześniejszym lub późniejszym etapie.

W przypadku drugiej grupy zakłada się możliwość wcześniejszego zmontowania i sprężenia składowych modułów w wytwórni lub na placu budowy, poza położeniem docelowym. Wtedy oprócz wymienionych w grupie pierwszej metod można zastosować jeden z wariantów montażu wspornikowego lub innych metod budowy segment po segmencie. W zależności od typu konstrukcji segmenty mogą być łączone w węzłach albo mogą być zastosowane dodatkowe elementy montażowe lub cięgna docelowe. Po złączeniu modułów konstrukcja może zostać sprężona za pomocą dodatkowych cięgien.

Najmniejszy wybór metod budowy jest przy montażu obiektów z grupy trzeciej. Ze względu na kotwienie długich cięgien pełniących podstawową rolę nośną konstrukcję trzeba w całości wykonywać na miejscu. O ile jednak w przypadku konstrukcji jednomodułowych należących do pierwszej grupy wszystkie elementy muszą znaleźć się w konstrukcji od razu w chwili sprężenia, o tyle tutaj budowa może zostać podzielona na fazy. Podobnie jak w konstrukcjach cięgnowych dachów o dużej rozpiętości (rys. 6.21) najpierw mogą zostać zawieszony główne cięgna, później zamontowane pozostałe elementy, a cała konstrukcja sprężona siłami docelowymi.



Rys. 6.21 Fazy montażu cięgnowej konstrukcji dachowej (od lewej): montaż słupków przy wstępnym naciągu kabli głównych – znaczny zwis kabli, montaż płatwi przy pełnym naciągu kabli głównych, Kraków Arena, Kraków [zdjęcia własne]

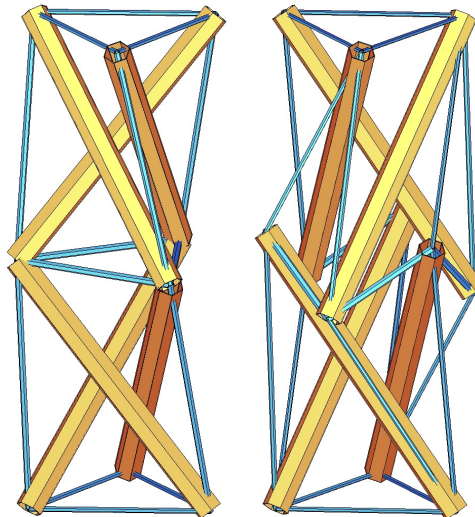
6.2 Odpowiedź konstrukcji na oddziaływania statyczne

Badania odpowiedzi konstrukcji na oddziaływania statyczne przeprowadzono na przykładach przedstawionych w rozdziale 5 za pomocą obliczeń MES w programie Sofistik. Posłużono się obliczeniami nieliniowymi z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej i elementami skończonymi typu kratowego¹¹. Obliczenia wykonano z użyciem zmodyfikowanej metody Newtona-Raphsona [Crisfield: 1979]. Na podstawie kilku różnorodnych modeli można prześledzić charakter pracy konstrukcji, a także ocenić możliwość zaprojektowania obiektów mostowych przy racjonalnych rozmiarach i przekrojach elementów składowych. Zastosowano obciążenia kładek dla pieszych.

6.2.1 Słupy

Obciążeniom statycznym poddano dwa modele obliczeniowe słupów złożonych z dwóch modułów typu *simplex*. Pierwszy z nich to słup z połączeniem typu węzeł-węzeł, a drugi typu zastrzał-ciężno (por. rozdz. 5.2.1). Dobrano słupy o wysokości 2,80 m (rys. 6.22) i jednakowej wielkości podstaw (długość ciężna w podstawie wynosi 1,039 m). Wysokość, chociaż niewielka, umożliwia przeprowadzenie pod przęsłem skrajni ciągu pieszo-rowerowego.

¹¹ Jednowymiarowe, dwuwęzłowe przestrzenne elementy typu kratowego o liniowych funkcjach kształtu.



Rys. 6.22 Wizualizacje modeli słupów

Do trzech górnych węzłów przyłożono obciążenia o łącznej wartości:

635 kN – całkowite obciążenie obliczeniowe,

490 kN – całkowite obciążenie charakterystyczne,

310 kN – obciążenie obliczeniowe bez obciążenia tłumem pieszych,

240 kN – obciążenie charakterystyczne bez obciążenia tłumem pieszych.

Siłę rozłożono równomiernie. Obciążenie dobrano na podstawie reakcji na podporę pośrednią dwuprzęsłowej kładki dla pieszych o teoretycznych rozpiętościach przęseł 20,00 + 20,00 m i konstrukcji z belek stalowych z drewnianym pomostem. Szerokość pomostu wynosi 3,00 m, a przestrzeń między balustradami 2,50 m. Dodatkowo uwzględniono ciężar własny samej konstrukcji słupów. Wartości oszacowano na podstawie ciężarów i współczynników obliczeniowych z normy [PN-85/S-10030]. Pominięto pozostałe obciążenia.

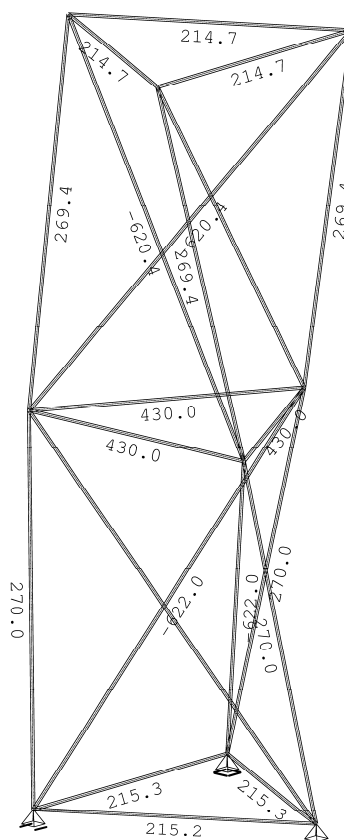
Uzyskane siły wewnętrzne w konstrukcji posłużyły do dobrania przekrojów poprzecznych elementów konstrukcyjnych. Założono, że pręty wykonane są ze stali konstrukcyjnej o parametrach wytrzymałościowych takich jak stale: S355 (zastrzały) i S460 (ciągną). Dobór cięgien nastąpił na podstawie nośności obliczeniowych systemu ciągnowego Detan. Założono, że moduł Younga wynosi 205 GPa.

Połączenie węzeł-węzeł

Obliczenia przeprowadzono na modelu słupa złożonego z dwóch jednakowych modułów o wysokości 1,40 m każdy. Ze względu na wymagania stanu granicznego nośności dobrano następujące przekroje prętów okrągłych: rurowych w zastrzałach i pełnych w cięgnach, na podstawie sił normalnych (N):

- zastrzały	D = 159,0 mm	t = 5,0 mm	N = -622,0 kN
- cięgna ukośne	D = 36,0 mm		N = 270,0 kN
- cięgna wewnętrznej podstawy	D = 42,0 mm		N = 430,0 kN
- cięgna zewnętrznych podstaw	D = 30,0 mm		N = 215,2 kN

W przypadku tej konstrukcji i sposobu przyłożenia obciążenia pod wpływem działania zewnętrznych sił konstrukcja napręża się i usztywnia mechanizm infinitymalny. Dlatego obliczenia przeprowadzono przy braku wstępnego sprężenia konstrukcji. Wyniki sił wewnętrznych przedstawiono na rysunku 6.23. Nośność prętów z uwzględnieniem wyboczenia zastrzałów jest większa niż otrzymane wartości sił wewnętrznych.



Rys. 6.23 Siły normalne w prętach od obciążeń obliczeniowych [kN] – słup z połączeniem węzeł-węzeł

Odrębnym zagadnieniem są przemieszczenia konstrukcji. Pod wpływem charakterystycznej kombinacji obciążeń przemieszczenie pionowe górnych węzłów wyniosło 41,5 mm, a od samego obciążenia tłumem pieszych 9,4 mm¹². Natomiast przemieszczenie całkowite jednego z górnych węzłów, związane przede wszystkim z obrotem górnej podstawy, wynosi aż 187,0 mm. Takie przemieszczenie wymaga specjalnego połączenia między pomostem i pod-

¹² Ze względu na nieliniowość obliczeń, przemieszczenia od obciążeń ruchomych wyznaczono jako różnicę przemieszczeń całkowitych i stałych.

porą. Musiałoby ono z jednej strony równomiernie rozkładać obciążenia na trzy węzły podpory, a z drugiej gwarantować swobodę obrotu wokół osi podpory. Inną możliwością jest zastosowanie modułów lewo- i prawoskrętnych. W ten sposób skręcanie jednego z modułów byłoby niwelowane przez skręcanie drugiego. Równe rozłożenie obciążeń na górne węzły słupa, mogłoby nastąpić bez dodatkowych rozwiązań w przypadku zastosowania modułów cztero-węzłowych.

Zbadano również wpływ sił samonapężenia na sztywność konstrukcji. W tabeli 6.4 przedstawiono przemieszczenie pionowe górnych węzłów w zależności od poziomu samonapężenia. Należy podkreślić, że przy zwiększonym wstępnym sprężeniu konieczne jest zastosowanie większych przekrojów poprzecznych elementów. Stan samonapężenia w module o tych proporcjach, wyznaczony analitycznie, wynosi: 0,165035, -0,500000, 0,394526 (por. tab. 4.2).

Tab. 6.4 Wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – słup z połączeniem węzeł-węzeł

Siła sprężenia w zastrzałach [kN]	Przemieszczenie pionowe górnych węzłów [mm]	
	Całkowite	Od obciążeń ruchomych
0	41,5	9,4
5	41,4	9,5
50	39,9	9,8
500	26,2	11,2
5000	4,6	2,3

Analiza wyników wskazuje na to, że poziom wstępnego sprężenia, który wyraźnie zmniejszyłby przemieszczenia pionowe, jest tak duży, że wymagałby zastosowania kształtowników o nieracjonalnych wielkościach przekrojów poprzecznych lub nowoczesnych materiałów o bardzo dużej wytrzymałości na działanie sił osiowych.

Chociaż trudno jest sformułować kryterium użytkowe przemieszczeń podpory pośredniej, to wyraźnie widać, że wielkość przemieszczeń jest znacząca. Wpływ przemieszczeń pionowych podpory pośredniej pod wpływem obciążeń stałych może być zniwelowany poprzez zastosowanie odpowiedniej technologii budowy, w której docelowe przemieszczenia podpory zostaną odpowiednio uwzględnione lub wymuszone przed ukończeniem budowy pomostu. Jednakże przemieszczenia pod wpływem obciążeń ruchomych rzędu 1 cm powinny zostać uwzględnione w obliczeniach. Zwiększona podatność podpory pośredniej może wpływać na zmianę momentów zginających w ciągłym pomoście i reakcje w podporach. W obliczeniach statycznych i dynamicznych należy uwzględnić pracę całej konstrukcji (wraz z podporą) lub

W przypadku tej konstrukcji oba moduły pod wpływem obciążeń pionowych skracają się w przeciwnych kierunkach, dlatego górne węzły poruszają się jedynie w pionie.

Ze względu na występowanie w konstrukcji tylko jednego stanu samonapężenia, stan ten wyznaczono poprzez iteracyjne obliczenia numeryczne. Najpierw wprowadzono sprężenie do jednego z elementów modelu MES. Następnie otrzymane wyniki sił wewnętrznych wszystkich elementów wprowadzono jako siły samonapężenia w kolejnym kroku. Czynność powtórzono kilkakrotnie, aż do uzyskania sił niepowodujących przemieszczeń węzłów. Otrzymano następujące wartości stanu samonapężenia:

- zastrzały $S = -0,500000$
- krótsze cięgna pionowe $S = 0,164054$
- dłuższe cięgna pionowe $S = 0,272759$
- cięgna wewnętrznej podstawy $S = 0,249614$
- cięgna zewnętrznych podstaw $S = 0,119910$

Przemieszczenie pionowe górnych węzłów pod wpływem obciążeń charakterystycznych przedstawiono w tabeli 6.5.

Tab. 6.5 Wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – słup z połączeniem zastrzał-cięgno

Siła sprężenia w zastrzałach [kN]	Przemieszczenie pionowe górnych węzłów [mm]	
	Całkowite	Od obciążeń ruchomych
0	54,8	11,7
5	54,7	11,8
50	53,0	12,3
500	37,3	14,6
5000	6,6	3,3

Przemieszczenia w drugiej konstrukcji są większe niż w pierwszej, mimo zwiększonego ciężaru zastosowanych elementów (3,90 kN w stosunku do 3,44 kN). Dodatkowo ze względu na liczbę elementów, druga struktura jest dużo bardziej skomplikowana i co więcej – musi zostać wykonana jednoetapowo (1 mechanizm i stan samonapężenia). Zastosowanie rozwiązania z połączeniem typu zastrzał-cięgno, w porównaniu do konstrukcji z połączeniem typu węzeł-węzeł, może mieć uzasadnienie estetyczne, ze względu na brak połączeń między elementami ściskanymi.

Chociaż podstawowe warunki stanu granicznego nośności zostały spełnione, to przemieszczenia w konstrukcji obu słupów są znaczące. Trzeba zauważyć, że zastosowanie większej liczby modułów tylko zwiększa przemieszczenia. Również przyjęte obciążenia zebrane

z pomostu kładki dla pieszych nie są duże. Rozwiązaniem problemu może być zastosowanie materiałów konstrukcyjnych o znacznie wyższych parametrach wytrzymałościowych, co umożliwiłoby wprowadzenie wysokich wartości sił wstępnego sprężenia, bez znacznego zwiększenia przekrojów poprzecznych elementów konstrukcyjnych.

Inną niekorzystną cechą tego typu struktur jest fakt, że chociaż są one statycznie niewyznaczalne (por. rozdz. 3.1.1), to z punktu widzenia niezawodności i bezpieczeństwa konstrukcji elementy sprawcze połączone są szeregowo [Biegus: 1999]. To znaczy że jeśli chociaż jeden z elementów ustroju (ciągno bądź zastrzał) zostanie zniszczony, to cała konstrukcja ulegnie awarii. O bezpieczeństwie całego ustroju decyduje więc najslabszy element konstrukcyjny bądź najslabsze połączenie. Właściwość ta nie może bezpośrednio decydować o nieprzydatności konstrukcji w zastosowaniach inżynierskich. Są przecież inne konstrukcje w układzie szeregowym, jak chociażby kratownice statycznie wyznaczalne. W obu wypadkach mogą występować bardzo wysokie konsekwencje zniszczenia, łącznie z zagrożeniem życia. Podobnie awaria kabli głównych mostu wiszącego może skutkować zniszczeniem całej konstrukcji. Nie mniej jednak w naprężonej konstrukcji cięgnowej, w przeciwieństwie do kratownic, nie występują zapasy bezpieczeństwa związane z brakiem pełnej przegubowości w węzłach, a zniszczenie może nastąpić w sposób gwałtowny – bez wcześniejszej sygnalizacji. Nie bez przyczyny przy projektowaniu mostów podwieszonych stosuje się sprawdzenie stanów granicznych nośności w sytuacji awaryjnej zniszczenia jednego z cięgien. Co więcej, ze względu na niewielkie przekroje cięgna konstrukcji tensegrity są bardziej narażone na zniszczenie wskutek działania aktów wandalizmu. Oznacza to, że stosując tego typu rozwiązania należy przewidzieć odpowiednie zapasy bezpieczeństwa oraz inne rozwiązania, zmniejszające ryzyko wystąpienia awarii. Należy rozważyć, czy prawdopodobieństwo wystąpienia zniszczenia na skutek działań przypadkowych bądź intencjonalnych jest na dostatecznie niskim poziomie, czy konieczne jest zastosowanie dodatkowych elementów konstrukcyjnych.

Inna sytuacja ma miejsce w przypadku konstrukcji statycznie niewyznaczalnych, takich jak przedstawione w kolejnych przykładach przęsła, w których moduły połączone dodatkowymi elementami. Również w samych modułach (kosztem cech tensegrity) możliwe jest zastosowanie dodatkowych, usztywniających elementów. W takich przypadkach awaria jednego z elementów skutkuje redystrybucją sił wewnętrznych. Zwiększeniu mogą ulec zarówno przemieszczenia, jak i naprężenia w elementach. Możliwe jest zatem zaprojektowanie takich przekrojów cięgien i zastrzałów, aby stany graniczne nośności były spełnione w przypadku zerwania pojedynczego cięgna, nie powodując zagrożenia dla użytkowników obiektu.

W niektórych sytuacjach wrażliwość konstrukcji na stan pojedynczych prętów może być jej zaletą. W opisanych wcześniej przypadkach ustrojów, przecięcie jednego z elementów (pomijając gwałtowne efekty związane z zerwaniem sprężonego pręta) powoduje złożenie się konstrukcji do postaci nienaprzężonych cięgien i luźno połączonych zastrzałów lub większych fragmentów struktury. Podobny skutek przynosi znaczne, wymuszone wydłużenie jednego z cięgien. Można zatem wyobrazić sobie sytuację odwrotną, w której wspomniane właściwości wykorzystywane są do wznoszenia konstrukcji, poprzez skrócenie jednego z cięgien do odpowiednio dobranej długości. Umożliwia to rozwijanie konstrukcji z postaci złożonej – zajmującej niewielką objętość. W przedstawionych przypadkach słupów możliwy jest transport złożonej konstrukcji i jej szybkie rozłożenie w docelowym miejscu użytkowania, co może być użyteczne na przykład w konstrukcjach tymczasowych. Koncepcja konstrukcji rozwijanych została szerzej opisana w rozdziale 6.5.3.

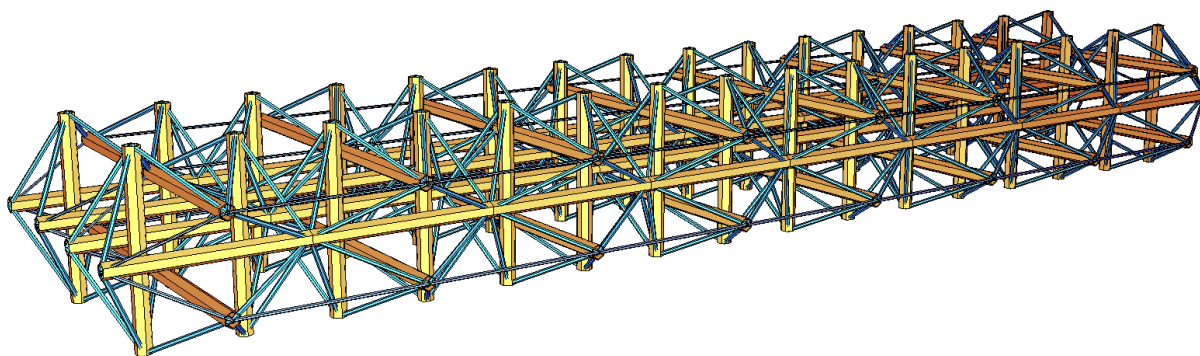
6.2.2 Przesła

Przy obliczeniu odpowiedzi konstrukcji przeseł na obciążenia statyczne przyjęto następujące obciążenia: ciężar własny konstrukcji stalowej ($78,50 \text{ kN/m}^3$) i (jeśli występuje) betonowej ($27,0 \text{ kN/m}^3$), ciężar własny pomostu wraz z wyposażeniem ($2,50 \text{ kN/m}^2$), obciążenie tłumem pieszych całego pomostu lub jego połowy (w przekroju poprzecznym) ($4,00 \text{ kN/m}^2$), parcie wiatru ($2,50$ lub $1,25 \text{ kN/m}^2$ – przesła nieobciążone lub obciążone), wyjątkowe obciążenie pojazdem samochodowym S klasy E (150 kN). Przyjęto współczynniki obliczeniowe wg normy [PN-85/S-10030].

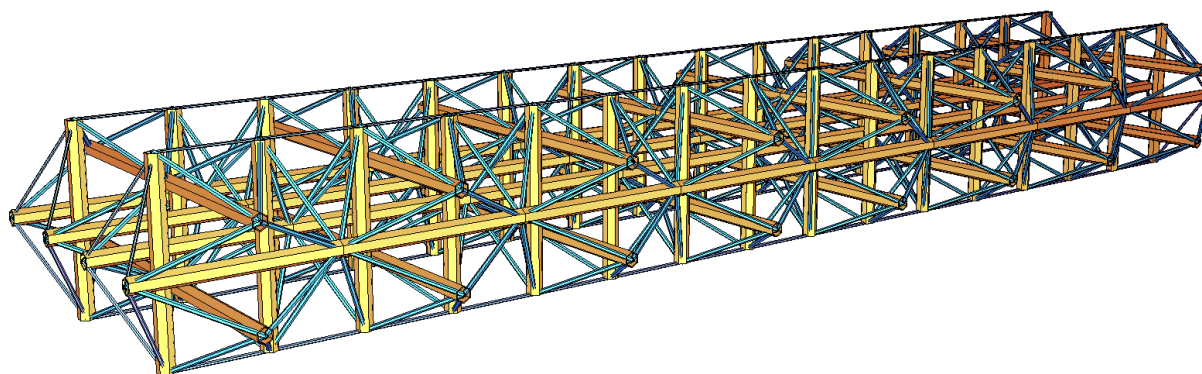
Rozszerzony ośmiościan tensegrity

Wykonano modele numeryczne dwóch konstrukcji złożonych z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity. Obie konstrukcje złożone są z 16 modułów o długości zastrzałów równej $2,0 \text{ m}$. Moduły połączone są w dwóch równoległych rzędach po 8 modułów (rozpiętość 16 m). Modele różnią się sposobem połączenia za pomocą dodatkowych elementów. Konstrukcje są swobodnie podparte (1 podpora nieprzesuwna, 4 jednokierunkowo przesuwne, 3 wielokierunkowo przesuwne) w ośmiu skrajnych węzłach poziomych zastrzałów i mają rozpiętość $16,0 \text{ m}$. Obciążenie przyłożono w węzłach górnych pionowych zastrzałów i zebrano przy założeniu szerokości pomostu wynoszącej $4,0 \text{ m}$ i odległości między balustradami wynoszącej $3,5 \text{ m}$. W kombinacji wyjątkowej przeanalizowano położenie pojazdu S, w którym cięższa oś znajduje się nad rzędem pionowych zastrzałów w pobliżu środka przesła. Poprzecznie pojazd został ustawiony w odległości $0,5 \text{ m}$ między osią podłużną nacisku koła i krawędzią pomostu.

W pierwszej z rozważanych konstrukcji połączono z sobą cięgnami poziome zastrzały (rys. 6.25; por. rys. 5.4), w drugiej zastrzały pionowe (rys. 6.26; por. rys. 5.6). W zastrzałach i cięgnach modułów zastosowano takie same materiały jak w przypadku słupów. W dodatkowych cięgnach zastosowano stal sprężającą (1860 MPa). Jej właściwości i przekroje przyjęto na podstawie systemu H1000 (por. tab. 6.3). W obu konstrukcjach cięgna łączące podpory z kablami sprężającymi w skrajnych modułach również wykonano ze stali sprężającej.



Rys. 6.25 Wizualizacja modelu przęsła z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity – I typ



Rys. 6.26 Wizualizacja modelu przęsła z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity – II typ

W tego typu konstrukcjach mamy do czynienia z szeregiem sztywnych modułów połączonych przegubowo. O globalnej sztywności ustroju w dużej mierze decydują zewnętrzne cięgna sprężające. Mimo to poszczególne elementy modułów pod wpływem obciążeń zewnętrznych pracują tak jak elementy klasycznej kratownicy i część cięgien jest ściskana, a zastrzałów rozciągana. W związku z występowaniem we wszystkich modułach stanów samonapężenia efekty ściskania cięgien można zniwelować poprzez zastosowanie wstępnego sprężenia modułów.

Przy doborze poziomu wstępnego sprężenia i przekrojów poprzecznych zastosowano następujące kryteria: nośność elementów w obliczeniowej kombinacji obciążeń (SGN), warunek dodatniej wartości siły normalnej (rozciąganie) w elementach cięgowych w charakterystycznej kombinacji obciążeń (SGU). Zaproponowano uproszczenie polegające na zastosowaniu

takich samych przekrojów poprzecznych i poziomów wstępnego sprężenia we wszystkich modułach oraz stałego przekroju w zewnętrznych kablach sprężających (można przyjąć, że są one ciągłe). Dzięki zastosowaniu różnicy między siłami w górnych i dolnych kablach sprężających można uzyskać ujemną strzałkę ugięcia i zmieniać rozkład sił wewnętrznych w konstrukcji. Należy zauważyć, że ze względu na występowanie złożonej zależności między różnymi częściami konstrukcji i sprężeniem poszczególnych elementów przedstawione rozwiązanie nie jest jedynym, ani optymalnym. Znalezienie takiego rozwiązania wymagałoby zastosowania optymalizacji wieloparametrowej.

Poniżej przedstawiono dobrane przekroje prętów okrągłych rurowych (zastrzały) i pełnych (ciągną) oraz kabli sprężających na podstawie systemu H1000. Podano również poziom wstępnego sprężenia elementów konstrukcji:

- zastrzały	$D = 168,3 \text{ mm}$ $t = 10,0 \text{ mm}$	$S = -550,0 \text{ kN}$
- ciągną	$D = 48,0 \text{ mm}$	$S = 224,5 \text{ kN}$
- kable dolne	7 splotów 150 mm^2	$\varepsilon_S = -3,907 \text{ ‰}$
- kable górne	4 sploty 150 mm^2	$\varepsilon_S = -2,991 \text{ ‰}$

W przypadku modułów, w których występują stany samonapężenia, podano siły wstępnego sprężenia. Zakłada się, że moduły zostaną sprefabrykowane – łącznie z wprowadzeniem sił samonapężenia. W późniejszym etapie zostanie wprowadzone sprężenie do kabli zewnętrznych. Powyżej podano wstępne odkształcenia kabli, jakie przyjęto w obliczeniach, ponieważ w przeciwieństwie do stanu samonapężenia, sprężenie kabli po połączeniu modułów powoduje przemieszczenia i zmienia układ sił wewnętrznych w całej konstrukcji. W obliczeniach przyjęto występowanie pełnego połączenia między kablem i zastrzałami. W rzeczywistości zależy to od rozwiązań technologicznych.

Otrzymane wyniki sił wewnętrznych są bardzo zróżnicowane. Najbardziej wyężone elementy ciągnowe modułów występują w modułach skrajnych (na początku i końcu ustroju). W przypadku zastrzałów najsilniej wyężone są podłużne zastrzały poziome i pionowe zastrzały skrajnych modułów. Kable zewnętrzne, dolne są znacznie bardziej rozciągane w środku przęsła niż przy podporach. Odwrotnie w przypadku kabli górnych. W tabeli 6.6 zestawiono najważniejsze wyniki w dwóch decydujących przypadkach obciążeń: SGN – wyjątkowy układ obciążeń (PW), kombinacja wszystkich obciążeń maksymalnych, SGU – charakterystyczna kombinacja wszystkich obciążeń maksymalnych (bez obciążeń wyjątkowych). Wyniki maksymalne i minimalne dotyczą różnych elementów przy tych samych obciążeniach. Sprawdzenie obliczeniowe wykazało, że wzrost sił w SGN, spowodowany uwzględnieniem braku sztywności cięgien na ściskanie jest w tym przypadku pomijalny.

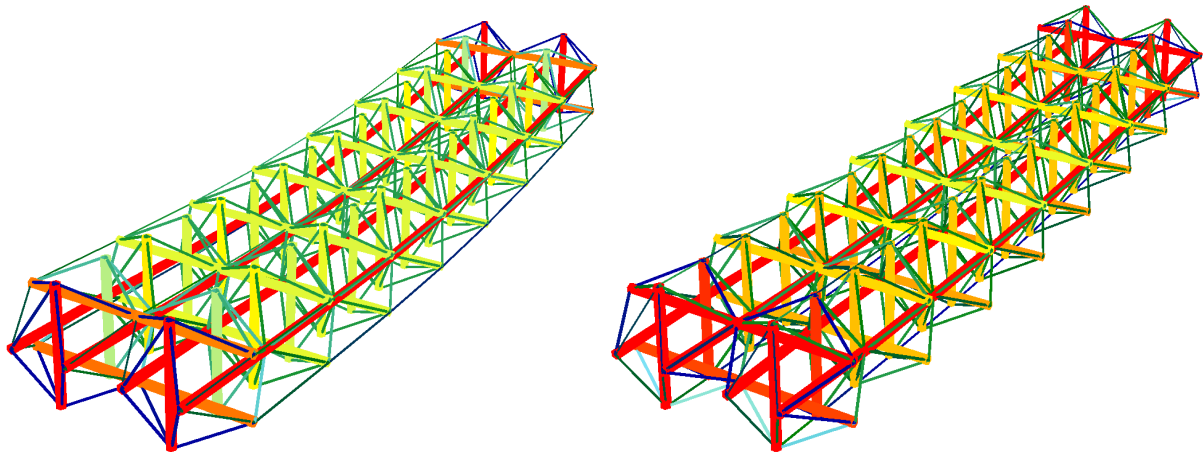
Tab. 6.6 Siły normalne w konstrukcji w zależności od typu połączenia modułów rozszerzonego ośmiościanu tensegrity

Rodzaj elementu	Siła normalna [kN]		Typ połączenia	Kombinacja obciążeń
	min	max		
Ciężna	-10	609	I	SGN
	-38	560	II	
Ciężna poza skrajnymi modułami	50	284	I	SGN
	99	271	II	
Ciężna	36	563	I	SGU
	-3	523	II	
Podłużne zastrzały poziome	-1443	-1094	I	SGN
	-1072	-947	II	
Pozostałe zastrzały poza skrajnymi modułami	-448	-229	I	SGN
	-565	-361	II	
Kable dolne	631	1016	I	SGN
	399	1056	II	
Kable górne	28	260	I	SGN
	88	355	II	

Znacząca różnica między wynikami w poszczególnych elementach wskazuje na możliwość zmniejszenia zużycia materiału w konstrukcji. Możliwe jest również znalezienie innego, lepszego rozwiązania skrajnych węzłów i podparcia. Siły w kablach sprężających mają wartości, które pozwalają na zastosowanie prętowych ciężien systemowych (por. tab. 6.1), jednakże wybór zastosowanej technologii zależy od konkretnej realizacji. Za zastosowaniem kabli z wiązek równoległych splotów przemawia długość i ciągłość kabli. Nie jest jednak możliwe wykonanie tak ostrego załamania ciągłego kabla, jak ma to miejsce w pobliżu podpór.

Porównując wyniki w konstrukcjach o obu typach połączenia, widać, że siły wewnętrzne są zbliżone. W przypadku konstrukcji II typu występują mniejsze siły w prętach modułów i nieznacznie większe siły w kablach zewnętrznych. Wynika to z większej odległości kabli sprężających od płaszczyzny obojętnej struktury. Zatem chociaż pierwsza konstrukcja zawiera mechanizm nieskończenie mały (por. rys. 5.5), to fakt występowania większej liczby cech tensegrity nie ma wpływu na właściwości statyczne konstrukcji (przy tak określonym sposobie przyłożenia obciążenia). Bardziej efektywne jest połączenie modułów II typu.

W obu konstrukcjach zbadano przemieszczenia węzłów pod wpływem obciążeń charakterystycznych (rys. 6.27). W tabeli 6.7 przedstawiono przemieszczenie pionowe węzła, w którym odnotowano największe przemieszczenie pod wpływem najbardziej niekorzystnej kombinacji obciążeń.



Rys. 6.27 Wizualizacja ugięcia obu konstrukcji z modułów rozszerzonych ośmiościanów tensegrity (przemieszczenia zwiększone)

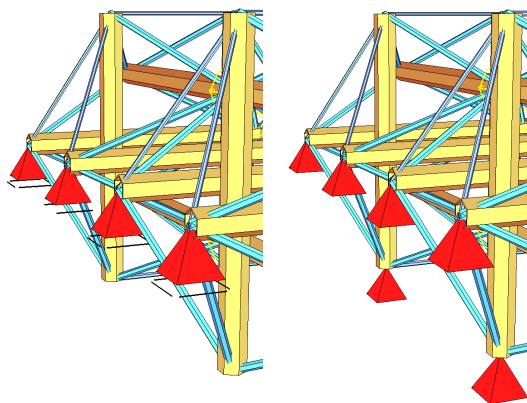
Tab. 6.7 Przemieszczenie jednego z węzłów w środku przęsła konstrukcji z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity

L.p.	Obciążenia	Przemieszczenie pionowe węzła [mm]	
		Typ połączenia	
		I	II
1.	sprężenie i ciężar własny	-52.0	-26.6
2.	1. + ciężar pomostu i wyposażenia	-23.9	-13.8
3.	2. + 50% obciążenia tłumem	-3.9	-4.9
4.	2. + 100% obciążenia tłumem i parcie wiatru	16.4	4.4
5.	4. – 1. (przemieszczenia od obciążeń zmiennych)	40.3	18.2

Przemieszczenia pod wpływem obciążeń ruchomych są mniejsze od wartości dopuszczalnych. Jeśli przyjąć maksymalne ugięcie wg normy PN-82/S-10052, to w stalowych przęsłach belek kratowych w kładkach dla pieszych o danej rozpiętości wynosi ono 41,6 mm. Porównanie wyników między dwiema konstrukcjami potwierdza fakt, że znacznie bardziej efektywne jest połączenie modułów II typu.

Obliczenia wykazują, że możliwe jest skonstruowanie kładki na jeden z podanych sposobów, chociaż trzeba przyznać, że ilość materiałów i nakład pracy są znaczące. Wynika to nie tyle z rygorów nośności, co z usiłowania spełnienia wymogów koncepcji tensegrity (wymuszenie rozciągania w cięgnach) i ze względów estetycznych (wizualne wrażenie lekkości ustroju cięgnowego). Wydaje się, że podobną kratownicę, w której występowałyby siły ściskające w znacznie większej części elementów, byłoby dużo łatwiej skonstruować. Jednak zatracona zostałaby idea konstrukcji, w której elementy ściskane otoczone są jedynie przez naprężone cięgna.

Aby sprawdzić, jak rezygnacja z kolejnych założeń tensegrity wpływa na zmianę sztywności konstrukcji, opracowano dwa dodatkowe modele obliczeniowe. W pierwszym przypadku rozpatrzono zmianę sposobu podparcia konstrukcji II typu. Zamiast klasycznego układu łożyskowania z jednym łożyskiem stałym zamodelowano podparcie nieprzesuwne we wszystkich podporach oraz dodano zakotwienie w dolnych węzłach skrajnych pionowych zastrzałów (rys. 6.28). W takiej konstrukcji układ sprężenia nie jest już niezależny od warunków podparcia – w przypadku wcześniej prezentowanych rozwiązań, rozciąganie zewnętrznych, głównych kabli utrzymywało się w konstrukcji, dzięki rozparciu przez znajdujące się wewnątrz moduły i ściskane zastrzały. Konstrukcja mogła zostać zbudowana i sprężona poza miejscem wbudowania, a następnie w całości przeniesiona na łożyska. Przy nowych warunkach podparcia sprężenie w głównych kablach utrzymywane jest poprzez zakotwienie w podporach. Chociaż w dalszym ciągu można wyobrazić sobie pełną prefabrykację konstrukcji poza miejscem docelowego wbudowania, to w celu pełnego wykorzystania dolnych kabli końcowe sprężenie musi zostać wykonane po ich zakotwieniu w podporach.



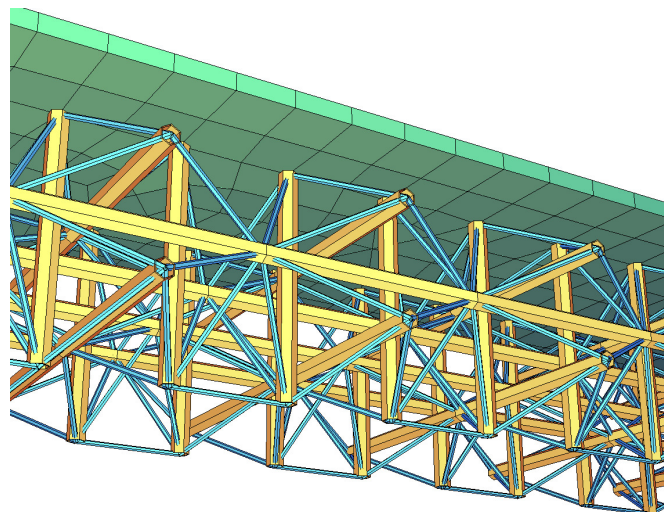
Rys. 6.28 Zmiana sposobu podparcia konstrukcji z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity

Wyniki obliczeń przy zachowaniu przekrojów i poziomym sprężeniu konstrukcji wskazują na znaczne zwiększenie sztywności (wyrażonej ugięciem konstrukcji). Przemieszczenie węzła w środku rozpiętości przęsła pod wpływem obciążeń zmiennych spadło z 18,2 mm do jedynie 4,5 mm. Sprężenie w poziomie podparcia sprawia, że nie powoduje ono występowania ujemnej strzałki ugięcia, zatem niweleta obiektu musi być prowadzona w łuku pionowym wklęsłym. Przemieszczenie w środku przęsła od obciążeń stałych wyniosło 7,4 mm. Sposób pracy konstrukcji jest porównywalny do mostów wstęgowych (rys. 6.29), w których sztywność obiektu zależy od silnie naprężonych cięgien zakotwionych w podporach. Również przy budowie można zastosować technologię podobną do tej stosowanej w mostach wstęgowych i najpierw sprężyć główne kable, a dopiero później układać na nich moduły tensegrity.



Rys. 6.29 Przykład konstrukcji wstępowej: kładka pieszo-rowerowa im. Davida Kreitzera nad Jeziorem Hodges, Escondido, Stany Zjednoczone [źródło: <http://www.djgreenephotography.com>, autor: Don Greene, licencja: CC BY-NC 2.0]

Inną możliwością zwiększenia sztywności konstrukcji jest wprowadzenie współpracującej płyty pomostu. Przeprowadzono obliczenia przy założeniu połączenia konstrukcji z ciągłą płytą żelbetową o grubości 15,0 cm, zamodelowaną za pomocą dwuwymiarowych elementów skończonych¹³. W celach porównawczych zachowano niezmienione przekroje poprzeczne elementów, chociaż wyniki obliczeń wykazały, że będą one wykorzystane w ograniczonym stopniu. Ze względu na płytę i uwzględnienie jej masy w ciężarze własnym konstrukcji, zmniejszono obciążenie wyposażeniem do $1,0 \text{ kN/m}^2$. Zrezygnowano z górnych kabli sprężających, a dolne kable zastąpiono cięgnami prętowymi i zastosowano jedynie między modułami (rys. 6.30). Zmniejszono poziom sprężenia do $-350,0 \text{ kN}$ w zastrzałach, $142,9 \text{ kN}$ w cięgnach modułów i $25,0 \text{ kN}$ w dodatkowych cięgnach.



Rys. 6.30 Wizualizacja modelu konstrukcji z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity ze współpracującą płytą żelbetową

¹³ Dwuwymiarowe, czterowęzłowe powłokowe elementy skończone typu Timoszenko-Reissnera o dwuliniowych funkcjach kształtu ze wzbogaceniem stanu deformacji (eliminacja efektu blokady).

Wyniki sił wewnętrznych w prętach przedstawiono w tabeli 6.8. Przemieszczenie od obciążeń zmiennych wyniosło 4,2 mm. Spadek sił wewnętrznych i przemieszczeń konstrukcji jest bardzo duży w stosunku do konstrukcji bez płyty żelbetowej. Możliwe jest znaczne zmniejszenie przekrojów lub skonstruowanie kładki tego typu o znacznie większej rozpiętości. Płyta żelbetowa jest głównie ściskana i wymaga niewielkich ilości zbrojenia.

Tab. 6.8 Siły normalne w konstrukcji z modułów rozszerzonego ośmiościanu tensegrity z płytą żelbetową

Rodzaj elementu	Siła normalna [kN]		Kombinacja obciążeń
	min	max	
Cięgna modułów	-52	293	SGN
Cięgna modułów	6	241	SGU
Zastrzały	-510	56	SGN
Cięgna łączące moduły	8	42	SGN

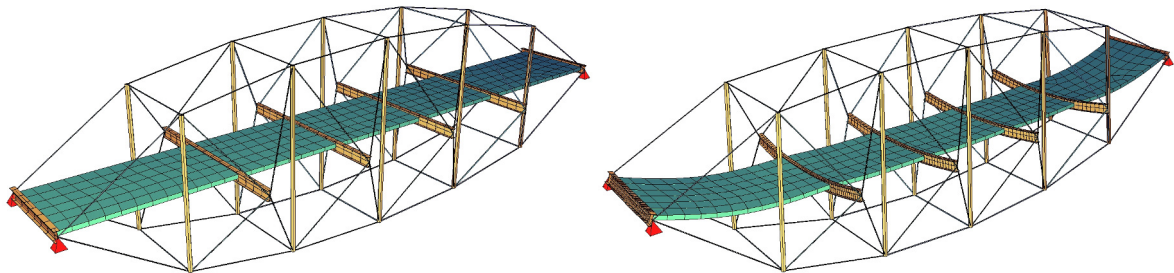
Skoro zastosowanie współpracującej płyty pomostu przynosi tak korzystne efekty, to czy istnieją racjonalne przesłanki, dla których nie należałoby stosować takiego rozwiązania? Zginana płyta żelbetowa sprawia, że konstrukcja w całości nie jest tensegrity, ale posiada dźwigary o ich cechach. Jednak chęć zaprojektowania konstrukcji, która będzie spełniała wymogi definicji tensegrity, nie może być argumentem do znacznego przewymiarowania przekrojów poprzecznych elementów. Wydaje się, że najbardziej znaczące mogą być argumenty architektoniczne. Kosztowne (pod względem zużycia materiału i trudności wykonawczych) wprowadzenie dużych sił samonapężenia modułów pozwala na zastosowanie większej liczby cięgien w stosunku do liczby zastrzałów, co korzystnie wpływa na walory estetyczne. Co więcej, brak współpracy płyty pomostu z dźwigarami umożliwia zastosowanie na przykład pomostu szklanego, co znacząco zmienia odbiór obiektu przez użytkowników. Brak współpracującej płyty pomostu pozwala też na większą elastyczność w rozwiązaniach specjalnych, takich jak obiekty rozwijane czy sterowane.

Konstrukcja mostowa o cechach tensegrity

Zamodelowano kładkę o rozpiętości teoretycznej wynoszącej 24,0 m i konstrukcji analogicznej do przedstawionej w rozdziale 5.3 (rys. 6.31). Założono, że pomost stanowi współpracująca płyta żelbetowa o grubości 15,0 cm, oparta na poprzecznicach ze stali konstrukcyjnej S355, zamodelowanych za pomocą elementów belkowych¹⁴. Obiekt z jazdą pośrednią umożliwia przeprowadzenie skrajni o wysokości 2,50 m i szerokości 2,50 m. Całkowita szerokość

¹⁴ Jednowymiarowe, dwuwęzłowe przestrzenne belkowe elementy skończone typu Timoszenki o liniowych funkcjach kształtu.

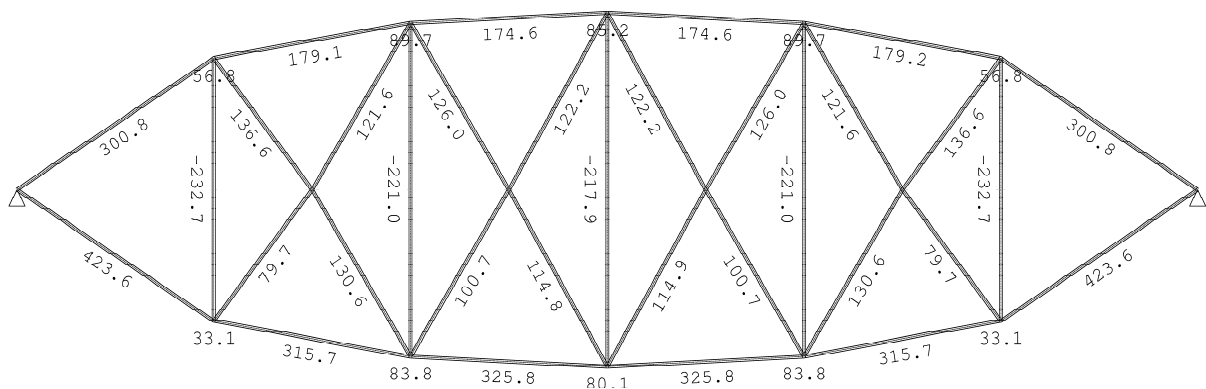
plyty betonowej wynosi 3,00 m, a długość poziomych zastrzałów (poprzecznicy) 6,40 m. Pionowe zastrzały mają wysokość od 2,60 do 3,50 m przy rozstawie osiowym równym 3,40 m. Zastosowano materiały takie jak w poprzednich przykładach. Dobrane przekroje poprzeczne i wartości założonego wstępnego odkształcenia elementów konstrukcyjnych przedstawiono w tabeli 6.9. Sprężenie cięgien w połączeniu z ciężarem własnym konstrukcji powoduje powstanie układu sił normalnych we wszystkich elementach prętowych, co przedstawiono na rysunku 6.32.



Rys. 6.31 Wizualizacja modelu kładki o cechach tensegrity i występujących w niej przemieszczeniach wywołanych charakterystyczną kombinacją obciążeń (przemieszczenia zwiększone)

Tab. 6.9 Parametry elementów konstrukcyjnych zamodelowanej konstrukcji kładki o cechach tensegrity

Rodzaj elementu	Typ przekroju	Wstępne odkształcenie
Kable główne	4 równoległe sploty: 150 mm ²	-2,564 ‰
Pozostałe cięgna	kołowy: D = 30,0 mm	-1,035 ‰
Poprzecznice	dwuteowy: IPE 360	-
Zastrzały	rurowy: D = 159,0 mm, t = 8,0 mm	-



Rys. 6.32 Siły normalne w elementach prętowych kładki o cechach tensegrity pod wpływem wstępnego sprężenia i ciężaru własnego konstrukcji (wartości w węzłach odnoszą się do cięgien poprzecznych)

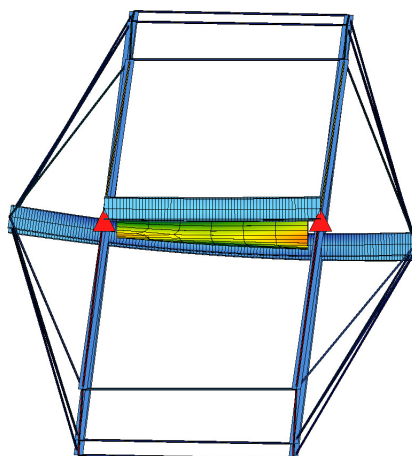
Model obciążono w sposób analogiczny do poprzedniego przykładu, z tą różnicą, że szerokość przyłożenia obciążenia ruchomego wyniosła 2,50 m. W tabeli 6.10 zebrano wyniki

ekstremalne: sił normalnych w elementach prętowych, naprężeń w elementach belkowych i przemieszczeń (w środku przęsła na skraju płyty). Wyniki podano w najbardziej wyężonych elementach danego rodzaju.

Tab. 6.10 Wyniki obliczeń konstrukcji kładki o cechach tensegrity

Rodzaj elementu	Siła normalna [kN]	Obciążenia							Kombinacja
		Ciężar własny konstrukcji	Sprężenie	Ciężar wyposażenia	Obciążenie tłumem	Obciążenie tłumem 1/2 przekroju	Obciążenie wiatrem	Obciążenie wyjątkowe poj. S	
Kable górne	301	+	+	-	-	-	-	-	SGN
Kable dolne	542	+	+	+	+	-	+	+	SGN
Cięgna	196	+	+	+	+	-	+	+	SGN
Zastrzały	-233	+	+	-	-	-	-	-	SGN
	Naprężenia [Mpa]								
Poprzecznice	180	+	+	+	+	-	+	+	SGN
	Przemieszczenie [mm]								
	47,3	+	+	+	+	-	+	-	SGU
	43,6	+	+	+	-	+	+	-	SGU
	28,2	+	+	+	-	-	-	-	SGU
	23,6	+	+	-	-	-	-	-	SGU

Szacunkowe obliczenia wykazują, że za pomocą tego typu konstrukcji możliwe jest pokonanie większych niż we wcześniejszych przykładach rozpiętości, przy zachowaniu racjonalnych wielkości przekrojów poprzecznych. Odpowiedź na obciążenia statyczne jest dobra, chociaż należy zwrócić uwagę na znaczną wysokość ustroju. Problemem przy tak dobranych rozwiązaniach mogą być obciążenia poziome oraz te powodujące skręcanie konstrukcji. Pod ich wpływem prostokątny układ elementów w przekroju jest ścinany (rys. 6.33). Brak sztywnych trójkątnych układów stężeń może skutkować niedostateczną sztywnością ustroju w kierunku działania obciążeń tego typu.



Rys. 6.33 Wizualizacja przemieszczeń w kładce o cechach tensegrity pod wpływem niesymetrycznego obciążenia tłumem pieszych (przemieszczenia zwiększone)

6.2.3 Płyty

Opracowano dwa modele numeryczne i wykonano obliczenia płyt o wymiarach w planie 4,00 x 4,00 m i wysokości 1,00 m (rys. 6.34, 6.35). Są to zatem grube płyty o proporcji grubości do szerokości wynoszącej 1/4. Oba modele składają się z 16 powtarzających się części składowych o kwadratowej podstawie o boku długości 1,0 m. Konstrukcje zostały swobodnie podparte na dwóch przeciwległych krawędziach. W modelach użyto materiałów takich jak we wcześniejszych prezentowanych przypadkach (bez stali sprężającej). Zastosowano obciążenia analogiczne do poprzednich przykładów, w których nie modelowano płyty żelbetowej. Założono, że obciążenie tłumem może występować na całej szerokości konstrukcji. W obliczeniach SGN uwzględniono brak sztywności ciągnien na ściskanie.

Niewielkie wymiary modelu sprawiają, że płytę można rozpatrywać na przykład jako fragment znacznie dłuższej konstrukcji, znajdującej się między dźwigarami obiektu mostowego, chociaż wtedy należałoby doprecyzować sposób podparcia konstrukcji przy swobodnych krawędziach. Na podstawie wyników obliczeń fragmentu płyty o tych wymiarach można również wyciągnąć pewne wnioski na temat pracy płyty o większej powierzchni.

Dobrano przekroje poprzeczne elementów: okrągłe rurowe w zastrzałach i okrągłe pełne w ciągnach:

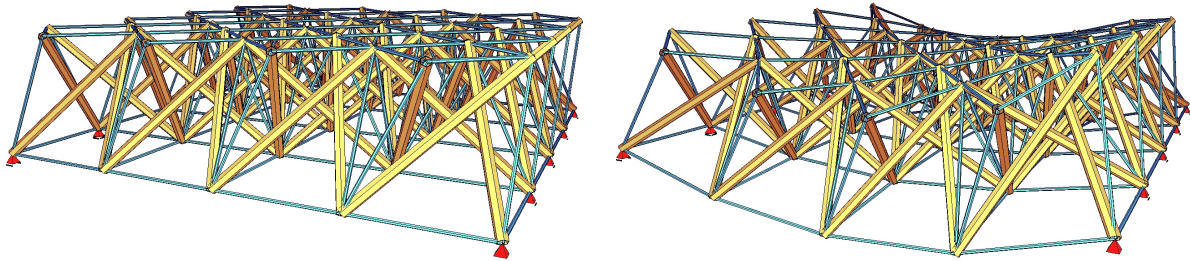
- | | | |
|-------------|-----------------------|----------------------|
| - zastrzały | $D = 76,0 \text{ mm}$ | $t = 2,9 \text{ mm}$ |
| - ciągną | $D = 24,0 \text{ mm}$ | |

Płyta ze zmodyfikowanych czterozastrzałowych modułów typu *simplex*

Konstrukcja została opisana w rozdziale 5.2.3 (rys. 5.9, 5.10). Nie ona ma mechanizmów in-
finitesimalnych i jest konstrukcją o cechach tensegrity ($K+ S+ M- N+ W+ C+$). W oblicze-
niach wprowadzono jednakowy stan samonapężenia do wszystkich modułów składowych.
Stan samonapężenia w module o tych proporcjach wyznaczono analitycznie. Wprowadzono
następujące siły sprężające:

- ciągną dolne	$S = 17,89 \text{ kN}$
- ciągną górne	$S = 25,29 \text{ kN}$
- ciągną ukośne	$S = 40,00 \text{ kN}$
- zastrzały	$S = -53,66 \text{ kN}$

W przypadku cięgien, które należą do sąsiadujących modułów, wartość siły podwojono.



Rys. 6.34 Wizualizacja modelu płyty ze zmodyfikowanych czterozastrzałowych modułów typu *simplex* i wystę-
pujących w niej przemieszczeń wywołanych charakterystyczną kombinacją obciążeń (przemieszczenia zwięk-
szone)

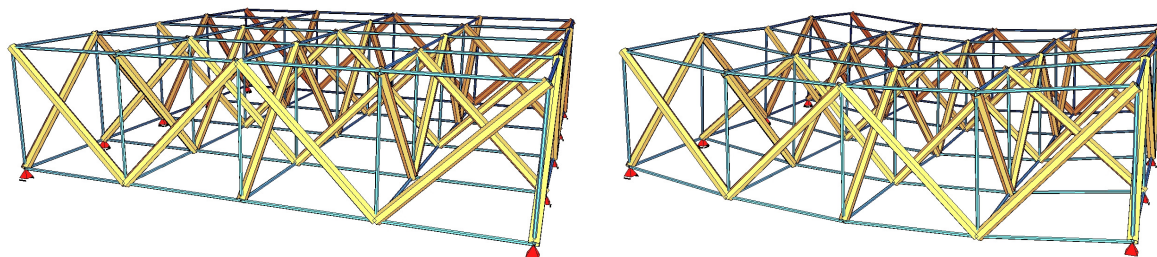
Najważniejsze wyniki sił wewnętrznych przedstawiono w tabeli 6.11. Konstrukcja, mimo
jej skomplikowania, ugina się równomiernie (rys. 6.34). Największe siły spośród cięgien
przenoszą dolne, poprzeczne ciągną. Za względu na właściwości geometryczne ustroju po-
przez dodatkowe sprężenie tychże cięgien można zmieniać ugięcie całego ustroju (podniesie-
nie wykonawcze). Równomierne zwiększenie poziomu samonapężenia modułów (przy ra-
cjonalnych wielkościach sił) nie wpływa wyraźnie na zmianę ugięcia konstrukcji. Przemiesz-
czenia maksymalne węzłów w środku rozpiętości przeszła płyty od wszystkich obciążeń cha-
rakterystycznych wyniosły 2,1 mm w skrajnym węźle i 1,2 mm w środku przekroju, w tym
odpowiednio 1,2 mm i 0,6 mm od obciążeń zmiennych. Wartości są mniejsze od granicznych.
Przedstawione obliczenia wykazują dostateczną nośność i sztywność tego typu płyt przy za-
stosowanych wymiarach konstrukcji.

Tab. 6.11 Siły normalne w konstrukcji ze zmodyfikowanych czterozastrzałowych modułów typu *simplex*

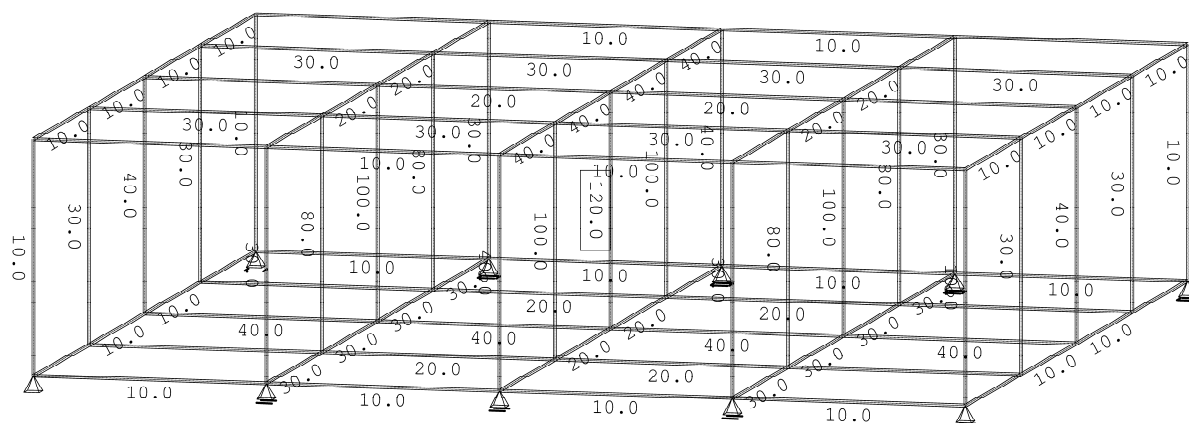
Rodzaj elementu	Siła normalna [kN]		Kombinacja obciążeń
	min	max	
Cięgna dolne	0,5	68,3	SGN
Cięgna górne	0,0	42,0	SGN
Cięgna górne	7,7	32,9	SGU
Cięgna ukośne	2,4	61,0	SGN
Zastrzały	-90,1	-30,1	SGN

Konstrukcja inspirowana płytą Raducanu i Motro

W modelu (rys. 6.35) wprowadzono do konstrukcji stan samonapężenia (rys. 6.36), będący sumą ośmiu składowych stanów opisanych w rozdziale 5.2.3 (por. rys. 5.17).



Rys. 6.35 Wizualizacja modelu płyty Raducanu i Motro oraz występujących w niej przemieszczeń wywołanych charakterystyczną kombinacją obciążeń (przemieszczenia zwiększone)



Rys. 6.36 Siły samonapężenia w elementach cięgnowych płyty Raducanu i Motro (dla czytelności na rysunku pominięto zastrzały)

Najważniejsze wyniki sił wewnętrznych przedstawiono w tabeli 6.12. Pominięto wyniki w cięgnach nieobjętych stanem samonapężenia. Są one prętami zerowymi w przypadku działania pionowych obciążeń zewnętrznych, jednakże przy wykonywaniu tego typu konstrukcji konieczne będzie wprowadzenie pewnej minimalnej siły sprężającej. W przeciwnym przy-

padku w cięgnach mogą wystąpić siły ściskające, na przykład pod wpływem sił poziomych, takich jak parcie wiatru. Możliwość wprowadzenia siły zależy od rozwiązań szczegółowych.

Tab. 6.12 Siły normalne w płycie Raducanu i Motro

Rodzaj elementu	Siła normalna [kN]		Kombinacja obciążeń
	min	max	
Cięgna dolne	1,1	68,7	SGN
Cięgna górne	0,0	40,0	SGN
Cięgna górne	3,1	32,8	SGU
Cięgna pionowe	0,0	137,6	SGN
Cięgna pionowe	1,3	121,1	SGU
Zastrzały	-148,2	-1,2	SGN
Zastrzały	-91,5	-45,5	SGU

Obliczone przemieszczenia wyniosły: 0,8 mm od wszystkich obciążeń charakterystycznych, w tym 0,4 mm od obciążeń zmiennych. Konstrukcja jest zatem sztywniejsza niż poprzedni przykład wielomodułowej płyty i spełnia wymagania dotyczące granicznych wartości ugięć.

Oba ustroje mogą znaleźć architektonicznie interesujące zastosowania w projektowaniu płyt pomostowych kładek dla pieszych, choć ich dużą wadą jest znaczna wysokość konstrukcyjna. Należy jednak podkreślić, że wszystkie konstrukcje przywołane w rozdziałach 5.2.3 i 6.2.3 stanowią jedynie wybrane przykłady z ogromnej gamy struktur płytowych tensegrity, których analiza i ocena wykracza poza zakres tej pracy.

6.3 Odpowiedź konstrukcji na oddziaływania dynamiczne

6.3.1 Rodzaje oddziaływań i charakterystyk dynamicznych

Istnieje szereg oddziaływań dynamicznych istotnych z punktu widzenia projektowania obiektów mostowych. Drgania konstrukcji lub ich elementów związane są między innymi z: ruchem pieszych, ruchem samochodowym i kolejowym, oddziaływaniem wiatru, drganiami podłoża.

W przypadku kładek o cechach tensegrity istnieje duże ryzyko występowania drgań pomostu, wywołujących uczucie dyskomfortu użytkowników. Największy wpływ na występowanie takiego ryzyka mają te częstotliwości drgań własnych, których wartości zbliżone są do częstotliwości wzbudzenia (zjawisko rezonansu) oraz niewielki poziom tłumienia. Częstotliwości drgań własnych zależą przede wszystkim od rozpiętości i rodzaju konstrukcji, a co za

tym idzie – jej sztywności i masy oraz ich rozkładu. W przypadku dokładnego zamodelowania konstrukcji możliwe jest dość precyzyjne wyznaczenie wartości i postaci drgań własnych.

W zagadnieniach dynamicznych w metodzie elementów skończonych stosuje się układ równań ruchu w ujęciu dyskretnym:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t), \quad (6.1)$$

gdzie:

\mathbf{M} – macierz mas konstrukcji,

\mathbf{C} – macierz tłumienia,

\mathbf{K} – macierz sztywności konstrukcji,

\mathbf{P} – wektor obciążeń węzłowych konstrukcji.

Częstości i postaci drgań własnych wyznacza się, rozwiązując zadanie nietłumionych drgań swobodnych:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (6.2)$$

Zadanie sprowadza się do rozwiązania uogólnionego zagadnienia własnego w postaci:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\Phi = \mathbf{0}. \quad (6.3)$$

Kolejne nietrywialne rozwiązania ω_i są częstościami drgań własnych, a odpowiadające im wektory amplitud przemieszczeń Φ_i są postaciami drgań własnych. Pomiędzy częstościami (ω_i) i częstotliwościami drgań własnych (f_i) zachodzi zależność:

$$\omega_i = 2\pi f_i. \quad (6.4)$$

Oszacowanie wielkości tłumienia konstrukcji jest znacznie trudniejsze. Poziom tłumienia często określany jest za pomocą logarytmicznego dekrementu tłumienia, który wyznaczany jest jako logarytm naturalny ze stosunku dwóch kolejnych amplitud przemieszczeń w danej postaci drgań tłumionych. Tłumienie można także opisać, definiując parametry, które odpowiadają poszczególnym postaciom drgań. Modalną postać tłumienia można przedstawić następująco [Bathe: 1996]:

$$\Phi_i^T \mathbf{C} \Phi_j = 2\omega_i \xi_i \delta_{ij}, \quad (6.5)$$

gdzie:

ξ_i – modalny parametr tłumienia,

δ_{ij} – delta Kroneckera,

i, j – numery postaci i częstości drgań własnych.

Taki opis tłumienia wykorzystuje się na przykład w metodzie superpozycji modalnej.

Parametr tłumienia modalnego można wyznaczyć na podstawie logarytmicznego dekrementu tłumienia. Gdy $\xi_i < 0,1$ (najczęstsza sytuacja w konstrukcjach inżynierskich), można stosować następującą zależność:

$$\Lambda_i = 2\pi\xi_i, \quad (6.6)$$

gdzie Λ_i jest logarytmicznym dekrementem tłumienia.

Inną stosowaną w metodach bezpośredniego całkowania równań ruchu postacią tłumienia jest model tłumienia proporcjonalnego, nazwany modelem tłumienia masowo-sztywnościowego. Macierz tłumienia w równaniu (6.1) przyjmuje w tym modelu postać:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}, \quad (6.7)$$

gdzie α i β są współczynnikami tłumienia (odpowiednio): masowego zwanego zewnętrznym i sztywnościowego zwanego wewnętrznym.

Istnieje zależność między oboma modelami tłumienia:

$$\xi_i = \frac{\alpha + \beta\omega_i^2}{\omega_i}, \quad (6.8)$$

Aby uzyskać tylko jedną parę liczb α , β do obliczeń danej konstrukcji, współczynniki można wyznaczyć, rozwiązując układ równań (6.8) przy ograniczeniu $i = 1, 2$:

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2(\xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad \beta = \frac{2(\xi_2\omega_2 - \xi_1\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \quad (6.9)$$

Wtedy wartość tłumienia modalnego jest ustalona w wybranych punktach ω_1 , ω_2 i jeśli różnica między ω_1 i ω_2 nie jest zbyt duża, wartość jest w przybliżeniu stała wewnątrz przedziału między tymi punktami. Zazwyczaj zakłada się, że $\xi_1 = \xi_2$ w obrębie kilku pierwszych, kluczowych częstości drgań własnych.

Bardzo wiele czynników ma wpływ na poziom tłumienia konstrukcji. W związku z tym obliczenie wartości współczynników tłumienia jest trudne i zazwyczaj nieprecyzyjne. W praktyce najczęściej stosuje się szacowanie na podstawie wyników pomiarów z konstrukcji podobnego typu. Stanowi to problem w przypadku konstrukcji nietypowych, jakimi w dalszym ciągu są tensegrity.

Tłumienie zewnętrzne (konstrukcyjne) związane jest z oporem ośrodka, w którym odbywa się ruch. Wewnętrzne (materiałowe) związane jest z ruchem cząstek wewnątrz materiału. Tłumienie zewnętrzne zależy od czynników takich jak [Flaga: 2011]: typ konstrukcji, schemat statyczny bądź dynamiczny, rodzaj złączy i połączeń, rodzaj materiału wypełniającego, sposób posadowienia budowli, występowanie wad wykonawczych. Tłumienie wewnętrzne zależy od:

rodzaju materiału, amplitudy naprężeń dynamicznych i poziomu naprężeń statycznych, rozkładu naprężeń określonego charakteru drgań, rozmiarów i kształtów elementów, postaci drgań, technologii mechanicznej i termicznej obróbki materiału, zmiany właściwości mechanicznych materiału w czasie. Im wyższa częstotliwość drgań własnych, tym większa rola tłumienia sztywnościowego.

W przypadku mostów tensegrity, ze względu na niewielką liczbę istniejących konstrukcji, poziom tłumienia można jedynie szacować na podstawie opracowań dotyczących innych typów ustrojów. Ogólnie, w przypadku mostów dla pieszych, tłumienie najczęściej jest niewielkie: $\Lambda < 0,10$. Zazwyczaj w literaturze podawany jest przedział, w którym znajdują się wartości parametrów tłumienia konstrukcji danego typu. Na przykład w [Bachmann: 1995] określono parametry tłumienia modalnego na podstawie pomiarów drgań z 43 brytyjskich kładek. Parametr tłumienia w przypadku pierwszej częstotliwości drgań własnych wyniósł w belkowych mostach stalowych 0,002 ($\Lambda = 0,01$) – minimum i 0,004 ($\Lambda = 0,03$) – wartość średnia. W przypadku stalowych kładek dla pieszych w [Grundmann: 1993] określono przedział: $\Lambda = 0,02 \div 0,06$. Należy zastanowić się, w której części przedziałów mogą znajdować się konstrukcje tensegrity. Jedne z cech tensegrity mają korzystne działanie – zwiększają tłumienie, inne praktycznie nie mają na nie wpływu. Spośród typowych materiałów konstrukcyjnych stal ma najmniejsze wartości tłumienia. Z drugiej strony konstrukcje tensegrity są wyjątkowo skomplikowane i posiadają wiele połączeń na trzpienie lub śruby, co wpływa na zwiększenie tłumienia. Mimo to bez dokładniejszych badań oraz chcąc pozostać po stronie bezpiecznej, można przyjąć niską wartość tłumienia, ponieważ wysoki poziom sprężenia likwiduje luzy w połączeniach i usztywnia całą strukturę, co zmniejsza ich rolę w tłumieniu drgań.

6.3.2 Kryteria użytkowe

Aby ocenić, czy drgania kładki tensegrity mają niekorzystny wpływ na komfort użytkowników obiektu, należy sformułować kryteria oceny tychże drgań.

Pierwszą istotną informację uzyskuje się dzięki analizie modalnej konstrukcji. Na podstawie częstotliwości i postaci drgań własnych można ocenić poziom ryzyka wzbudzenia nadmiernych drgań konstrukcji. Realne zagrożenie wystąpienia zjawiska rezonansu istnieje, kiedy częstotliwości drgań własnych konstrukcji zbliżone są do częstotliwości wzbudzenia.

Ze względu na złożoność zagadnień drgań wymuszonych w niniejszej pracy skupiono się jedynie na drganiach pionowych wywołanych przez pieszych. Pozwolą one na poznanie ogólnych charakterystyk dynamicznych kładek tensegrity. Szczegółowe analizy odnośnie bardziej

złożonych zagadnień dynamicznych w kładkach dla pieszych, takich jak dynamiczne oddziaływanie wiatru czy interakcja między konstrukcją i pieszym, można znaleźć na w literaturze (na przykład [Flaga : 2011]). Są to zjawiska aerodynamiczne, takie jak: flutter giętno-skrętny, wzbudzenie wirowe, wzbudzenie turbulentne, galopowanie, wzbudzenie wiatrowo-deszczowe, interferencja aerodynamiczna. Interakcja między obiektem i jej użytkownikami może z kolei prowadzić do powstania zjawiska synchronizacji pieszych i drgającej (szczególnie bocznie) konstrukcji.

Wibracje wywołane przez idących pieszych są ważne z punktu widzenia drgań kładek. Podstawowa częstotliwość kroku idącego pieszego wynosi ok. 2,0 Hz. Można przyjąć, że 95% idących pieszych stawia krok z częstotliwością między 1,65 i 2,35 Hz [Bachmann: 1995]. W przypadku normalnego biegu częstotliwość stawiania kroków wynosi między 2,4 i 2,7 Hz [Tilly: 1984], a przy szybkim biegu rzadko przekracza 3,5 Hz [Bachmann: 1995]. Wyjątkowo znaczenie mogą mieć druga i trzecia częstotliwość wymuszenia drgań wywoływanych przez idących pieszych, wynoszące odpowiednio ok. 4,0 i 6,0 Hz [Bachmann: 1995]. Wzbudzenie drgań o wyższych częstotliwościach spowodowane jest występowaniem lokalnych maksimów w funkcji oddziaływania pieszego na podłoże podczas chodu. Wynikają one ze złożoności oddziaływania stopy pieszego na konstrukcję (przejsięcie pięta–palec) [Baumann: 1988]. Można przyjąć, że poza wskazanymi powyżej zakresami kładki mają niewielką wrażliwość na drgania wywołane przez pieszych. Zgodnie z normą [PN-EN 1990] kryterium komfortu (drgań pionowych) w kładkach dla pieszych należy sprawdzać, jeśli pierwsza częstotliwość drgań własnych jest mniejsza od 5,0 Hz. Innymi oddziaływaniami dynamicznymi powodowanymi przez pieszych mogą być podskoki, przysiady czy wymuszenia intencjonalne. Częstotliwości tych zachowań są zbliżone do wymienionych powyżej.

Jeśli na podstawie analizy modalnej zidentyfikowano ryzyko wystąpienia uciążliwych drgań konstrukcji, powinno się przeprowadzić obliczenia mające na celu wyznaczenie maksymalnych przyspieszeń (lub prędkości) pomostu, powstających w trakcie drgań. W literaturze występuje wiele kryteriów maksymalnej wartości przyspieszeń konstrukcji [Flaga: 2011]. Jednym z najprostszych warunków jest ten określony w [PN-EN 1990], mówiący o maksymalnej wartości przyspieszenia w drganiach wywołanych przejściem pojedynczego pieszego: $a \leq 0,7 \text{ m/s}^2$. Tę samą wartość często uzależnia się od częstotliwości drgań własnych za pomocą nieliniowych zależności, jednak rozrzut wartości dopuszczalnych w poszczególnych opracowaniach jest duży. Na przykład przy częstotliwości drgań własnych wynoszących 2,0 Hz dopuszczalne przyspieszenia mogą wahać się od 0,43 [Bahmann: 1995] do 1,40 m/s^2

[Tilly: 1984]. W celu obliczenia przyspieszenia można stosować określone wzory (np. z [PN-EN 1995-2]) lub wykonać obliczenia numeryczne, na przykład za pomocą programów MES.

Podobną analizę można przeprowadzić w przypadku poziomych drgań poprzecznych (bocznych) wywoływanych przez pieszych. Podstawowa częstotliwość wzbudzenia drgań poziomych jest dwa razy mniejsza niż drgań pionowych. Wynika to z faktu, że częstotliwość wzbudzonych drgań pionowych związana jest z każdym krokiem pieszego, natomiast poziomych z krokiem co drugim, ponieważ poprzeczne siły poziome wynikające ze stawiania obu nóg zwrócone są w przeciwnych kierunkach. A zatem podstawowa częstotliwość takich drgań wynosi ok. 1,0 Hz. Zgodnie z normą [PN-EN 1990] kryterium komfortu pieszych przy drganiach poziomych bocznych należy sprawdzać, gdy podstawowa częstotliwość tego typu drgań własnych przeszła jest mniejsza od 2,5 Hz. W takim przypadku maksymalna dopuszczalna wartość przyspieszeń wynosi $0,2 \text{ m/s}^2$.

6.3.3 Charakterystyki dynamiczne konstrukcji tensegrity

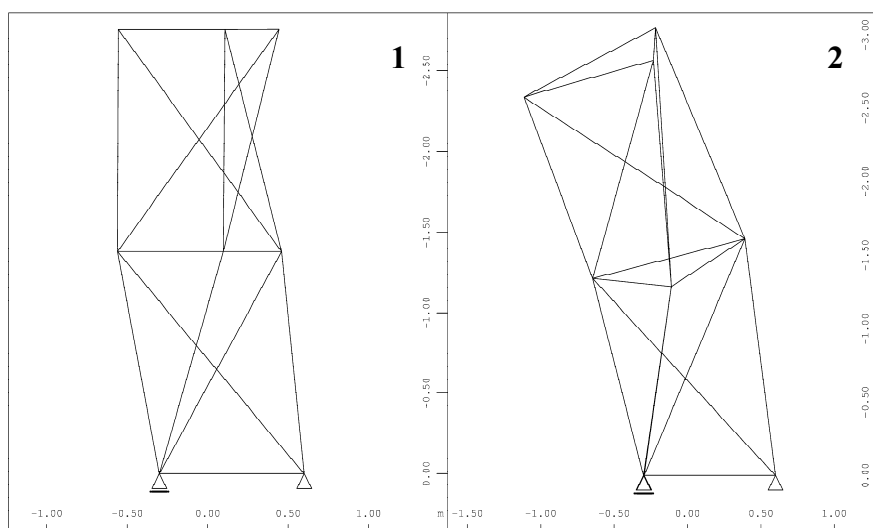
W celu określenia charakterystyk dynamicznych przykładowych konstrukcji o cechach tensegrity wykonano obliczenia z użyciem modeli MES, które opisano w rozdziale 6.2.

W programie Sofistik wyznaczono 12 pierwszych częstotliwości i postaci drgań własnych. Obliczenia wykonano za pomocą algorytmu iteracyjnego¹⁵, z użyciem konsekwentnych macierzy mas. Obciążenie zewnętrzne (bez obciążenia zmiennego) uwzględniono w postaci mas skupionych w węzłach. W obliczeniach uwzględniono wpływ macierzy sztywności geometrycznej, zarówno od sił sprężenia wstępnego, jak również wynikającego z obciążeń zewnętrznych pochodzących z ciężaru pomostu i wyposażenia. Jest to szczególnie ważne w przypadku omawianych słupów, w których siły normalne (sprężenie) w elementach występują wyłącznie ze względu na obciążenie zewnętrzne. Przy braku sprężenia konstrukcje te mają mechanizmy infinitezymalne, a co za tym idzie – zerowe częstotliwości drgań własnych.

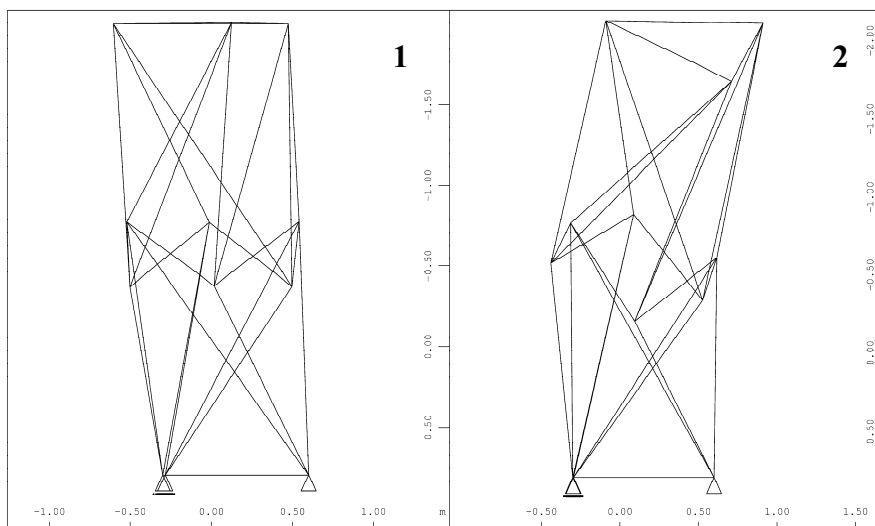
Na rysunku od 6.37 do 6.44 przedstawiono wybrane postaci, a w tabelach od 6.13 do 6.16 zestawiono wybrane częstotliwości drgań własnych omawianych modeli.

¹⁵ *simultaneous vector iteration* [Rutishauser: 1970]

Słupy



Rys. 6.37 Słup z połączeniem węzeł-węzeł: pierwsza postać drgań (skrętna) $f = 1,05$ Hz (por. rys. 4.16), druga postać drgań (giętna) $f = 2,75$ Hz



Rys. 6.38 Słup z połączeniem zastrzał-ciężno: pierwsza postać drgań (skrętna) $f = 1,87$ Hz, druga postać drgań (giętna) $f = 2,22$ Hz

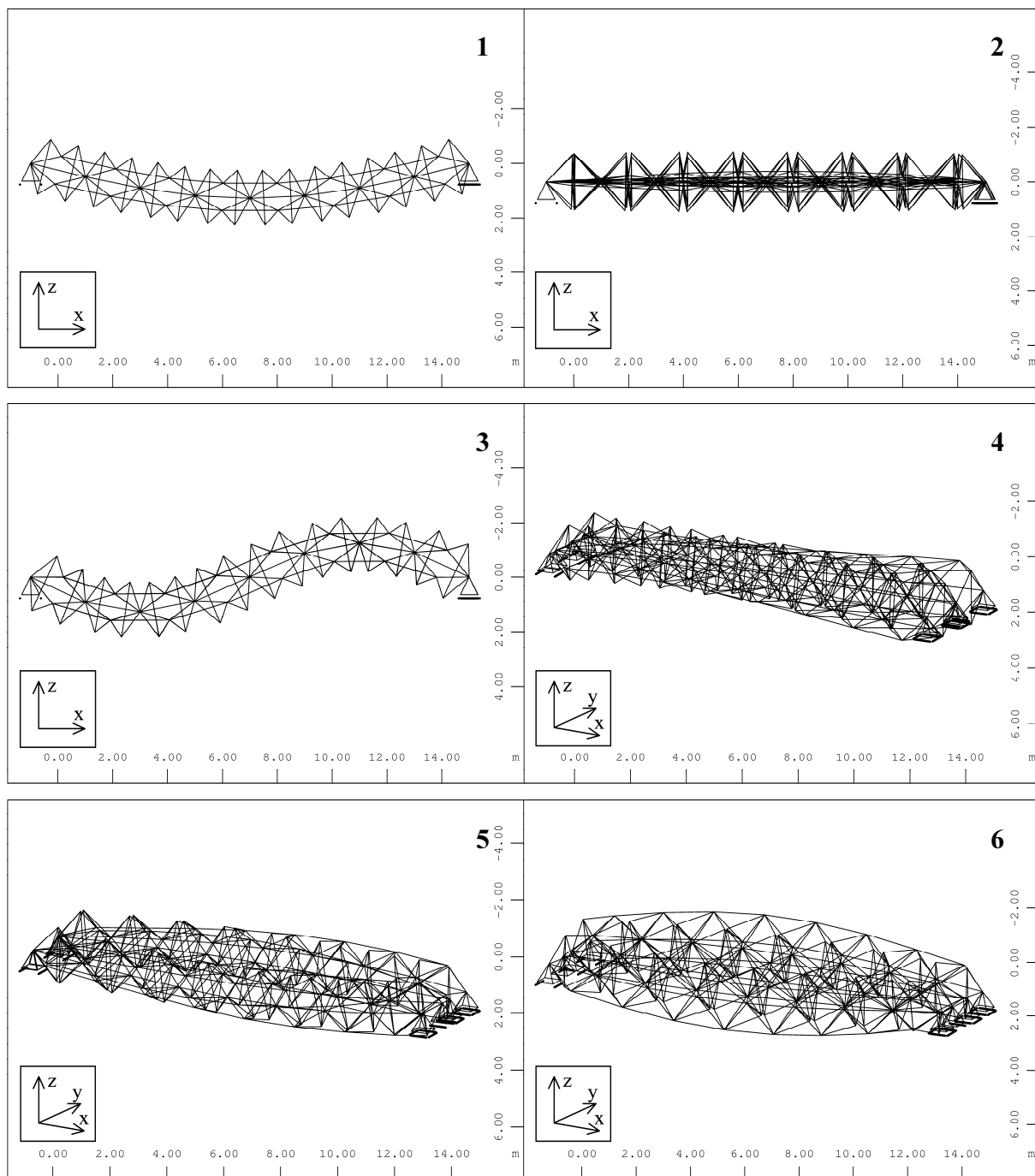
Tab. 6.13 Słupy tensegrity: zestawienie charakterystyk dynamicznych

L.p.	Częstotliwość [Hz]		Postać
	"węzeł-węzeł"	"zastrzał-ciężno"	
1	1,05	1,87	Skrętna (antysymetryczna) (infinitezymalna)
2	2,75	2,22	Giętna
3	3,01	2,34	Giętna
4	16,71	4,12	Inna Skrętna (symetryczna)
5	19,97	14,74	Inne
6	20,82	15,43	
7	28,04	23,90	
8	29,56	24,06	

W przypadku słupów interpretacja postaci drgań własnych jest utrudniona ze względu na duże rozmiary elementów i podstaw w stosunku do wysokości konstrukcji. Z tego powodu nie można jednoznacznie porównać większości postaci drgań do analogicznych drgań prętów. Najistotniejsze są pierwsze częstotliwości drgań. Są one niebezpiecznie niskie i z tego powodu konstrukcje mogą być wrażliwe na oddziaływania pieszych. Szczególnie pierwsza, skrętna postać drgań, która jednocześnie powoduje zmianę wysokości słupa, może wpadać w interakcję z drgającym pomostem. Pierwsza postać drgań własnych ma postać mechanizmu infinytezymalnego. Do pełnej oceny należałoby wykonać model całej (z uwzględnieniem pomostu) konstrukcji, ponieważ wtedy można byłoby ocenić rzeczywistą, zewnętrzną masę i sztywność wpływającą na drgania słupa.

Przęsła

W przęśle z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity przy połączeniu modułów „I typu”, poza znanymi postaciami drgań własnych, pojawia się postać drgań, która odpowiada mechanizmowi infinytezymalnemu. Ponadto ruch infinytezymalny (zbliżanie i oddalanie się równoległych zastrzałów) występuje częściowo w połączeniu z innymi postaciami drgań. Pierwsza częstotliwość drgań własnych sugeruje możliwość wystąpienia dyskomfortu użytkownika związanego z ruchem pieszych.



Rys. 6.39 Przęsło z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity „I typu”: pierwsze 6 postaci drgań własnych¹⁶

¹⁶ W całej pracy na rysunkach przedstawiających postaci drgań własnych posłużono się różnymi rodzajami i kierunkami rzutu równoległego, dobierając je adekwatnie do charakteru drgań.

Tab. 6.14 Przęsło z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity „I typu”: zestawienie charakterystyk dynamicznych

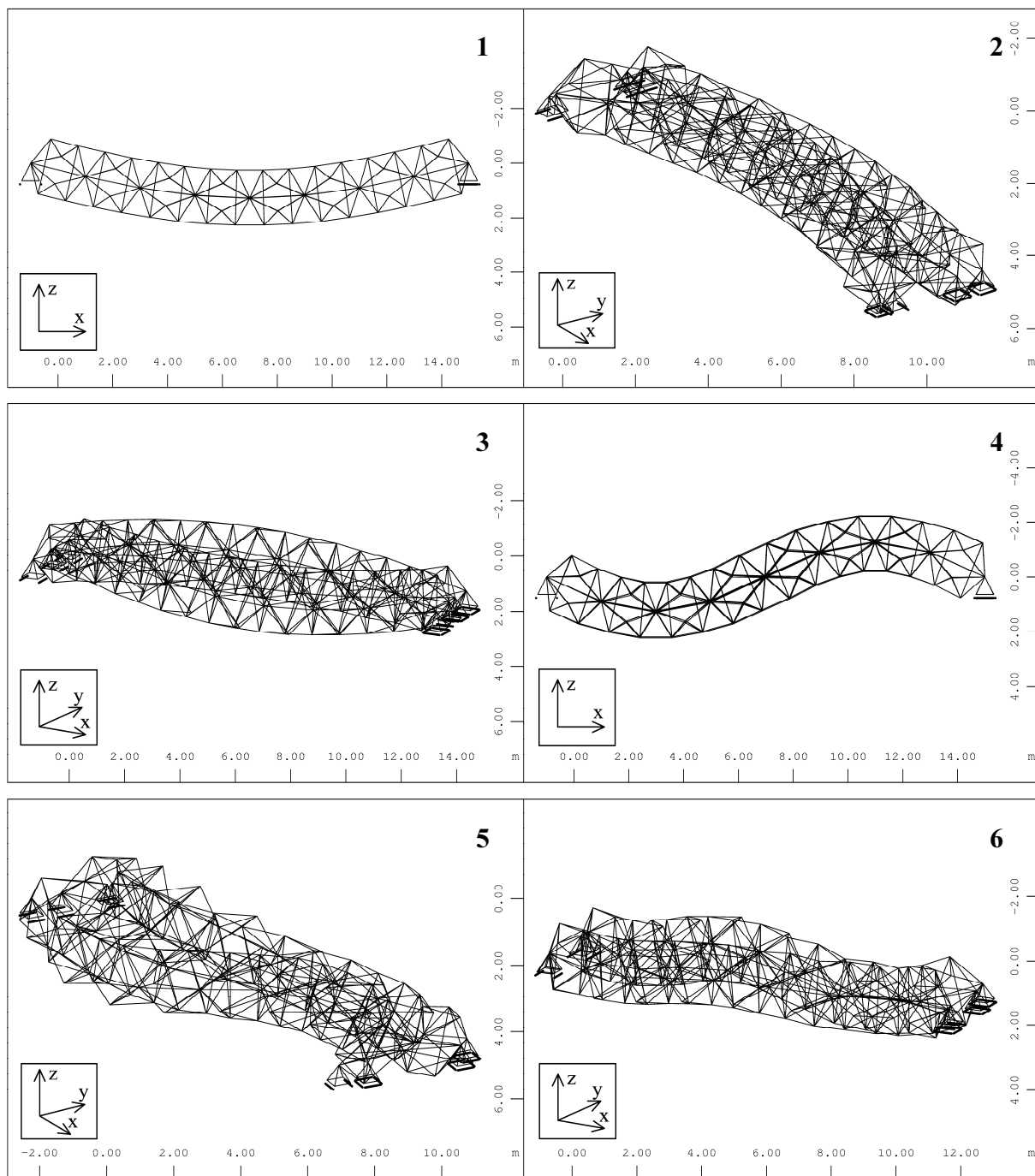
L.p.	Częstotliwość [Hz]	Postać
1	2,40	Pionowa giętna (symetryczna)
2	5,78	Infinitezymalna
3	8,81	Pionowa giętna (antysymetryczna)
4	11,56	Pozioma giętno-infinitezymalna (symetryczna)
5	12,09	Skrętno-infinitezymalna (symetryczna)
6	14,34	Skrętno-infinitezymalna (symetryczna)
7	21,87	Pionowa giętna (symetryczna)
8	24,89	Skrętna (antysymetryczna)

Tab. 6.15 Przęsło z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity „II typu”: zestawienie charakterystyk dynamicznych

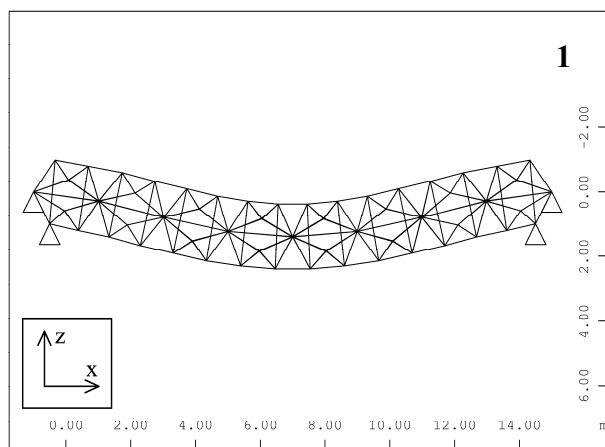
L.p.	Częstotliwość [Hz]	Postać
1	3,60	Pionowa giętna (symetryczna)
2	7,61	Pozioma giętno-skrętna (symetryczna)
3	12,84	Skrętna (symetryczna)
4	13,27	Pionowa giętna (antysymetryczna)
5	15,46	Pionowa giętno-skrętna (antysymetryczna)
6	25,39	Inna
7	25,58	Pozioma giętno-skrętna (symetryczna)
8	26,24	Pozioma giętno-skrętna (symetryczna)

Przy połączeniu modułów „II typu” postaci drgań własnych nie zawierają ruchów związanych z mechanizmami, ze względu na ich zablokowanie przez dodatkowe cięgna. Częstotliwości drgań własnych są wyższe niż w przypadku połączenia pierwszego typu, co potwierdza większą sztywność takiego połączenia. Należy jednak podkreślić, że w obu przypadkach pierwsze częstotliwości drgań własnych są wyraźnie mniejsze niż w typowych konstrukcjach stalowych tych rozpiętości. Wynika to przede wszystkim z założenia o braku wpływu pomostu na sztywność konstrukcji przy jednoczesnym uwzględnieniu jego ciężaru. Dla porównania – model ze współpracującą płytą żelbetową ma pierwszą częstotliwość drgań własnych wynoszącą 6,91 Hz.

W przypadku zmiany podparcia konstrukcji (rys. 6.28) powstaje częściowe utwierdzenie przęsła (rys. 6.41), co skutkuje podwyższeniem sztywności i częstotliwości drgań własnych. Pierwsza częstotliwość drgań takiego ustroju wynosi 7,64 Hz.



Rys. 6.40 Przęsło z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity „II typu”: pierwsze 6 postaci drgań własnych

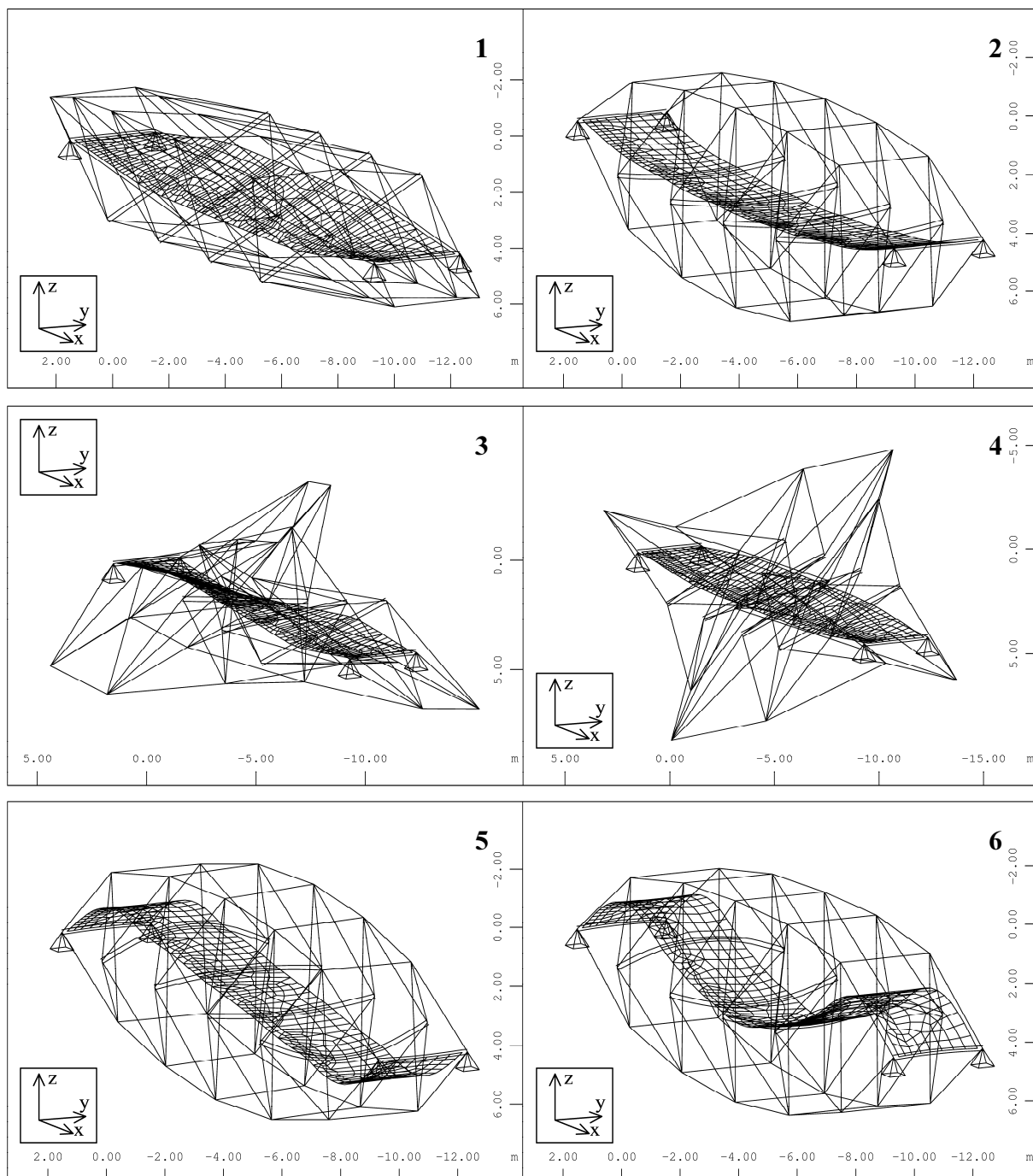


Rys. 6.41 Przęsło z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity „II typu” – zmieniony sposób podparcia: pierwsza postać drgań własnych (giętna) $f = 7,64$ Hz

Tab. 6.16 Konstrukcja mostowa o cechach tensegrity: zestawienie charakterystyk dynamicznych

L.p.	Częstotliwość [Hz]	Postać drgań płyty pomostu
1	2,47	Skrętna (symetryczna)
2	3,54	Pionowa giętna (symetryczna)
3	4,49	Skrętna (antysymetryczna)
4	5,38	Skrętna (symetryczna)
5	5,38	Pionowa giętna (antysymetryczna)
6	6,23	Pionowa giętna (symetryczna)
7	7,90	Skrętna (antysymetryczna)
8	8,24	Skrętna (symetryczna)
9	8,32	Pionowa giętna (antysymetryczna)
10	9,68	Pozioma giętna (symetryczna)

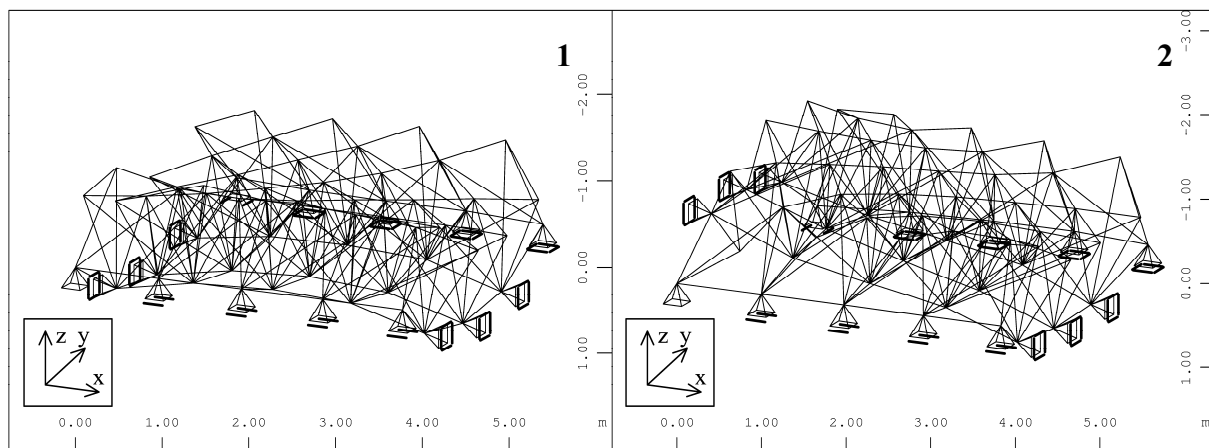
Prezentowana konstrukcja o cechach tensegrity (rys. 6.31) charakteryzuje się stosunkowo niskimi pierwszymi częstotliwościami drgań własnych jak na założoną rozpiętość 24 m. Dodatkowo pierwsze częstotliwości drgań giętnych (2,47 Hz) i skrętnych (3,54 Hz) mają zbliżone wartości, co może skutkować równoczesnym wzbudzeniem obu rodzajów drgań, na przykład w zjawisku flutteru giętno-skrętnego. W przedstawionych postaciach drgań skrętnych (rys. 6.42) przemieszczeniom podlegają przede wszystkim pionowe zastrzały przy mniejszych drganiach samego pomostu, co sugeruje konieczność zwrócenia szczególnej uwagi na wrażliwość dynamiczną dźwigarów prętowo-cięgnowych.



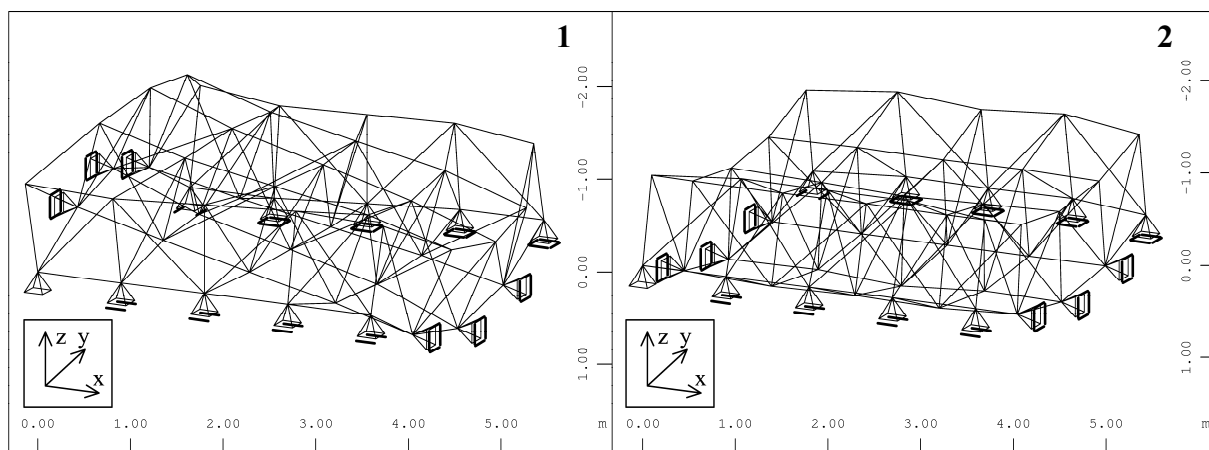
Rys. 6.42 Konstrukcja mostowa o cechach tensegrity: pierwsze 6 postaci drgań własnych

Płyty

Przy wyznaczaniu postaci drgań własnych omawianych płyt o cechach tensegrity zastosowano dodatkowe podparcie uniemożliwiające poziomy przesuw skrajnych węzłów przesłowych. Na rysunku 6.43 i 6.44 przedstawiono dwie pierwsze postaci drgań obu płyt. Kolejne postaci drgań mają charakter trudny do określenia, często związane z ruchem małych fragmentów konstrukcji zawierających tylko część elementów.



Rys. 6.43 Płyta ze zmodyfikowanych modułów typu *simplex*: pierwsze postaci drgań własnych: giętna ($f = 17,75$ Hz) i skrętna ($f = 21,79$ Hz)



Rys. 6.44 Płyta Raducanu i Motro: pierwsze postaci drgań własnych: skrętna ($f = 25,06$ Hz) i giętna ($f = 27,96$ Hz)

Pierwsze częstotliwości drgań własnych płyty ze zmodyfikowanych modułów typu *simplex* wynoszą: 17,8 Hz (postać giętna) i 21,8 Hz (postać skrętna). W przypadku płyty Raducanu i Motro są to wartości: 25,1 Hz (postać skrętna) i 28,0 Hz (postać giętna). Obie konstrukcje charakteryzują się wysokimi wartościami częstotliwości drgań własnych. Wynika to z bardzo małej rozpiętości ustroju, a niekoniecznie ze specyfiki samej struktury. Częstotliwości drgań własnych płyty drugiego typu są większe, co potwierdza wnioski o jej większej sztywności, wyciągnięte na podstawie badania odpowiedzi konstrukcji na oddziaływania statyczne (rozdz. 6.2.3). Wartości częstotliwości drgań własnych są na tyle duże, że można stwierdzić, iż globalnie (pomijając drgania cięgien) ustrój jest niewrażliwy na rozpatrywane oddziaływania dynamiczne. Charakter pierwszych postaci drgań własnych wskazuje na fakt, że konstrukcja mimo złożonej geometrii pracuje w sposób płytowy.

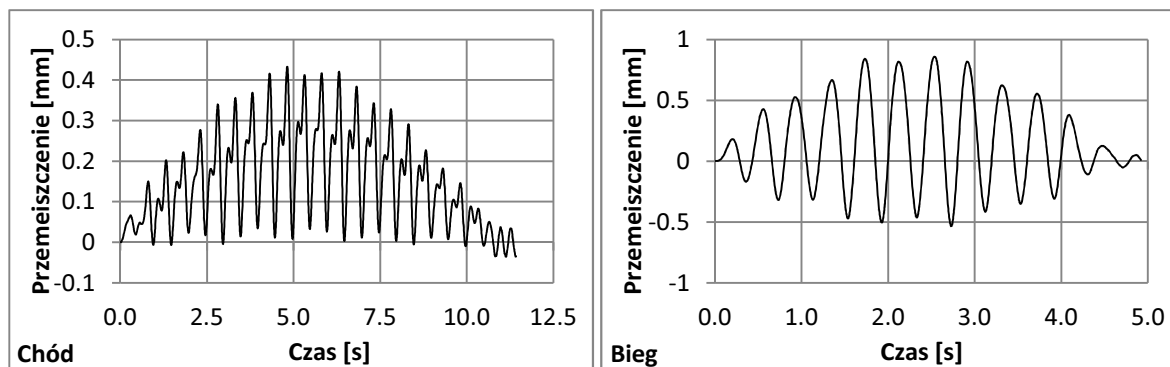
6.3.4 Odpowiedź konstrukcji na oddziaływanie pieszych

Spśród przedstawionych powyżej konstrukcji wybrano dwie o niskich częstotliwościach drgań własnych. Modele konstrukcji z połączonych rozszerzonych ośmiościanów tensegrity (I typu; rys. 6.25) oraz konstrukcji mostowej o cechach tensegrity (rys. 6.31) poddano oddziaływaniu pieszego w postaci poruszającej się siły skupionej o zmiennej wartości. W ten sposób zamodelowano obciążenie pojedynczym pieszym idącym i biegącym. Posłużono się funkcjami obciążenia wg [Seiler: 2004], zaimplementowanymi w programie Sofistik. Założono ciężar pojedynczego pieszego wynoszący 0,80 kN. Przyjęto częstotliwość stawiania kroków wynoszącą 2,00 Hz (pieszy) i 2,50 Hz (biegacz) przy długości kroku 0,70 m (pieszy) i 1,30 m (biegacz).

Obliczenia wykonano za pomocą metody Newmarka ($\beta = 0,25$, $\delta = 0,50$), przyjmując krok czasowy wynoszący 0,01 s. Założono tłumienie w postaci modelu Rayleigha o wielkości współczynników $\alpha = 0,052$, $\beta = 0,000088$ (odpowiednik $\Lambda = 0,02$, równym przy $f_1 = 1,5$ Hz i $f_2 = 10,0$ Hz, zgodnie ze wzorem (6.9)).

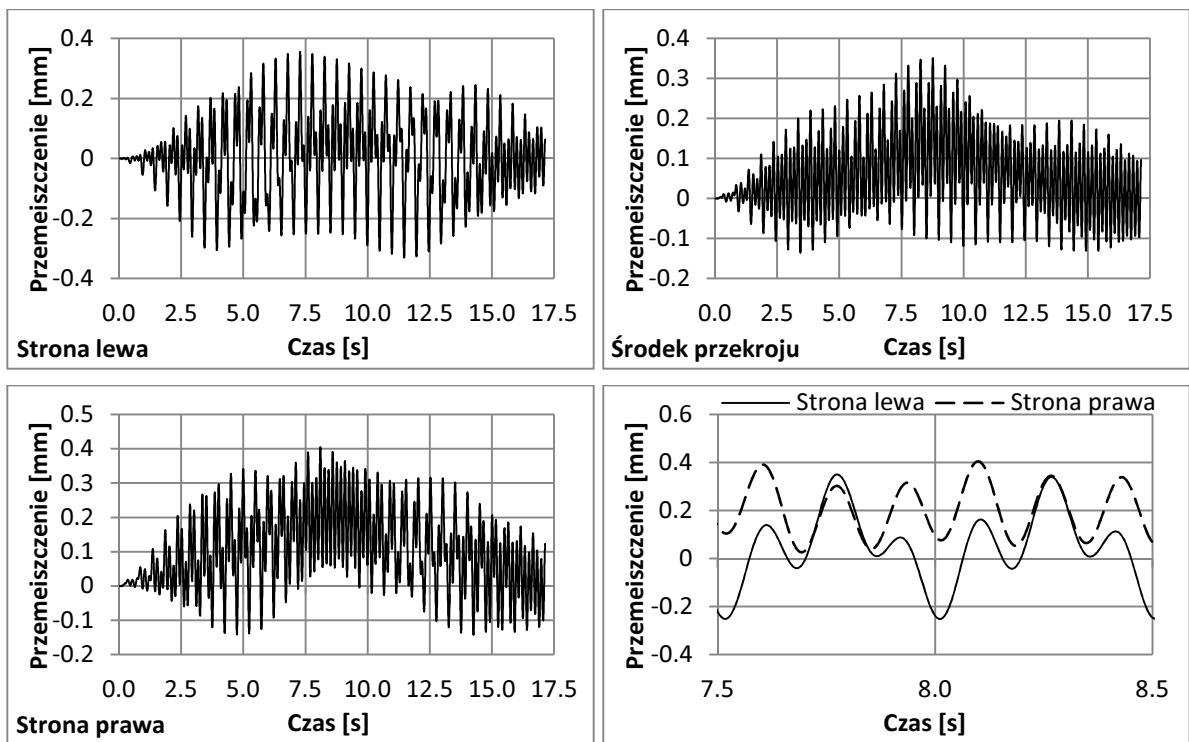
Przy obciążaniu modelu przęsła z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity (rys. 6.25) założono, że pieszy porusza się w osi skrajnego prawego rzędu pionowych zastrzałów. Pieszy, idąc, pokonuje kładkę w czasie 11,4 s, a biegąc – w czasie 4,9 s. Wyniki analizy w postaci przemieszczeń węzła znajdującego się w środku przęsła w prawym rzędzie poziomych, podłużnych zastrzałów zamieszczono na rysunku 6.45. Przedstawione na wykresach przemieszczenia są sumą przemieszczeń statycznych i dynamicznych. Efekty dynamiczne w przypadku biegu są większe niż w przypadku chodu oraz większe od ugięcia statycznego, dlatego wartość przemieszczenia zmienia znak w czasie. Obciążenie w przypadku idącego pieszego zamodelowano za pomocą funkcji okresowej w postaci szeregu Fouriera, w którym poza częstotliwością stawiania kroku występują wyższe składowe harmoniczne. Efektem jest występowanie lokalnych maksimum funkcji przemieszczenia na odpowiednim wykresie. Maksymalne przyspieszenia analizowanego węzła wyniosły $0,09 \text{ m/s}^2$ (chód) i $0,31 \text{ m/s}^2$ (bieg).

Odpowiedź konstrukcji na oddziaływania pieszych jest bardzo podobna do belki swobodnie podpartej. Dominują przemieszczenia związane z pierwszą giętną postacią drgań własnych. Mimo niewielkiej rozpiętości przyspieszenia w przypadku biegającego pieszego są znaczące, chociaż mniejsze niż wartości uznawane za obniżające komfort użytkowników. Dzieje się tak za sprawą zbliżonych częstotliwości wymuszenia i drgań własnych.

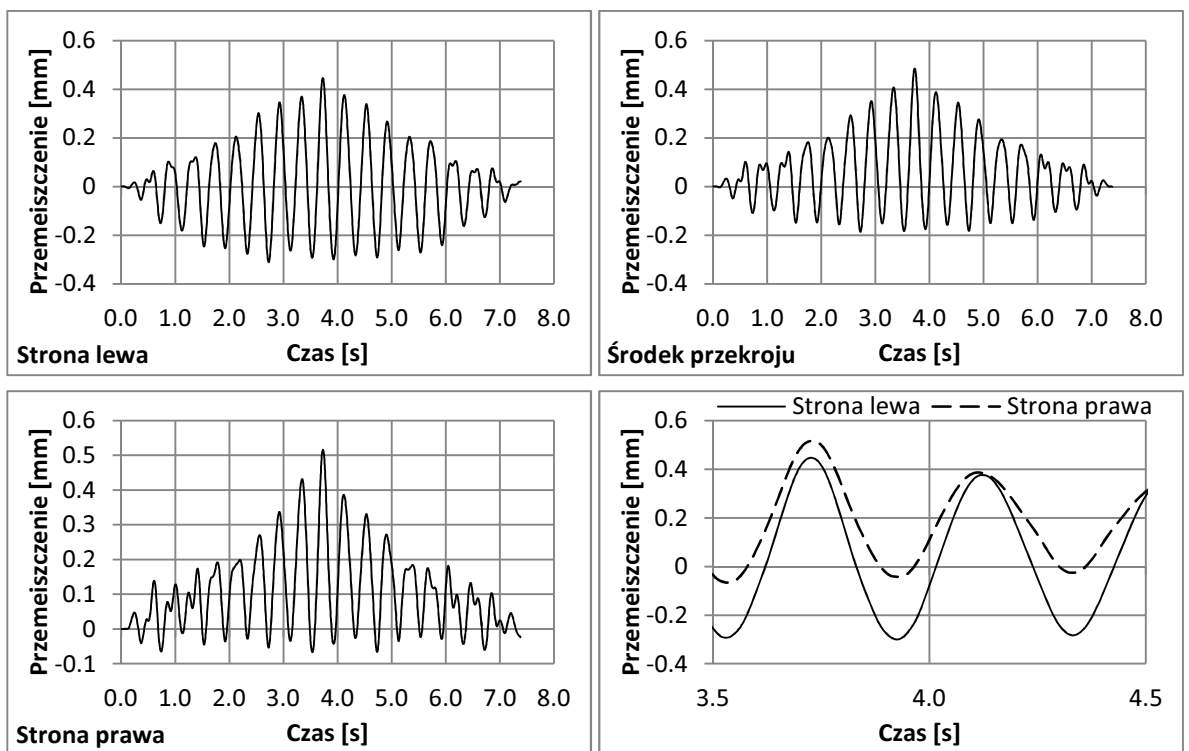


Rys. 6.45 Przęsło z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity „I typu”: przemieszczenia w środku przęsła pod wpływem pojedynczego pieszego idącego i biegnącego

W przypadku drugiego modelu przęsła (rys. 6.31) odpowiedź na obciążenia jest bardziej złożona, ponieważ w tej konstrukcji występuje wiele stosunkowo niskich częstotliwości drgań własnych. W obliczeniach założono, że pieszy porusza się po osi znajdującej się po prawej stronie pomostu w odległości 1,0 m od osi konstrukcji. Przy rozpatrywanej rozpiętości przęsła pieszy, idąc, pokonuje kładkę w czasie 17,1 s, a biegnąc – w czasie 7,4 s. Wyniki przemieszczeń w środku rozpiętości przęsła w różnych miejscach przekroju poprzecznego przedstawiono na rysunkach 6.46 (pieszy idący) i 6.47 (pieszy biegnący). Czwarty wykres na rysunkach przedstawia wybrany, reprezentatywny okres i ma na celu porównanie przemieszczeń z lewej i prawej strony przekroju poprzecznego, co obrazuje jego skręcanie. Maksymalne przyspieszenia w środku rozpiętości przęsła wyniosły $0,26 \text{ m/s}^2$ (chód) i $0,13 \text{ m/s}^2$ (bieg). Konstrukcja pod wpływem obu typów obciążenia drga w sposób złożony.



Rys. 6.46 Kładka o cechach tensegrity: przemieszczenia węzłów w środku przekroju pod wpływem obciążenia idącym pieszym



Rys. 6.47 Kładka o cechach tensegrity: przemieszczenia węzłów w środku przekroju pod wpływem obciążenia bieżącym pieszym

Obciążenie pieszym idącym wywołuje drgania zbliżone przede wszystkim do pierwszej postaci skrętnej (symetryczna) oraz trzeciej postaci giętnej (symetryczna) drgań własnych (1 i 6 postać drgań na rysunku 6.42). Drgania w zależności od postaci mają częstotliwości (odpowiednio): 2,0 Hz i 6,0 Hz, co wynika bezpośrednio z częstotliwości i charakteru wzbudzenia. Maksymalne przyspieszenia w środku przęsła odpowiadają drganiom o częstotliwości 6,0 Hz. W związku z dominującą postacią drgań wykonano sprawdzenie przyspieszeń w węźle znajdującym się w odległości 3,5 m od początku pomostu. Maksymalne przyspieszenia w tym punkcie wyniosły $0,40 \text{ m/s}^2$ przy częstotliwości 6,0 Hz.

W przypadku biegu w zależności od położenia obciążenia dominują następujące postaci drgań: pierwsza skrętna (symetryczna), pierwsza giętna (symetryczna) i druga giętna (anty-symetryczna) (1, 2 i 5 postać drgań na rys. 6.42). Maksymalne przyspieszenia w środku przęsła odpowiadają częstotliwości 2,5 Hz, natomiast maksymalne przyspieszenie w odległości 3,5 m od początku pomostu wyniosły $0,39 \text{ m/s}^2$ przy częstotliwości 5,0 Hz.

Przyspieszenia w konstrukcji wywołane od przejścia pojedynczego pieszego sugerują możliwość wystąpienia drgań przekraczających wymogi kryteriów komfortu wibracyjnego przy przejściach już niewielkich zsynchronizowanych grup pieszych lub strumieni pieszych. Jednak ocena ryzyka wystąpienia takich drgań zależy od wielu czynników i wymaga prognoz ruchu na obiekcie.

Biorąc pod uwagę niewielką rozpiętość, można stwierdzić, że obie konstrukcje wykazują zwiększoną wrażliwość na oddziaływania dynamiczne poruszających się po nich pieszych. Ryzyko przekroczenia akceptowalnych poziomów drgań wynika z niewielkiej sztywności przęsła. Należy jednak podkreślić, że w obliczeniach przyjęto stosunkowo niskie współczynniki tłumienia. Możliwe jest ograniczenie drgań konstrukcji na przykład poprzez jej usztywnienie i zmianę częstotliwości drgań własnych. Jednak o ile takie działanie może być efektywne w przypadku drgań skrętnych, o tyle głównym czynnikiem decydującym o podstawowych drganiach giętnych jest rozpiętość konstrukcji. W przypadku kładek tensegrity, szczególnie podczas projektowania większych przęsła, nawet przy spełnieniu warunków stanów granicznych nośności, konieczne jest przeprowadzenie analizy dynamicznej. W celu spełnienia wymogów kryteriów komfortu wibracyjnego może być konieczne zastosowanie rozwiązań zwiększających tłumienie konstrukcji, na przykład poprzez wybór odpowiedniej nawierzchni albo poprzez zastosowanie tłumików drgań takich jak strojone tłumiki masowe. Wnikliwa analiza powinna zostać przeprowadzona również w odniesieniu do innych oddziaływań dynamicznych.

6.4 Wpływ temperatury na stan samonapężenia

W procesie projektowania konstrukcji mostowych uwzględnia się wpływ obciążeń termicznych. Odpowiedź płyt i przęseł tensegrity na różnicę temperatury między skrajnymi krawędziami elementów zasadniczo nie różni się od innych konstrukcji mostowych. W przypadku przedstawionych w niniejszej pracy przykładów zmiana temperatury otoczenia (równomierne ogrzanie bądź oziębienie) nie wpływa na zmianę sił wewnętrznych w elementach oraz na ugięcia pionowe przęseł. Dzieje się tak ze względu na zewnętrzną statyczną wyznaczalność ustrojów. Swoboda rozszerzania sprawia, że wszystkie elementy pod wpływem temperatury odkształcają się równomiernie, w związku z czym nie powstają dodatkowe siły wewnętrzne.

Wyjątek stanowi konstrukcja przęsła o cechach tensegrity, przedstawiona na rysunku 6.31. W tym przypadku siła sprężająca utrzymywana jest w kablach za sprawą warunków podparcia. Wpływ zmian temperatury na wielkość sił wewnętrznych w elementach jest analogiczny do wpływu zmian temperatury na wielkość siły naciągu pojedynczego zakotwionego cięgna. Pod wpływem zmiany temperatury cięgno zmienia swoją długość, a co za tym idzie – siłę sprężającą i strzałkę zwisu. Zatem ogrzanie analizowanej kładki powoduje spadek sił w kablach głównych i w konsekwencji w pozostałych elementach oraz wpływa na zwiększenie strzałki ugięcia obiektu.

W modelu MES opisanym w rozdziale 6.2.2 uwzględniono równomierne ogrzanie konstrukcji o 45°C. W stanie granicznym nośności w najbardziej wyężonych fragmentach kabli siła spadła o 79 kN (kable górne) i 61 kN (kable dolne), a w pozostałych cięgnach o 10 kN (por. tab. 6.9). Maksymalne przemieszczenie konstrukcji wzrosło o 1,6 mm. Wyniki wskazują na konieczność uwzględnienia wpływu zmian temperatury na siłę sprężającą w elementach tego typu konstrukcji.

Innymi zjawiskami pozastatycznymi mającymi wpływ na pracę konstrukcji są zjawiska reologiczne, jednakże w przypadku konstrukcji stalowych są to zjawiska dobrze rozpoznane i opisane [Reiner: 1958] [Kisiel: 1967] [Chrzanowski: 1995]. Sposób uwzględnienia strat sił sprężających w cięgnach nie różni się od metod projektowych stosowanych w projektowaniu innych konstrukcji.

6.5 Konstrukcje sterowane i rozwijane

6.5.1 Konstrukcje aktywne

Zastosowanie konstrukcji aktywnych w inżynierii lądowej zostało zaproponowane przez Yao w 1972 roku [Yao: 1972], w kontekście ochrony wysokich budynków przed silnymi wiatrami. Konstrukcje aktywne składają się z dwóch rodzajów elementów: pasywnych (statycznych) i aktywnych (dynamicznych) [Soong: 1987]. Za pomocą elementów aktywnych możliwe jest zmienianie wybranych własności lub parametrów całej konstrukcji. Jest to tak zwane sterowanie aktywne. Przykładem elementów aktywnych mogą być siłowniki, które w trakcie eksploatacji konstrukcji zmieniają swoją długość w sposób quasi-statyczny bądź dynamiczny. Sterowanie ma za zadanie dostosowanie konstrukcji do panujących warunków i działających na nią obciążeń i jest rozwinięciem systemów monitoringu [Shea: 2002].

Sterowanie w konstrukcjach inżynierskich początkowo rozwijało się głównie przy projektowaniu konstrukcji narażonych na działanie trzęsień ziemi i silnych wiatrów. Jako pierwsze stosowane były systemy pasywne, takie jak strojone tłumiki masowe, które wciąż z powodzeniem używane są w nowych konstrukcjach. W tym wypadku pasywność polega na tym, że parametry tłumików projektowane są przed zamontowaniem w konstrukcji i pozostają niezmiennie w dłuższych okresach użytkowania. Innymi rodzajami tłumików są systemy aktywne oraz hybrydowe i quasi-aktywne [Kawecki: 2010]. W tych przypadkach tłumiki reagują na bieżąco (aktywnie) na rzeczywisty stan konstrukcji, ponieważ są zintegrowane z zamontowanymi w niej czujnikami. Obecnie rozwinięte są systemy monitorowania konstrukcji składające się z szeregu czujników mogących stale mierzyć parametry takie jak przyspieszenia, przemieszczenia, odkształcenia w wielu fragmentach konstrukcji. W przypadku mostów monitoring może obejmować również badanie warunków atmosferycznych (monitoring meteorologiczny) czy obciążeń (monitoring wizyjny, wagi dynamiczne). Na podstawie danych przesyłanych z czujników można bardzo precyzyjnie określić stan wybranych parametrów, a nawet całej konstrukcji. Pozyskanie tak dokładnych danych, które dzięki technikom komputerowym mogą być błyskawicznie analizowane, daje bardzo wiele możliwości. Jedną z nich jest połączenie systemów monitoringu konstrukcji z jej sterowaniem, co pozwala na projektowanie konstrukcji, które mogą aktywnie adaptować się do czynników na nią działających. Adaptacja konstrukcji może polegać na wspomnianym zmniejszeniu drgań, ale również na zmianie geometrii konstrukcji (na przykład: ugięcia, spadku) czy reakcji na zniszczenie jej fragmentu. Sterowanie może znaleźć zastosowanie w konstrukcjach szczególnie wrażliwych na spełnie-

nie kryteriów użytkowych. Mogą to być kryteria: ugięcie, na przykład w lekkich konstrukcjach narażonych na występowanie dużych przemieszczeń czy w mostach kolejowych dużych prędkości albo drgań wywołanych dynamicznym działaniem wiatru bądź pieszych na przykład w kładkach. Sterowanie może być użyteczne również w konstrukcjach wrażliwych na działanie warunków atmosferycznych czy efekty zmęczeniowe.

Połączenie monitoringu konstrukcji i jej sterowania z metodami komputerowymi pozwalającymi na właściwą identyfikację sytuacji, dobór optymalnej reakcji, a także gromadzenie i korzystanie z gromadzonych danych (wiedzy), prowadzi do tak zwanych „konstrukcji inteligentnych”¹⁷, zdolnych do samodzielnej analizy i adaptacji do zmian otoczenia. Schemat działania konstrukcji inteligentnych można przedstawić w następujący, uproszczony sposób (por. [Shea: 2002] [Smith: 2009]):

1. Konstrukcja zostaje poddana obciążeniu lub jej część ulega awarii.
2. Czujniki gromadzą dane dotyczące odpowiedzi konstrukcji.
3. Komputer przetwarza i analizuje dane. Na podstawie zaprogramowanych komend, symulacji numerycznych lub zgromadzonej wiedzy określa, jakie obciążenie zostało przyłożone lub jakie zniszczenie nastąpiło w konstrukcji.
4. Komputer wyznacza optymalny sposób reagowania, w celu uzyskania założonych parametrów projektowych, przy określonych warunkach.
5. Elementy aktywne wdrażają rozwiązanie, zmieniając właściwości konstrukcji.
6. Czujniki gromadzą dane na temat stanu konstrukcji po wprowadzeniu zmian.
7. Komputer przetwarza i analizuje dane w celu sprawdzenia, czy odpowiedź konstrukcji na działanie elementów aktywnych jest prawidłowa i zgodna z przewidywaniami. W razie potrzeby znajduje inne rozwiązanie (powrót do punktu 3 lub 4).
8. Komputer gromadzi wyniki analiz w celu wykorzystania ich w przyszłości, gdy zaistnieje podobna sytuacja.

Kryteria użytkowe mogą być założonymi parametrami projektowymi, do których ma dążyć konstrukcja w przypadku reagowania na działanie obciążenia. Jednak jeśli nastąpi awaria, zazwyczaj celem działania będzie próba zmniejszenia wyężenia konstrukcji po redystrybucji sił wewnętrznych lub zmniejszenie niebezpiecznych przemieszczeń do czasu wykonania naprawy bądź ewakuacji czy zamknięcia ruchu.

¹⁷ Określenie zaczerpnięte z języka angielskiego – *intelligent structures* – oznacza inteligencję rozumianą jako zdolność systemu do analizy danych, wyboru celowej reakcji i umiejętności korzystania ze zgromadzonej wiedzy bez bezpośredniego udziału człowieka i nie ma na celu przypisania cech ludzkich konstrukcji (por. [Gilewski: 2013a])

6.5.2 Sterowanie konstrukcjami tensegrity

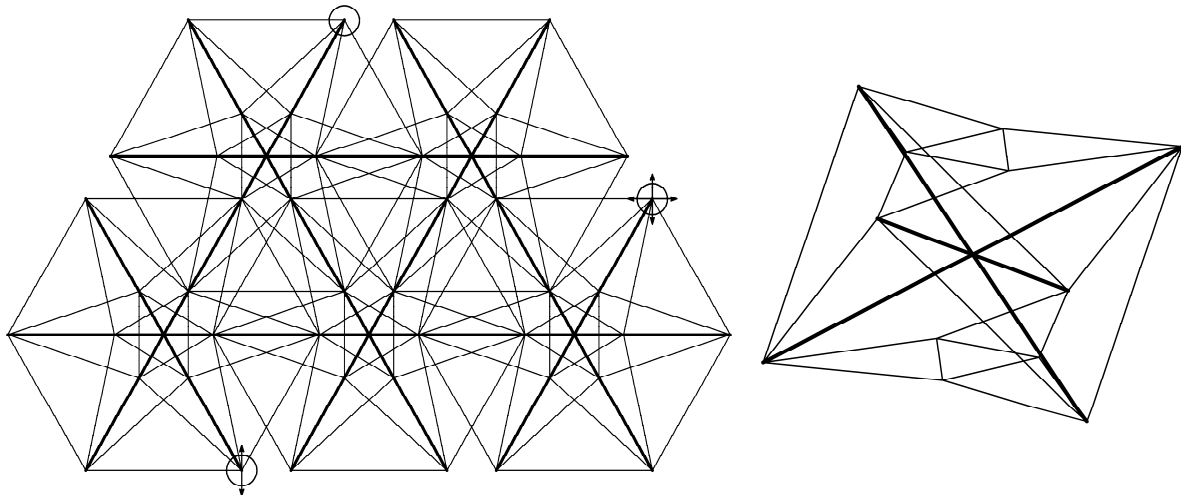
Tensegrity za sprawą swoich cech mogą być wykorzystane w konstrukcjach sterowanych. Ich lekkość i kratownicowa, ciągnowo-zastrzałowa struktura wpływają na łatwość zmiany ich właściwości. Modyfikowanie tego typu konstrukcji wymaga wykonania pracy o stosunkowo niewielkiej wielkości [Skelton: 2000], a elementy prętowe w sposób naturalny mogą zostać zastąpione lub dostosowane do przyjęcia funkcji elementów aktywnych. W zastrzałach lub ich węzłach montuje się siłowniki, które w razie potrzeby wydłużają się lub skracają, zmieniając odległość między węzłami, jak również układ sił wewnętrznych w elementach. Analogicznie siła sprężająca w cięgnach może być modyfikowana za pomocą odpowiednich mechanizmów wpływających na ich długość i odkształcenia podłużne.

Co więcej, bardzo istotne są właściwości charakterystyczne dla „czystych tensegrity”, występujące również w niektórych konstrukcjach o cechach tensegrity. Istnienie stanów samonapężenia sprawia, że niejednokrotnie zmiana naprężenia tylko jednego elementu wpływa na układ sił wewnętrznych dużego fragmentu, a nawet całego ustroju. Ponadto jeśli występują mechanizmy infinytezymalne, sterowanie elementem aktywnym może nie tylko wpływać na geometrię i naprężenia w innych fragmentach struktury, ale także ma bardzo silny wpływ na sztywność całej konstrukcji, a zatem zarówno na jej własności statyczne, jak i dynamiczne, co wykazano w rozdziałach 4.2 i 4.3.

Możliwości i metody zmiany kształtu konstrukcji tensegrity na przykładzie struktur opartych na module typu *simplex* są przedmiotem rozważań naukowych opisanych między innymi w pracach: [Micheletti: 2007] [Skelton: 2009b] [Moored: 2009]. Zakres zmian kształtu jest na tyle duży, że prowadzone są zaawansowane badania dotyczące zastosowania tensegrity w robotyce, por. np.: [Aldrich: 2004] [Paul: 2006] [Graells: 2009] [Shai: 2009] [Koizumi: 2012]. Sterowanie konstrukcjami inżynierskimi opartymi na idei tensegrity jest przedmiotem wielu badań, również z wykorzystaniem modeli fizycznych.

Najbardziej zaawansowane badania dotyczące konstrukcji inteligentnych z wykorzystaniem struktur o cechach tensegrity prowadzone są na Politechnice Federalnej w Lozannie. Wykonano tam pełnowymiarowy fizyczny model konstrukcji o cechach tensegrity, składającej się z pięciu modułów (rys. 6.48). Struktura ma powierzchnię 15 m^2 , wysokość $1,20 \text{ m}$ i jest zdolna do przenoszenia obciążenia rozłożonego wynoszącego 300 N/m^2 . Składa się z 30 rurowych polimerowych zastrzałów kompozytowych (FRP) i 120 cięgien ze stali nierdzewnej, o polach przekroju poprzecznego (odpowiednio) 703 mm^2 i $11,9 \text{ mm}^2$. W dziesięciu zastrzałach zamontowano siłowniki. Trzy czujniki mierzyły przemieszczenia wybranych gór-

nych węzłów. Model posłużył wypracowaniu odpowiednich algorytmów umożliwiających sterowanie konstrukcją, optymalną metodę identyfikacji obciążeń oraz gromadzenie i wykorzystywanie danych z wcześniejszych cykli odpowiedzi konstrukcji na obciążenia [Domer: 2005].



Rys. 6.48 Konstrukcja z Politechniki Federalnej w Lozannie – widok z góry z zaznaczonymi punktami podparcia i kierunkami przesuwów, aksonometria pojedynczego modułu

Przy projektowaniu algorytmów posłużono się analizą wielokryterialną. Jest to przykład doboru parametrów projektowych mogących być celem sterowania przy wyznaczaniu sposobu reakcji konstrukcji inteligentnej na obciążenia zewnętrzne lub awarię. W przypadku obciążeń statycznych kryteriami były: 1. Utrzymanie spadku podłużnego i poprzecznego górnej powierzchni struktury, mierzonego na podstawie danych z czujników przemieszczeń. 2. Minimalizacja zmiany długości siłowników w stosunku do położenia „0”. 3. Minimalizacja naprężeń w najbardziej wyężonych elementach. 4. Maksymalizacja sztywności konstrukcji. W analizie narzucono następujące warunki: 1. Dodatnich sił w ciągnach. 2. Ograniczenia naprężeń w elementach do wartości mniejszych niż dopuszczalne (z uwzględnieniem wybooczenia). 3. Ograniczenia wydłużeń i skróceń siłowników do wartości mniejszych od dopuszczalnych. Doświadczalnie udowodniono skuteczność algorytmu (utrzymanie spadku górnej powierzchni) przy sukcesywnym, statycznym obciążaniu kolejnych węzłów oraz wpływ „uczenia się” konstrukcji na przyspieszenie znajdowania reakcji na obciążenie w kolejnych cyklach pracy [Adam: 2006] [Adam: 2007a] [Adam: 2008]. W przypadku awarii jednego z elementów zastosowano kryteria z pominięciem warunków użytkowych, czyli: 1. Maksymalizacja sztywności konstrukcji. 2. Minimalizacja naprężeń w najbardziej wyężonych elementach. Doświadczalnie wykazano zdolność konstrukcji do samodiagnozy (lokalizacja zniszczenia)

i samonaprawy (zwiększenie sztywności, zmniejszenie wyężenia elementów) [Adam: 2007b] [Smith: 2009]. Model posłużył również do badań nad kontrolą drgań. Wykazano, że za pomocą elementów aktywnych i zmiany stanu samonapężenia można sterować charakterystykami dynamicznymi konstrukcji i niwelować drgania konstrukcji w odpowiedzi na obciążenie harmoniczne [Bel Hady Ali: 2010b].

Sterowanie konstrukcjami tensegrity było również przedmiotem innych badań. W pracy [Djouadi: 1998] zaprezentowano algorytm aktywnego tłumienia drgań konstrukcji tensegrity. Metodę zbadano na przykładzie belki wspornikowej złożonej z czterech modułów tensegrity (zmodyfikowany *simplex*) z siłownikami zamontowanymi na wybranych zastrzałach (co drugi moduł). Sterowanie właściwościami kratownicy wybudowanej w ramach programu „Tensarch” (por. rozdz. 2.2.3) przedstawiono w pracy [Averseng: 2005]. W konstrukcji opartej na strukturze opatentowanej przez Raducanu i Motro zamontowano siłowniki rozpięte między węzłami, poza elementami konstrukcyjnymi. Umożliwiły one zarówno sterownie geometrią konstrukcji, jak i zmniejszenie amplitudy drgań poprzez tłumienie aktywne. W artykule [Korkmaz: 2011] zaprezentowano propozycję sterowania konstrukcją kładki z jazdą pośrednią, złożonej z modułów pierścieniowych opartych na pięciokącie (konstrukcja opisana w rozdziale 7.2), w reakcji na awarię (usunięcie) jednego z elementów. Przy wyznaczaniu optymalnego sposobu reakcji na awarię założono, że po samonaprawie ugięcie kładki w środku przęsła oraz siły w elementach mają mieć wartości dopuszczalne, przy czym cel ma zostać osiągnięty przy minimalnej sumie zmian długości siłowników. W [Korkmaz: 2012] założenia rozbudowano o warunek minimalnej sumy zmian naprężeń w elementach konstrukcyjnych.

Cechy tensegrity oraz wyniki badań przedstawione w wymienionych przykładach dają pozytywne efekty, jeśli chodzi o podatność konstrukcji na sterowanie, zarówno pod względem łatwości zmian ich właściwości, jak również efektywności działania elementów aktywnych. Ze względu na swoją specyfikę tensegrity mogą być z powodzeniem adaptowane do konstrukcji sterowanych i inteligentnych. Te z kolei mogą znaleźć wiele zastosowań w mostownictwie, zwłaszcza w przypadku kontroli ugięć, tłumienia drgań czy samonaprawy.

6.5.3 Konstrukcje rozwijane

Kolejną sferą mostownictwa, w jakiej przydatne mogą być unikalne cechy tensegrity, są konstrukcje rozwijane z postaci złożonej o małej objętości do formy rozłożonej, spełniającej funkcję mostu. Tego typu konstrukcje mogą być wykorzystywane dwojako: albo jako mosty ruchome, zapewniające w złożonej postaci drożność drogi wodnej, albo jako lekkie składane mosty tymczasowe, możliwe do przewożenia w złożonej postaci. Mała objętość i masa oraz

szybkość rozłożenia pozwalają na stosowanie tego typu obiektów w przypadku konieczności szybkiego stworzenia lub odtworzenia przeprawy. Są to na przykład zastosowania wojskowe – przeprowadzenia sprzętu i żołnierzy przez przeszkodę, lub wyjątkowe – w sytuacjach klęsk żywiołowych, takich jak powódzie albo trzęsienia ziemi, kiedy zastąpienie zniszczonej przeprawy umożliwia przemieszczanie się służb ratunkowych lub ewakuację ludności.

Obecnie mobilne mosty tymczasowe są domeną wojskowości, choć w razie potrzeby służą one wsparciem dla służb cywilnych. Spośród mostów wojskowych można wydzielić trzy grupy konstrukcji, w zależności od ich przeznaczenia. Są to mosty: szturmowe, wsparcia i komunikacyjne. Jedynie mosty szturmowe i niektóre wsparcia mogą być porównywane z konstrukcjami rozwijanymi. Są to głównie blachownicowe konstrukcje nożycowe (rys. 6.49) o rozpiętości maksymalnej 20 ÷ 25 m [Łopatka: 2009], poruszające się zazwyczaj na podwoziu kołowym lub czołgowym [Garstka: 2009]. Ich podstawowym zadaniem jest jak najszybsze (minuty) rozłożenie i przeprowadzenie pododdziałów w warunkach bojowych. Pozostałe konstrukcje wojskowe o większych rozpiętościach są mostami składanymi z przęsłami blachownicowymi lub kratownicowymi albo mostami pontonowymi, jednak ich rozłożenie wymaga dłuższego czasu (godziny). Idea mobilnych konstrukcji rozwijanych tensegrity polega na przewożeniu obiektu w postaci złożonej i jego przynajmniej częściowo automatycznym rozłożeniu na miejscu użytkowania. Są zatem porównywalne (nie pod względem funkcji, lecz sposobu i czasu rozłożenia) z konstrukcjami nożycowymi. Inne rozwiązanie, z przeznaczeniem cywilnym, zaproponował zespół z Uniwersytetu w Hiroszimie, gdzie skonstruowano pełnowymiarowy prototyp rozkładanego mostu drogowego z jazdą dołem, działającego na zasadzie położonego podnośnika nożycowego [Ario: 2013].



Rys. 6.49 Przykład mobilnego wojskowego mostu tymczasowego konstrukcji nożycowej [źródło: <http://www.defenceimagery.mod.uk/>, © Crown copyright 2006, licencja: OGL]

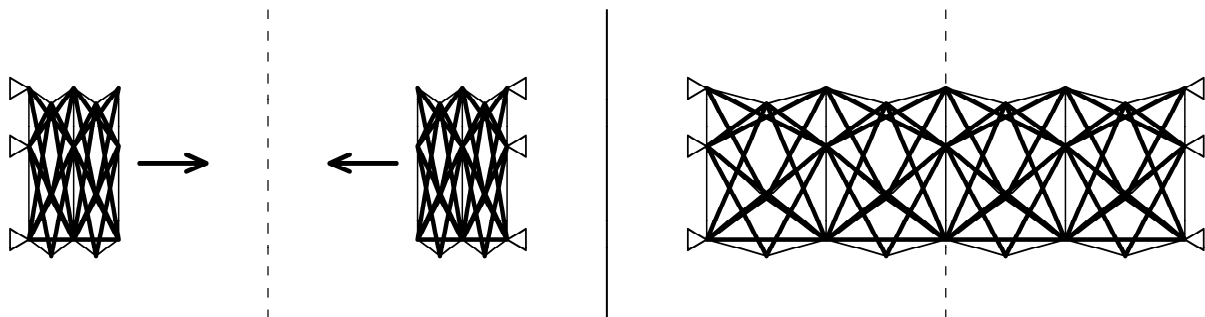
Konstrukcje tensegrity za sprawą swoich cech umożliwiają korzystanie z innego sposobu rozwijania. Ze względu na występowanie wielu elementów ciągnowych oraz charakterystyczne właściwości, odzwierciedlone chociażby w procesie poszukiwania formy, zmiana długości elementów tensegrity może służyć jego rozwijaniu bądź zwijaniu. W konstrukcjach występują stany samonapężenia, które usztywniają mechanizmy infinitezymalne. Jednakże zmiana konfiguracji elementów kratownicy tensegrity, ze względu na występowanie elementów ciągnowych, powoduje postawnie mechanizmów skończonych. Te zaś są niezbędne, aby można było przeprowadzić proces zwijania konstrukcji. A zatem można wyobrazić sobie, że w module typu *simplex* zastrzały rurowe zastąpione są teleskopowymi elementami aktywnymi. Jeśli elementy są w pozycji złożonej, struktura nie ma sztywności i składa się do postaci luźnych ciągów i zastrzałów. Stopniowe wydłużanie teleskopowych zastrzałów prowadzi do rozciągnięcia ciągów i w końcu ich napięcia. Ze względu na sposób połączenia elementów, wraz z rozciąganiem struktura uzyskuje znaną postać modułu tensegrity. Dalsze wydłużenie zastrzałów prowadzi do wprowadzenia stanu samonapężenia do konstrukcji, a co za tym idzie – jej usztywnienia. Jest to tylko jedna z możliwości, ponieważ zmiana długości może dotyczyć tylko niektórych elementów – elementów ciągnowych lub obu typów elementów jednocześnie.

Proces projektowania rozwijanego tensegrity można podzielić na trzy etapy [Motro: 2003]: 1. Stworzenie mechanizmów skończonych poprzez zmianę długości niektórych elementów. 2. Zagwarantowanie „kompatybilności geometrycznej” poprzez zapewnienie takich warunków ruchów węzłów w procesie rozwijania, aby każdy węzeł miał tylko jedną, określoną trajektorię ruchu (ograniczenie stopni swobody poruszających się węzłów). W innym przypadku ruch może się odbywać po nieskończonej liczbie trajektorii i nie ma kontroli nad procesem rozwijania. 3. Uzyskanie dostatecznej sztywności konstrukcji poprzez uzyskanie odpowiedniego poziomu samonapężenia po rozwinięciu. Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że projektowanie takich konstrukcji jest skomplikowanym zadaniem nieliniowym, w którym trzeba uwzględnić wiele ograniczeń, takich jak: możliwość kolizji zastrzałów czy splątania ciągów, konieczność zagwarantowania integralności struktury w całym procesie rozwijania. Dodatkowo możliwa jest optymalizacja rozwiązania pod względem liczby siłowników czy energii potrzebnej do rozwinięcia konstrukcji, co tylko zwiększa skomplikowanie zadania [Rhode-Barbarigos: 2012a].

Rozwijane konstrukcje tensegrity były przedmiotem wielu badań. Ariel Hanaor rozważał rozwijanie płyty złożonej ze zmodyfikowanych modułów typu *simplex* z zastrzałami o zmiennej długości [Hanaor: 1993]. W pracy [Bouderbala: 1998] przedstawiono wyniki doświadczeń z rozwijaniem rozszerzonych ośmiościanów tensegrity oraz utworzonych z nich wież, poprzez

zmianę długości wybranych cięgien. Badania rozszerzono w pracy [Motro: 2003] o płyty ze zmodyfikowanych czterozastrzałowych modułów typu *simplex*. Rozważano również płyty rozwijane z modułów o różnej liczbie zastrzałów (3, 4 i 6) [Masic: 2002]. Na bazie modułów typu *simplex* wykonano wiele badań, zarówno dotyczących pojedynczego modułu [Duffy: 2000], jak i opartych na nim wież z połączeniami typu węzeł-węzeł [Pinaud: 2004] [Shai: 2009] i typu zastrzał-cięgno [Sultan: 1998, 2003]. Gunnar Tibert w swojej pracy doktorskiej [Tibert: 2002] przedstawił wyniki badań nad zastosowaniem rozwijanych tensegrity w przestrzeni kosmicznej. Zaproponował konstrukcję anteny rozpiętej między zastrzałami rozwijanego modułu typu *simplex* (6 zastrzałów) oraz masztów z modułów typu *simplex* (3 zastrzały) z zastrzałami, które w postaci złożonej są załamane w przegubie. Przegub blokuje się po rozwinięciu do postaci docelowej [Tibert: 2003a].

Na podstawie wyników analiz przedstawionych w powyższych materiałach źródłowych można stwierdzić, że konstrukcje tensegrity mogą znaleźć zastosowanie w rozwijanych konstrukcjach mostowych. Potwierdzają to wyniki badań i wnioski zebrane w pracy doktorskiej Landolfa Rhode-Barbarigosa [Rhode-Barbarigos: 2012a, 2012b]. Przeprowadził on pełną analizę kładki złożonej z modułów pierścieniowych opartych na pięciokącie. Most rozwija się z dwóch części o schemacie wspornikowym, w przyczółkach. Połowy rozkładają się w kierunku środka przęsła, aby ostatecznie połączyć się w ciągły obiekt (rys. 6.50). W pozycji złożonej tworzona jest przestrzeń nad drogą wodną. Rozważono trzy schematy zwijania konstrukcji. W pierwszej z nich swoją długość zmieniają niektóre cięgna. W drugiej niektóre cięgna zostały połączone w dłuższe, ciągłe elementy (zmniejszenie liczby elementów aktywnych i stanów samonapężenia). W trzeciej dodatkowo niektóre z cięgien zostały zastąpione elementami sprężystymi (dalsze zmniejszenie liczby elementów aktywnych). Obliczenia poparto badaniami na fizycznym modelu w skali 1:4. Wyniki potwierdzają możliwość zastosowania rozwijanych konstrukcji tensegrity w mostownictwie.



Rys. 6.50 Schemat rozwijania kładki o cechach tensegrity złożonej z modułów pierścieniowych opartych na pięciokącie

Rozdział 7

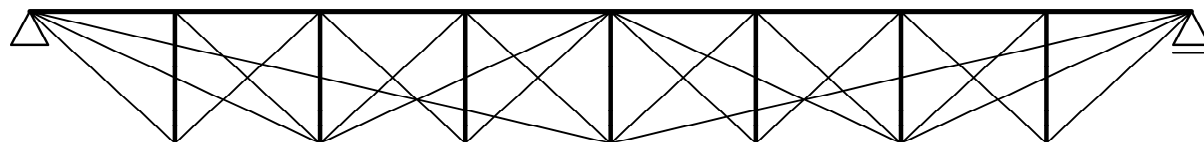
Studium i ocena wybranych konstrukcji mostowych typu tensegrity

7.1 Kładki quasi-tensegrity

Konstrukcje tensegrity różnią się od innych struktur cechami, które można precyzyjnie określić na podstawie narzędzi mechaniki budowli. Przedstawione w niniejszej pracy definicje określają, która konstrukcja może być nazywana tensegrity, a która i w jakim stopniu ma tylko część ich właściwości. Pojęcie quasi-tensegrity należy rozumieć jako określenie grupy, do której zaliczają się konstrukcje, w których chociaż można doszukać się pewnych analogii z tensegrity, to nie posiadają one własności wymienionych w rozdziale 2.1.2 (tab. 2.1). Uznano, że należy w sposób ogólny opisać takie konstrukcje za względu na – zdaniem autora – nieuzasadnione użycie pojęcia tensegrity w odniesieniu do niektórych obiektów mostowych.

7.1.1 Opis konstrukcji

Przedmiotem rozważań są obiekty, których konstrukcja oparta jest na zasadzie odwróconej kratownicy Finka (rys. 7.1). Przykładem mogą być: Kładka Forthside w Stirling w Szkocji (rys. 7.2) czy kładka w kompleksie doków Royal Victoria Dock w dzielnicy portowej Londynu (rys. 7.3). Obiekty tego typu bywają w Polsce nazywane mostami tensegrity, między innymi przez autorów koncepcji obiektów wzorowanych na takich konstrukcjach: kładki KL-03 nad trasą S-7 Salomea-Wolica [Markocki: 2011a, 2011b] (rys. 7.4) i kładki nad Odrą we Wrocławiu [Szybiński: 2013].



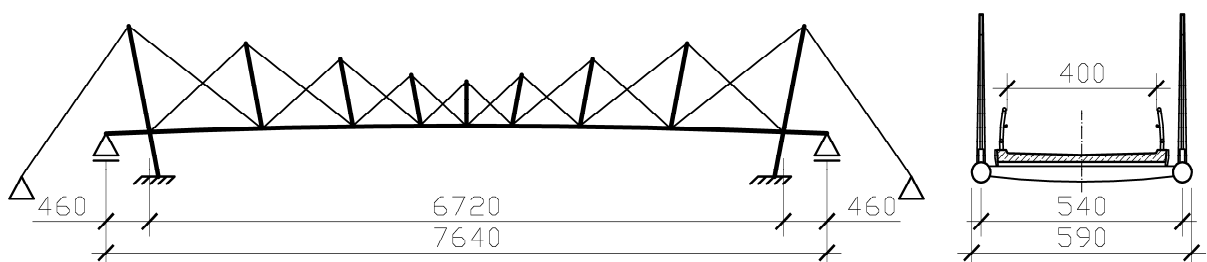
Rys. 7.1 Schemat statyczny kratownicy Finka



Rys. 7.2 Przykład konstrukcji quasi-tensegrity: Kładka Forthside, Stirling, Szkocja [(od lewej) źródło: Flickr, autor: SwaloPhoto, licencja: CC BY-NC 2.0; źródło: geograph, autor: Donald MacDonald, licencja: CC BY-SA 2.0]



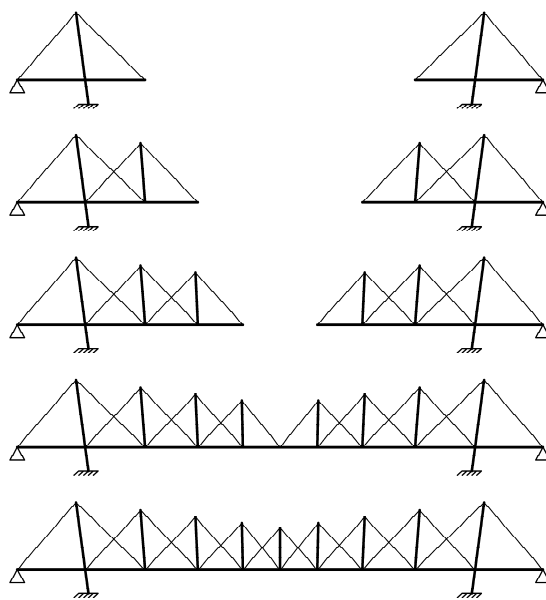
Rys. 7.3 Przykład konstrukcji quasi-tensegrity: kładka w Royal Victoria Dock, Londyn, Wielka Brytania [(od lewej) źródło: Flickr, autor: Liline, licencja: CC BY 2.0; źródło: geograph, autor: Richard Rogerson, licencja: CC BY-SA 2.0]



Rys. 7.4 Uproszczone: schemat statyczny i charakterystyczny przekrój poprzeczny kładki KL-03 nad trasą S-7 Salomea-Wolica wg [Markocki: 2011b] (różne skale)

Obiekty te często budowane są wspornikowo z obu przyczółków lub z użyciem podpór tymczasowych (podobnie jak mosty podwieszane) [Brownlie: 2008]. Na tej podstawie można prześledzić sposób pracy konstrukcji. Przy metodzie wspornikowej początkowo budowany

jest pylon. Ciężna z jednej strony pylonu są kotwione i pełnią rolę odciągów, a z drugiej służą podwieszeniu pierwszego segmentu pomostu. W miejscu kotwienia ciężien do pomostu konstruowany jest słupek. Pełni on rolę podobną do pylonu, jednak przenosi obciążenia pionowe nie na podłoże, lecz na podwieszenie połączone z pylonem. Do słupka podwiesza się kolejny segment pomostu i kolejny słupek. Proces powtarza się aż do skonstruowania całego pomostu (rys. 7.5). Siły naciągu dobrane są tak, aby obiekt w stanie docelowym miał projektowaną niweletę. Upraszczając rozumowanie, w gotowej konstrukcji obciążenia zbierane są przez płytę pomostu i przekazywane do słupków bezpośrednio (z udziałem poprzecznic) lub za pośrednictwem podwieszenia. Stąd siły przenoszone są do kolejnego podwieszenia i kolejnego słupka – bliżej pylonu. Tą ścieżką obciążenia sprowadzane są aż do pylonu i jego podparcia oraz odciążu i jego kotwienia. Siły normalne przenoszone są również przez belki, do których mocowane są słupki. W przypadku kratownicy Finka na skutek zginania mostu znajdujące się pod pomostem ciężarowe krzyżulce są głównie rozciągane. W odwróconym układzie w kładce quasi-tensegrity obciążenie może wywoływać ścisnienie niepołączonych z pylonami ciężarów podwieszenia. Brak ścisnienia w tych elementach uzyskuje się poprzez wprowadzenie sił wstępnego naprężenia, równoważących ciężar własny konstrukcji i wyposażenia.



Rys. 7.5 Uproszczony schemat budowy mostu quasi-tensegrity metodą wspornikową

7.1.2 Sposób realizacji zasad tensegrity

Ten rodzaj mostów z pewnością posiada szereg zalet takich jak: małe zużycie materiałów oraz możliwość uzyskania dużych rozpiętości, ciekawa forma architektoniczna, możliwości wykorzystania technologii budowy o ograniczonej ingerencji w teren pod obiektem oraz montażu

z wykorzystaniem prefabrykacji. Jednakże konstrukcja nie spełnia wymogów definicji czystego tensegrity ani konstrukcji o cechach tensegrity i nie powinna być uznawana za taką konstrukcję. Struktura nie ma przestrzennego charakteru oraz nie zawiera zastrzałów „zawieszonych” między cięgnami. Układ elementów ściskanych jest ciągły, ponieważ słupki połączone są z pomostem. W dodatku połączenie jest sztywne, o czym świadczy dwuwymiarowość dźwigarów cięgnowo-prętowych. W innym przypadku przy braku stężeń lub odciągów (poza kładką w Royal Victoria Dock) cały dźwigar nie byłby podparty w tym kierunku. A zatem zamiast nieciągłego układu elementów ściskanych pośród układów elementów rozciąganych struktura składa się ze sztywnego, zginanego pomostu z utwierdzonymi w nim słupkami. Wewnątrz między fragmentami tej bryły rozpięte są cięgna. W strukturze nie ma stanów samonapężenia. Chociaż konstrukcja jest wstępnie sprężona, siły nie są ani niezależne od obciążeń zewnętrznych, ani od warunków podparcia. Wartości i sposób wprowadzanego sprężenia wynikają przede wszystkim z podniesienia pomostu do poziomu niwelety, jako odpowiedzi na działanie ciężaru własnego konstrukcji i wyposażenia, zatem silnie zależą od obciążenia i kierunku jego działania. Dodatkowo wszystkie siły sprężające skutkują powstaniem reakcji w podporach, a w tym wypadku podpór nie można zastąpić elementami ściskanymi. Możliwość użycia cięgien wynika z wprowadzenia wstępnych sił sprężenia zależnych od kierunku działania obciążenia a nie z właściwości struktury, jak ma to miejsce w ustrojach tensegrity. Zdaniem autora stan samonapężenia jest cechą decydującą o odróżnieniu konstrukcji tensegrity od kratownicy nieposiadającej jej cech. To właśnie istnienie stanu samonapężenia decyduje o wzajemnej stabilizacji rozciąganych i ściskanych elementów struktury oraz o jej integralności. Reasumując, posługując się klasyfikacją konstrukcji tensegrity można stwierdzić, że konstrukcja ma następujące cechy: dźwigar jest kratownicowy, elementy rozciągane są cięgnami. W konstrukcji nie występują stany samonapężenia ani mechanizmy infinitezmalne. Układ elementów ściskanych jest ciągły i nie znajduje się wewnątrz układu elementów rozciąganych (K+ S– M– N– W– C+). Konstrukcję można określić albo jako most podwieszony, albo jako sprężoną kratownicę o cięgnowych krzyżulcach. Być może taki ustrój zasługuje na oddzielne miejsce w klasyfikacji konstrukcji mostowych.

Warto dodać, że autor, studiując literaturę przedmiotu, nie spotkał się z zagraniczną książką bądź artykułem, w których takie rozwiązanie konstrukcyjne zostałoby zakwalifikowane do konstrukcji typu tensegrity. Ta interpretacja została znaleziona jedynie w publikacjach krajowych po 2010 roku.

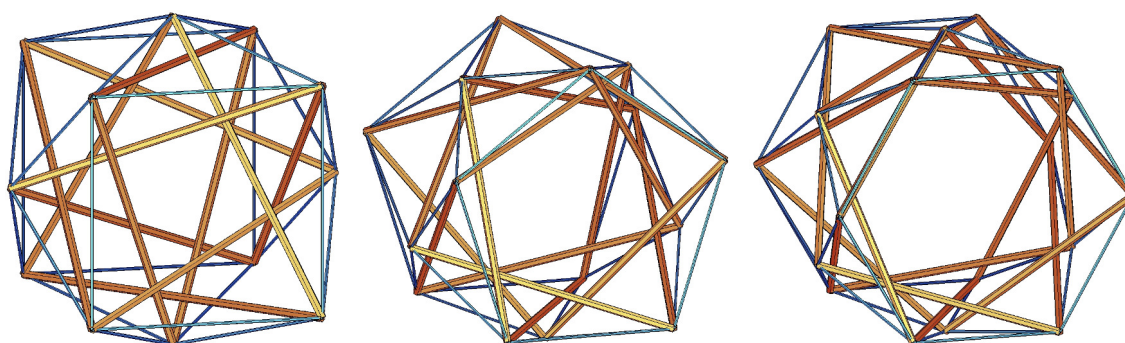
Przedstawione argumenty nie zmieniają faktu, że omawiane rozwiązanie jest bardzo interesujące, zarówno pod względem konstrukcyjnym, jak i architektonicznym. Istnieje duże

prawdopodobieństwo, że w przyszłości, za sprawą ich zalet, będzie powstawało więcej obiektów tego typu. Jednakże zdaniem autora użycie określenia tensegrity w stosunku do takich konstrukcji jest nieuzasadnione.

7.2 Kładka z modułów pierścieniowych

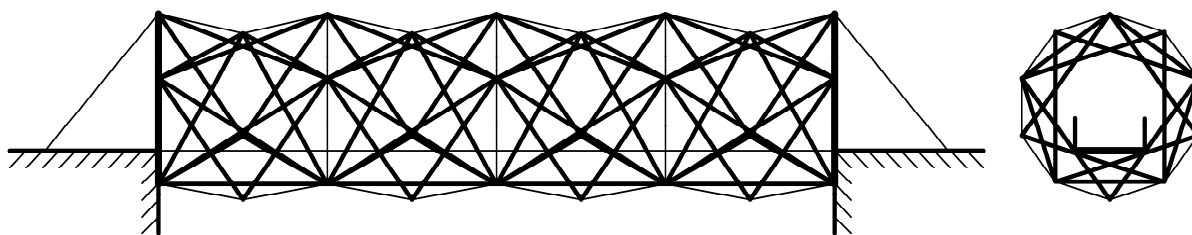
7.2.1 Opis konstrukcji

Rozważania będą dotyczyły projektu kładki opracowanego przez zespół naukowców związanych przede wszystkim z Politechniką Federalną w Lozannie. Obiekt złożony jest z tak zwanych modułów pierścieniowych [Mtro: 2009], zaproponowanych przez Anthony'ego Puga w książce [Pugh: 1976]. Jednym z nich jest sześćo-ośmiościan tensegrity (por. rozdz. 4.1.4), który jest szczególnym przypadkiem modułu pierścieniowego o podstawie kwadratowej. Szczególnym, ponieważ struktura oparta jest na bryle archimedesowej i ma równą długość zastrzałów i równą długość cięgien. Konstrukcja wydłużona o rozsuniętych podstawach zachowuje wszystkie cechy tensegrity i była stosowana w rozważaniach na temat omawianej kładki [Rhode-Barbarigos: 2010a]. Rozpatrywano również zastosowanie analogicznych modułów o podstawach foremnych pięcio- i sześciokątnych (rys. 7.6). Jako najbardziej efektywne¹⁸ wybrano rozwiązanie modułu opartego na pięciokącie [Rhode-Barbarigos: 2010b]. Moduł posłużył wykonaniu obliczeń statycznych i dynamicznych kładek o rozpiętości teoretycznej od 16,0 m (4 moduły) [Korkmaz: 2012] do 21,6 m (6 modułów) [Bel Hadj Ali: 2010a]. Na rysunku 7.7 schematycznie przedstawiono konstrukcję złożoną z 4 modułów. Struktura jest symetryczna względem środka przęsła, ze względu na zastosowanie przeciwnieskrętnych modułów.



Rys. 7.6 Moduły pierścieniowe o podstawach cztero-, pięcio- i sześciokątnej

¹⁸ Efektywność określono na podstawie współczynnika SEI (*Structural Efficiency Index*) (por. [Vu2006]), uwzględniającego stosunki: obciążeń zmiennych do ciężaru własnego konstrukcji, rozpiętości przęsła do przemieszczenia w jego środku oraz obciążeń zmiennych do przemieszczenia w środku przęsła [Rhode-Barbarigos: 2010b].



Rys. 7.7 Schematyczny widok z boku i przekrój poprzeczny pomostu kładki złożonej z 4 modułów pierścieniowych o podstawie pięciokątnej

W projektach założono, że ustrój podparty jest nieprzesuwnie we wszystkich węzłach zewnętrznych pięciokątów, co powoduje jego obustronne utwierdzenie. Ruch pieszy ma odbywać się po stalowym pomoście w przestrzeni znajdującej się wewnątrz struktury ciągnowo-prętowej. Pomost podparto w dolnych węzłach na początkach i końcach modułów. Skrajnia piesza ma wysokość 2,5 m i szerokość od 1,3 do 2,0 m (w zależności od opracowania). Założono, że zastrzały wykonane są z przekrojów rurowych ze stali konstrukcyjnej, ciągną linowe ze stali nierdzewnej.

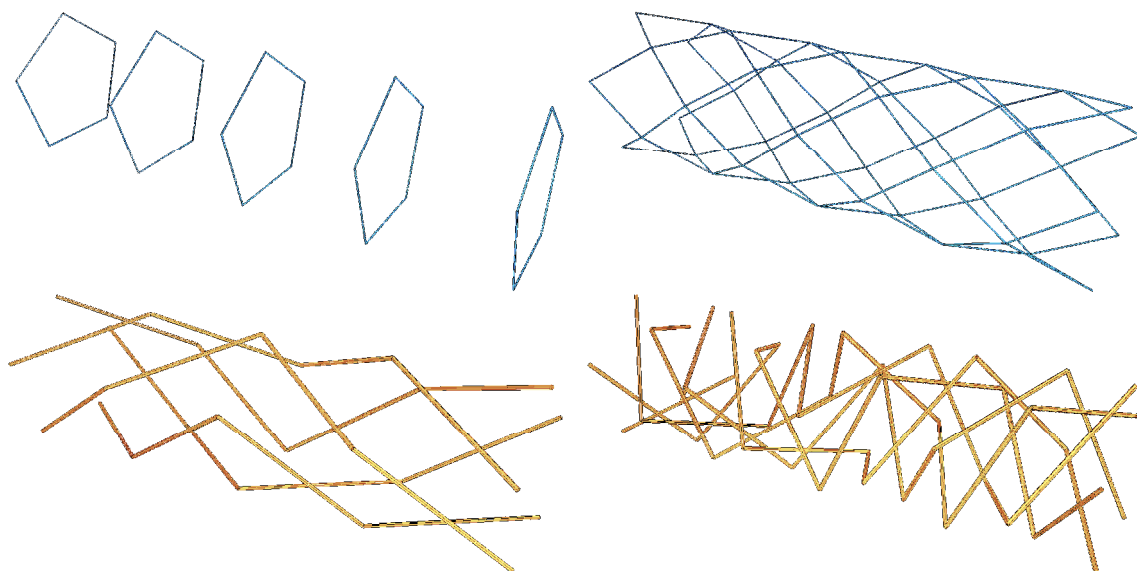
Konstrukcja nie została zrealizowana w tej formie. Jest ona jednak przedmiotem nie tylko rozważań dotyczących jedynie podstawowej funkcji mostu, ale również była analizowana pod kątem wykorzystania w konstrukcjach sterowanych i rozwijanych (por. rozdz. 6.5). Wybudowano model konstrukcji rozwijanej o tej strukturze w dużej skali (1:4) [Rhode-Barbarigos: 2012a].

Warto podkreślić, że koncepcja kładki była przedmiotem badań prowadzonych przez liczny zespół naukowy przez kilka lat. Publikacje naukowców z Politechniki Federalnej w Lozannie dotyczące tej konstrukcji ukazywały się w literaturze na przestrzeni lat 2009 (np. [Rhode-Barbarigos: 2009]) – 2012 (np. [Korkmaz: 2011]), a na temat innych projektów tensegrity już od roku 2002 (np. [Shea: 2002]).

7.2.2 Sposób realizacji zasad tensegrity

Sześćcio-ośmiościan tensegrity jest czystym tensegrity, podobnie jak utworzony przez jego wydłużenie moduł pierścieniowy o podstawie kwadratowej. Moduły pierścieniowe o podstawach pięcio- i sześciokątnych nie mają mechanizmów infinitymalnych. Podobnie wszystkie struktury (niezależnie od podstawy modułów) utworzone poprzez ich połączenie typu węzeł-węzeł. Zatem każda kładka omawianego typu, również ta złożona z modułów pierścieniowych o podstawie kwadratowej, będzie konstrukcją o wszystkich cechach tensegrity poza mechanizmami infinitymalnymi. Ponadto układ zastrzałów w module pięciokątnym jest ciągły. Ocena cech kładki jest zatem następująca: (K+ S+ M- N+/- W+ C+).

Struktura składa się z czterech typów elementów (rys. 7.8). Ciężna figur płaskich znajdują się w płaszczyźnie podstaw modułów, podłużne zastrzały łączą ich węzły. Pozostałe ciężna tworzą zewnętrzną ciągłą strukturę opartą na węzłach podstaw i węzłach znajdujących się w połowie odległości między podstawami (obrócona figura podstawy). Węzły te łączone są przez poprzeczne zastrzały. Parametry modułów oraz utworzonych z nich konstrukcji w zależności od ich liczby zestawiono w tabeli 7.1. W przypadku podparcia struktury w opisany powyżej sposób wartości uzyskane ze wzoru Maxwella (3.2) przy braku mechanizmów infinitesimalnych należy traktować jako stopień statycznej niewyznaczalności wynikający zarówno z istnienia stanów samonapężenia, jak również z warunków podparcia.



Rys. 7.8 Elementy struktury z pięciokątnych modułów pierścieniowych: ciężna figur płaskich, ciężna zewnętrzna, podłużne i poprzeczne zastrzały

Tab. 7.1 Parametry modułów pierścieniowych i utworzonych z nich konstrukcji

Podstawa	L. zastrzałów	L. cięgien	L. węzłów	L. mechanizmów infinitesimal.	L. stanów samonapężenia
Pojedynczy moduł					
Kwadrat	12	24	12	1	7
Pięciokąt	15	30	15	0	6
Sześciokąt	18	36	18	0	6
Struktura złożona z a modułów ($a > 1$)					
Kwadrat	$12a$	$20a + 4$	$8a + 4$	0	$8a - 2$
Pięciokąt	$15a$	$25a + 5$	$10a + 5$	0	$10a - 4$
Sześciokąt	$18a$	$30a + 6$	$12a + 6$	0	$12a - 6$
Podparta kładka złożona z a modułów ($a > 1$)*					
Kwadrat	$12a$	$20a + 4$	$8a + 4$	0	$8a + 16$
Pięciokąt	$15a$	$25a + 5$	$10a + 5$	0	$10a + 20$
Sześciokąt	$18a$	$30a + 6$	$12a + 6$	0	$12a + 24$
Podparta kładka złożona z 4 modułów*					
Kwadrat	48	84	36	0	48
Pięciokąt	60	105	45	0	60
Sześciokąt	72	126	54	0	72

* w ostatniej kolumnie podano stopień statycznej niewyznaczalności

7.2.3 Podstawowa analiza numeryczna

W celu poznania sposobu pracy konstrukcji w odpowiedzi na obciążenia statyczne, a także jej charakterystyki dynamicznej, wykonano model numeryczny w programie Sofistik. Obliczenia wykonano w sposób analogiczny do opisanego w rozdziałach 6.2 i 6.3. W obliczeniach uwzględniono brak sztywności cięgien na ściskanie. Projekty kładki tego typu różnią się między sobą w poszczególnych opracowaniach pod względem wielkości elementów, przekrojów i parametrów materiałów. Wielkości te dobrano na podstawie publikacji [Rhode-Barbarigos: 2009] i [Korkmaz: 2011]:

- zastrzały $E = 210 \text{ GPa}$ $D = 114 \text{ mm}$ $t = 4 \text{ mm}$ $S = -10,8 \text{ kN}$
- cięgna figur płaskich $E = 120 \text{ GPa}$ $D = 8 \text{ mm}$ $S = 6,9 \text{ kN}$
- pozostałe cięgna $E = 120 \text{ GPa}$ $D = 15 \text{ mm}$ $S = 15,1 \text{ kN}$

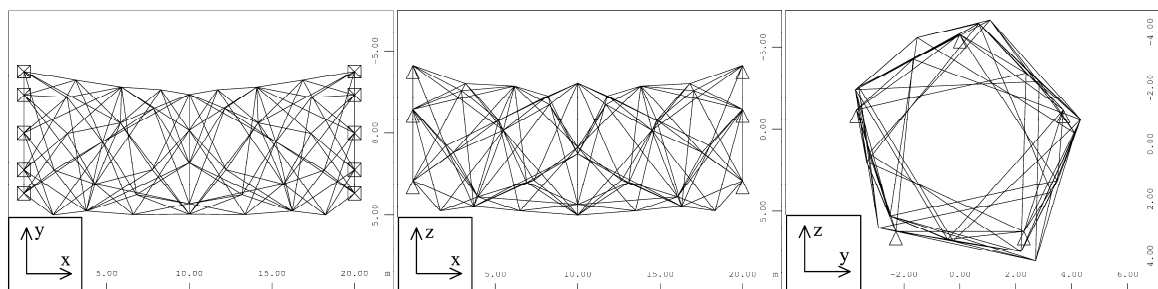
Projekt zakłada wykonanie konstrukcji z czterech modułów o długości 5 m. Szerokość pomostu wynosi 2,0 m. Pięciokątna podstawa ma boki o długości 458 cm. Z tych wielkości wynikają długości: pozostałych cięgien – 347 cm oraz zastrzałów – 678 cm. Wstępne sprężenie w obliczeniach wprowadzono w postaci sił. Nie są to siły w pełni zgodne ze stanem samonapężenia, lecz redystrybucja sił podobnie jak przemieszczenia od sprężenia są niewielkie. Wynika to z istnienia bardzo licznych stanów samonapężenia i odpowiednio przyjętej proporcji sił.

Model konstrukcji obciążono zgodnie z zapisami normy [PN-85/S-10030]. W obliczeniach uwzględniono ciężar własny konstrukcji, ciężar pomostu (1 kN/m^2), obciążenie tłumem i parcie wiatru. Ekstremalne siły obliczeniowe w elementach wyniosły: w zastrzałach podłużnych $-34,2 \text{ kN}$ i $32,2 \text{ kN}$, w zastrzałach poprzecznych $-52,1 \text{ kN}$ i $21,1 \text{ kN}$, wciągach figur płaskich $24,1 \text{ kN}$, wciągach zewnętrznych $72,7 \text{ kN}$. Wartości są mniejsze od nośności elementów. W obu typach ciągów wystąpiły pojedyncze niepracujące elementy ze względu na ich ściskanie zarówno w kombinacji charakterystycznej, jak i obliczeniowej. Przemieszczenie od obciążeń ruchomych wyniosło $11,3 \text{ mm}$. Przemieszczenie spełnia wymagania normowe.

Na podstawie sił wewnętrznych oraz przemieszczeń powstałych na skutek działania obciążenia zewnętrznego można stwierdzić, że pod wpływem obciążeń pionowych konstrukcja nie tylko ugina się, ale również skręca, co wynika z braku symetrii konstrukcji względem osi pomostu. Jest to efekt niekorzystny ze względu na użytkowanie, chociaż jego wielkość nie powinna wpływać na niekorzystny odbiór przemieszczeń przez użytkowników (różnica przemieszczeń od obciążeń pionowych jest rzędu 3 mm między dolnymi węzłami pięciokąta w środku przęsła). Układ sił wewnętrznych, jak i sama struktura wskazują na większą rolę ciągów zewnętrznych niż ciągów figur płaskich w sztywności giętnej całego obiektu. Zastrzały pracują zarówno na ściskanie, jak i rozciąganie. Sprawdzone również wpływ sił samonapężenia na sztywność i ugięcie ustroju. Zgodnie z wnioskami z wcześniejszych analiz, ze względu na brak mechanizmów nieskończonych, wstępne sprężenie konstrukcji nie ma bezpośredniego wpływu na znaczne zmniejszenie przemieszczeń. O ile jednak w poprzednich przykładach jednym z kryteriów użytkowych było zagwarantowanie dodatniej siły we wszystkichciągach, o tyle tutaj ze względu na stosunkowo niski poziom samonapężenia dopuszczono występowanie ciągów ściskanych już w kombinacji charakterystycznej. W związku z tym można stwierdzić, że sprężenie struktury wpływa globalnie na sztywność konstrukcji, ponieważ jego mały poziom może skutkować wyłączeniem z pracy ciągów ściskanych i brakiem ich udziału w globalnej sztywności całego ustroju. Przy sprężeniu powyżej wartości gwarantującej ściskanie wszystkich ciągów wpływ ten jest pomijalny. A zatem w konstrukcjach bez mechanizmów nieskończonych wprowadzanie sił sprężenia powyżej tego poziomu jest nieuzasadnione pod kątem zużycia materiału, ponieważ nie zmniejsza ugięć, ale może wpłynąć na wzrost sił wewnętrznych w elementach i konieczność zwiększenia przekrojów ze względów wytrzymałościowych.

W analizie dynamicznej obliczono częstotliwości i postaci drgań własnych metodą opisaną w rozdziale 6.3.3. Trzy pierwsze częstotliwości drgań własnych wyniosły: $7,04 \text{ Hz}$, $7,38 \text{ Hz}$ i $12,07 \text{ Hz}$. Pierwsze dwie postaci mają charakter zbliżony do symetrycznego zgina-

nia w kierunku ukośnym, trzecia ma charakter skrętny (symetryczny). Na rysunku 7.9 przedstawiono wizualizację tychże postaci drgań własnych. Pierwsze dwie częstotliwości drgań mają zbliżone wartości, jednak są one na tyle wysokie, że ryzyko powstania znaczących drgań wywołujących dyskomfort użytkownika jest niewielkie. Sprawdzono, że częstotliwości drgań nie są wrażliwe na zmianę poziomu samonapężenia, co jest spowodowane brakiem mechanizmów inftytezymalnych.



Rys. 7.9 Kładka z modułów pierścieniowych: pierwsze 3 postaci drgań własnych

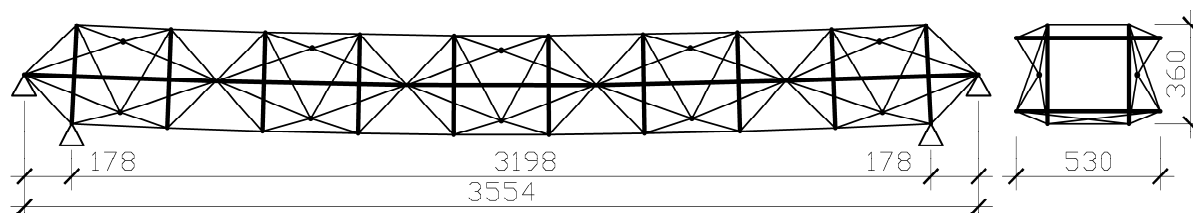
Obliczenia potwierdziły wnioski autorów przytoczonych na początku rozdziału opracowań, dotyczące możliwości zaprojektowania i wybudowania tego typu kładki o cechach tensegrity. Jednakże stopień skomplikowania struktury – liczba elementów i złożonych węzłów – sprawiają, że o wyborze takiego rozwiązania nie będzie decydował rachunek ekonomiczny. Można również zwrócić uwagę na dość niewielkie rozmiary przestrzeni wewnątrz pierścieniowych modułów w stosunku do wymiarów całego przekroju poprzecznego, jak również na nietypowy sposób podparcia, wymagający wykonania dodatkowych konstrukcji. Argumentami za podjęciem decyzji o budowie takiej kładki mogą być walory nietypowej formy architektonicznej oraz jej zalety przy zastosowaniach sterowanych i rozwijanych.

7.3 Kładka Tor Vergata

7.3.1 Opis konstrukcji

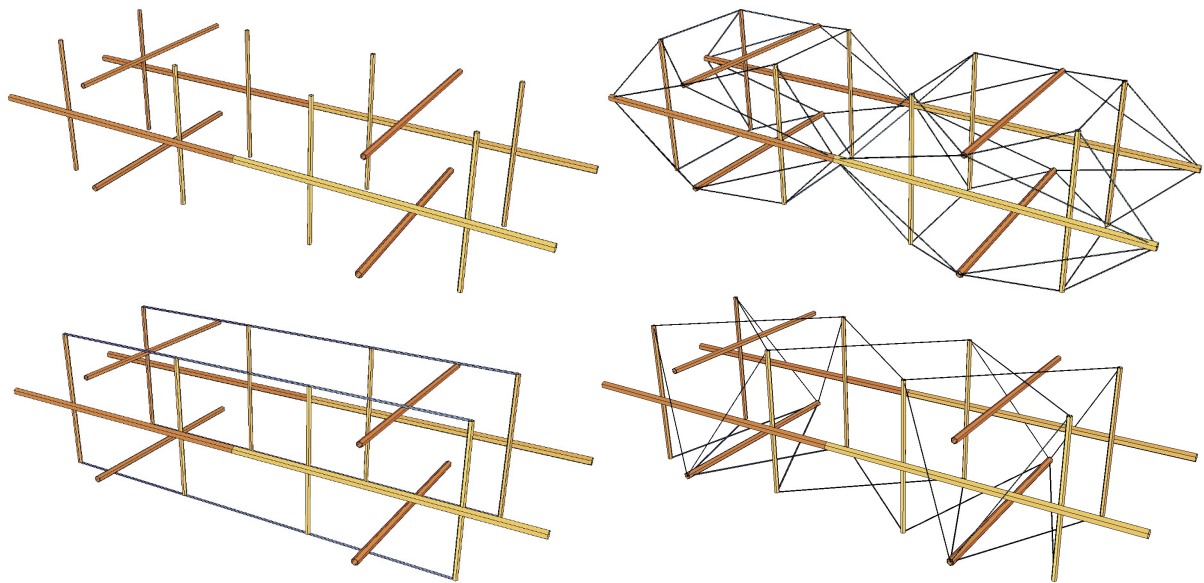
Kładka (rys. 7.10), której projektu nie zrealizowano, została zaprojektowana jako przejście nad czteropasmową ulicą w pobliżu Wydziału Inżynierii Lądowej Uniwersytetu Rzymskiego Tor Vergata [Ponzi: 2002] [Micheletti: 2012]. Jest to obiekt złożony z pięciu modułów wielokrotnie rozszerzonego ośmiościanu tensegrity (por. rys. 4.3). Dzięki rozszerzeniu uzyskano przestrzeń wewnątrz modułu, co umożliwiło pośrednie przeprowadzenie ruchu. Moduły zostały połączone w sposób zbliżony do połączenia II typu, przedstawionego w rozdziale 5.2.2, ale dodatkowo zastosowano szereg stężeń. Ustrój podparto nieprzesuwnie na dwóch pozio-

mach, w czterech skrajnych węzłach na obu przyczółkach. Rozpiętość teoretyczna pomostu (pomiędzy wewnętrznymi podpartymi węzłami) wynosi 31,98 m, a długość pojedynczego modułu 7,11 m. Niweleta o maksymalnym spadku podłużnym wynoszącym 5% ma kształt pionowego łuku wklęsłego. Pomost oparto na pionowych zastrzałach. Całkowita wysokość przekroju poprzecznego (pionowe zastrzały) wynosi 3,60 m, a szerokość 5,30 m. Dzięki prostopadłości wszystkich zastrzałów struktura ma regularny charakter.



Rys. 7.10 Schemat statyczny i charakterystyczny przekrój poprzeczny kładki Tor Vergata

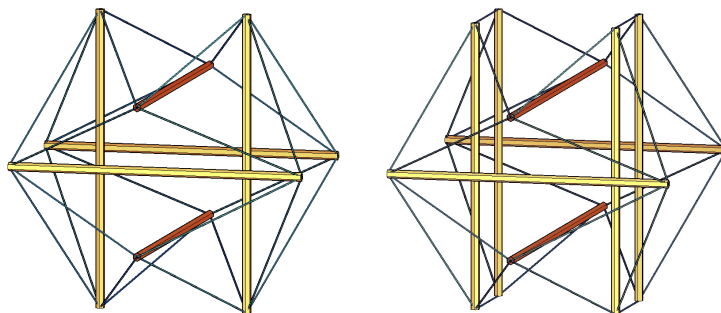
W projekcie założono, że w pierwszej kolejności zostaną sprefabrykowane i sprężone moduły. Miałyby być przewiezione w formie zwiniętej, a na placu budowy zostałyby złożone i sprężone. Następnie moduły zostałyby połączone i wzmocnione poprzez dodatkowe ciągnia i zamontowane na miejscu docelowym za pomocą dźwigu. Poszczególne rodzaje elementów zostały przedstawione na rysunku 7.11, na przykładzie dwumodułowym. Ustrój składa się z zastrzałów i ciągnien modułów składowych, ciągnien podłużnych łączących podłużnie pionowe zastrzały, ciągnien stężających w układzie w kształcie litery X, łączących krzyżowo węzły zastrzałów pionowych i dolnych poziomych poprzecznych oraz z dodatkowych ciągnien w układzie w kształcie litery V, łączące górne węzły zastrzałów pionowych z dolnymi poziomymi, poprzecznymi zastrzałami. Dodatkowe elementy łączą z sobą moduły, a także usztywniają konstrukcję we wszystkich kierunkach.



Rys. 7.11 Kładka Tor Vergata: elementy składowe: zastrzały, cięgna modułów, cięgna podłużne, cięgna „X” i „V”

7.3.2 Sposób realizacji zasad tensegrity

Wielokrotne rozsuniecie rozszerzonego ośmiościanu (rys. 7.12) nie zmienia rozwiązania zadania poszukiwania formy tensegrity (3.15). Wynika to z symetrii modułu. W dublowanych węzłach siły samonapężenia są w równowadze. Po rozsunieciu wektor będący sumą sił w węźle ma kierunek zgodny z osią dodawanego cięgna, zatem siły samonapężenia w dalszym ciągu równoważą się. Zastosowany w projekcie kładki moduł ma jeden stan samonapężenia, ale dodanie 6 elementów i 4 węzłów zwiększa liczbę mechanizmów infinitymalnych do siedmiu. Moduł jest czystym tensegrity. Pierwszy parametr rozwiązania problemu poszukiwania formy tensegrity (3.15) został dobrany tak, aby pionowe zastrzały znajdowały się w równej odległości – $\alpha = 0,5$. Dzięki temu konstrukcja ma regularną formę. Wartość drugiego współczynnika wynika z minimalizacji wysokości całej konstrukcji przy zachowaniu odpowiedniej wysokości prześwitu wewnątrz struktury – $\beta = 0,74$. Trzeci parametr wynika z równania formy tensegrity – $\gamma = 0,26$.

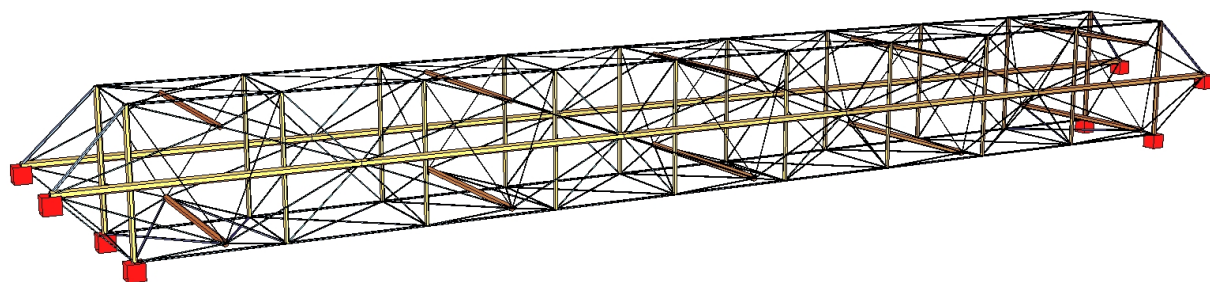


Rys. 7.12 Kładka Tor Vergata: moduł wyjściowy i wielokrotnie rozsunięty

Mimo że moduł ma wszystkie cechy czystego tensegrity, to już samo zastosowanie stężeń w obrębie modułów likwiduje mechanizmy infinitezymalne. Tej właściwości nie ma także cała konstrukcja złożona z połączonych modułów. Natomiast wszystkie moduły zachowują stany samonapężenia. Ustrój można zatem sklasyfikować jako konstrukcję o cechach tensegrity (K+ S+ M- N+ W+ C+).

7.3.3 Podstawowa analiza numeryczna

Sposób pracy konstrukcji prześledzono na podstawie wykonanego modelu numerycznego kładki (rys. 7.13). Obiekt zamodelowano zgodnie z danymi zawartymi w pracy [Ponzi: 2002], skąd zaczerpnięto przedstawione poniżej wartości. Dla uproszczenia przyjęto prostą niweletę o zerowym spadku. Zastosowano trzy rodzaje elementów: zastrzały rurowe i cięgna prętowe ze stali Fe510 (odpowiednik S355) oraz cięgna linowe systemu Macalloy-Tensoteci. Przyjęto moduły sprężystości o wartościach (odpowiednio): 210 GPa i 165 GPa. Zastosowano zróżnicowane rodzaje przekrojów poprzecznych. Parametry geometryczne zestawiono w tabeli 7.2. Skrajne, podparte moduły są bardziej wyężone niż pozostałe, podobnie jak w przykładzie przedstawionym w rozdziale 6.2.2. W związku z tym zastosowano większe przekroje skrajnych pionowych zastrzałów i niektórych stężeń, a także elementów łączących z punktem podparcia podłużne cięgna łączące pionowe zastrzały. Konstrukcję obciążono w węzłach dolnych pionowych zastrzałów. Sposób obliczeń oraz wartości obciążeń przyjęto analogicznie do kładki z modułów pierścieniowych.



Rys. 7.13 Kładka Tor Vergata: wizualizacja modelu obliczeniowego

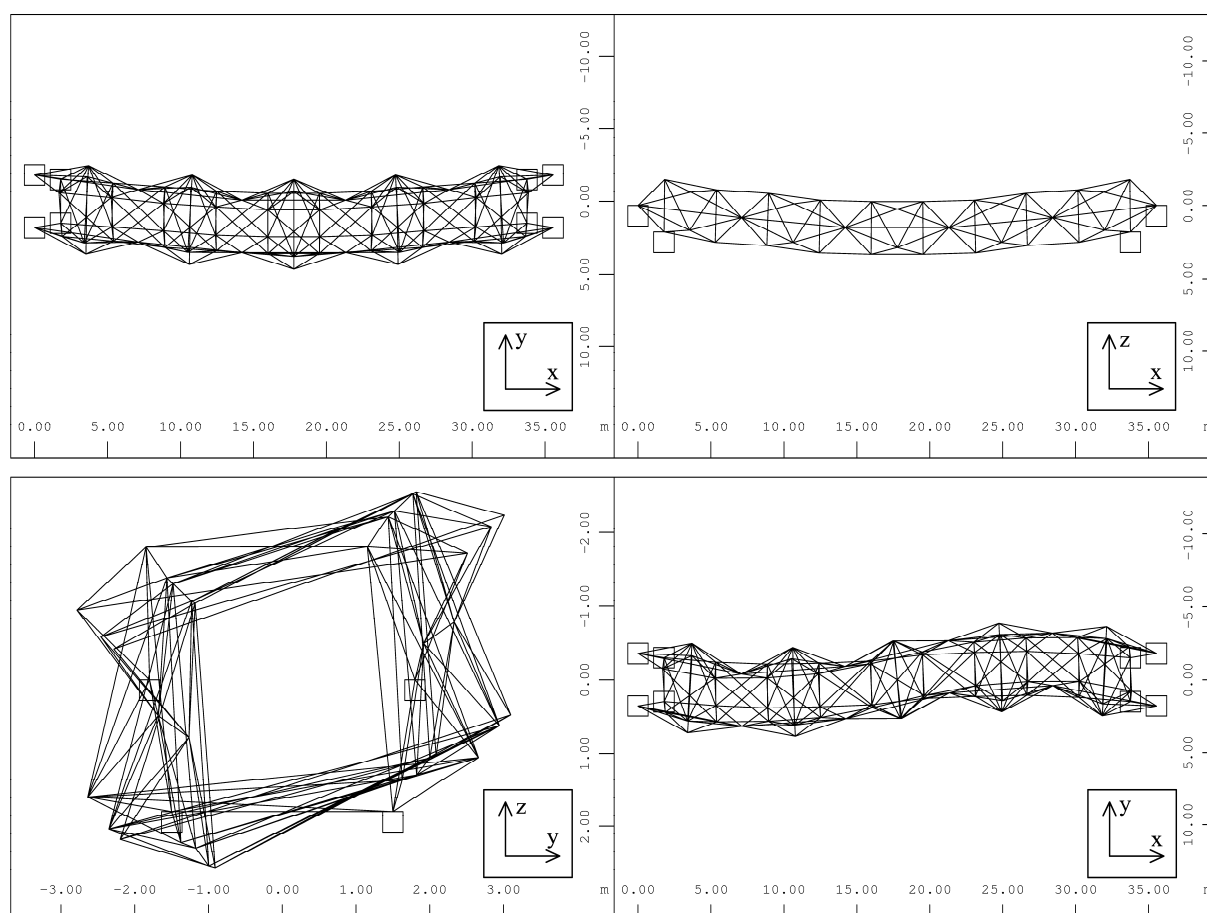
Tab. 7.2 Parametry elementów konstrukcyjnych kładki Tor Vergata oraz ekstremalne wyniki w najbardziej wyężonych elementach

Rodzaj elementu	Średnica [mm]	Grubość ścianki [mm]	Pole przekroju [mm ²]	Wstępne sprężenie [kN]	Ekstremalna normalna siła obliczeniowa [kN]
Zastrzały poziome podłużne	193,7	12,5	7116	-650	-663
Zastrzały poziome poprzeczne górne	139,7	12,5	4995	-310	-309
Zastrzały poziome poprzeczne dolne	168,3	8,0	4029	-310	-744
Zastrzały pionowe skrajne	139,7	12,5	4995	-243	-991
Zastrzały pionowe wewnętrzne	114,3	8,0	2672	-243	-309
Cięgna linowe modułów	24,0	-	353	147 ÷ 273	537
Skrajne cięgna prętowe modułów	72,0	-	4072	273	1046
Cięgna prętowe podłużne	50,0	-	1962	65	498
Cięgna linowe "V"	12,0	-	88	130	192
Skrajne, dolne cięgna prętowe "X"	33,0	-	855	65	153
Pozostałe dolne cięgna prętowe "X"	22,0	-	380	65	113
Cięgna linowe górne "X"	12,0	-	88	65	185

Wyniki obliczeń w postaci sił wewnętrznych zestawiono w tabeli 7.2. Przemieszczenie od obciążeń zmiennych wyniosło 56 mm i nie przekracza dopuszczalnych wartości. Konstrukcja i połączenia są usztywnione wieloma dodatkowymi cięgnami. W związku z tym uzyskaną na podstawie wyników postać ugięcia ustroju można porównać do konstrukcji belkowej, pomimo jej wielomodułowej struktury. Otrzymane z obliczeń siły wewnętrzne w niektórych prętach przekraczają nośność elementów. Niewielkie przekroczenia występują w niektórych zastrzałach pionowych i poziomych poprzecznych, a także w pojedynczych cięgnach prętowych. Znaczne przekroczenia dopuszczalnych wartości odnotowano w cięgnach linowych „V”. Różnice w stosunku do przywołanych opracowań wynikają przede wszystkim z różnicy w obciążeniach, a także z przyjętej metody obliczeniowej. Ponadto w [Ponzi: 2002] nie uwzględniono w obliczeniach braku sztywności elementów rozciąganych na ściskanie, a za

nośność cięgien linowych przyjęto siłę zrywającą związaną z wytrzymałością na rozciąganie, a nie naprężenia odpowiadające umownej granicy plastyczności. Zarówno w obliczeniach w materiałach źródłowych, jak i w tych wykonanych przez autora niektóre cięgna są ściskane. Dotyczy to przede wszystkim cięgien podłużnych (10 szt.) oraz niektórych cięgien modułów (8 szt.) i dolnych cięgien „X”. To wszystko sugeruje konieczność zwiększenia wybranych przekrojów poprzecznych elementów, a także dostosowanie poziomego samonapężenia.

Analiza modalna pozwala uzyskać następujące pierwsze częstotliwości i postaci drgań własnych: 3,71 Hz (pozioma giętna – symetryczna), 3,86 Hz (pionowa giętna – symetryczna), 4,67 Hz (skrętna – symetryczna), 6,76 Hz (pozioma giętna – antysymetryczna) (rys. 7.14).



Rys. 7.14 Kładka Tor Vergata: pierwsze 4 postaci drgań własnych

Wyniki wskazują na możliwość zaprojektowania kładki tego typu zarówno pod względem statycznym, jak i dynamicznym. Konstrukcja złożona jest z „czystych tensegrity”. Wzmocnienia powodują likwidację mechanizmów infinitezimalnych, jednak struktura zachowuje swój charakter. Inaczej niż w kładce z modułów pierścieniowych pozostają w niej liczne zastrzały połączone jedynie z elementami cięgowymi. Są one jednak sztywno utrzymywane w swojej pozycji dzięki

wstępnemu sprężeniu modułów stanami samonapężenia. Prostopadłość zastrzałów powoduje, że ustrój sprawia wrażenie uporządkowanego, a także umożliwia pośrednie przeprowadzenie ruchu przy niewielkiej wysokości przekroju poprzecznego.

Jest to ciekawy przykład wykorzystania zasad tensegrity w mostownictwie. Autorzy projektu w swoich publikacjach przedstawili logiczną ścieżkę, jaką podążali, aby uzyskać ostateczny kształt struktury. Pozwala to na prześledzenie procesu projektowania wielomodułowej konstrukcji o cechach tensegrity, począwszy od wyboru odpowiedniego modułu, dobrania jego rozmiaru i kształtów, poprzez wybór sposobu łączenia i usztywnienia modułów, a skończywszy na zaprojektowaniu funkcjonalnego obiektu budowlanego i sposobu jego wznoszenia.

7.4 Kładka Kurilpa

7.4.1 Opis konstrukcji

Najważniejszym przykładem konstrukcji mostowej opartej na koncepcji tensegrity jest Kładka Kurilpa (rys. 7.15) znajdująca się w Brisbane w Australii. Jest to największy obiekt tego typu na świecie. Konstrukcja została wybrana na podstawie konkursu rozstrzygniętego w 2006 roku i oddana do ruchu w 2009 roku. Most zaprojektowały biura Arup (konstrukcja) i Cox Rayner (architektura).



Rys. 7.15 Kładka Kurilpa, Brisbane, Australia [źródło: Flickr, autor: Andrew Sutherland, licencja: CC BY-SA 2.0]

Kładka zgodnie z kryteriami konkursowymi wpisuje się w grupę obiektów charakterystycznych, mających nie tylko spełniać swoją funkcję komunikacyjną, ale również stanowiących budowlę ciekawą architektonicznie, wpływającą na kształtowanie otoczenia. W takich sytuacjach możliwe są śmiałe, nowatorskie realizacje, których koszt wynikający z zastosowania nietypowych rozwiązań może być podwyższony. Ze względu na położenie omawiana kładka stanowi ważny element w lokalnym układzie komunikacyjnym miasta. Obiekt łączy dwa brzegi rzeki Brisbane. Po jednej stronie znajduje się Central Business District – dzielnica biznesowa, w której zlokalizowane jest wiele nowoczesnych wieżowców (ściśle centrum miasta). Po drugiej stronie znajduje się dzielnica kulturalna z Gallery of Modern Art (GoMA) (rys. 7.16) – największym i najważniejszym muzeum sztuki współczesnej w Australii, położonym w bezpośrednim sąsiedztwie mostu. Tego typu otoczenie wymagało zastosowania ciekawego i nowoczesnego rozwiązania, jednocześnie nieprzytłaczającego budynku galerii. Muzea sztuki współczesnej w wielu dużych miastach całego świata stanowią bardzo ważne miejsca zarówno dla turystów, jak i mieszkańców. Samo GoMA co roku odwiedza ok. 1,5 mln zwiedzających. Często galerie znajdują się w najbardziej znanych budynkach współczesnej architektury. Stąd obiekty do nich prowadzące powinny być nowoczesne i same mogą stanowić tak zwane „landmarki”, jak na przykład londyńska Kładka Milenijna znajdująca się na osi łączącej Katedrę św. Pawła z muzeum Tate Modern. To wszystko zadecydowało o zastosowaniu bardzo oryginalnej konstrukcji o cechach tensegrity, cechującej się lekkością i rzeźbiarskim charakterem.



Rys. 7.16 Otoczenie Kładki Kurilpa: Queensland Gallery of Modern Art [źródło: Flickr, autor: Wojtek Gurak, licencja: CC BY-NC 2.0]

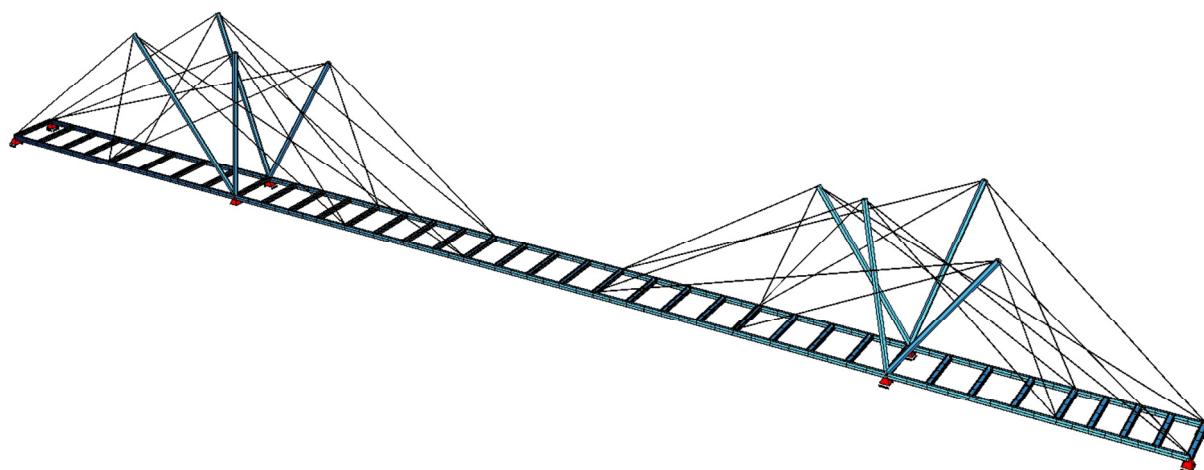
Autorzy zwycięskiej koncepcji jako powód wyboru takiego rozwiązania podają również inne argumenty [Ainsworth: 2011a, 2011b]. Rozpatrywali oni kilka typów konstrukcji. Były

to mosty: podwieszony, wiszący, łukowy i kratownicowy (w kształcie tuby z jazdą pośrednią). W przypadku konstrukcji podwieszonych i wiszących wysokość pylonu mogła być zbyt duża i dominować nad budynkiem galerii. Dodatkowo skomplikowane warunki gruntowe sprawiłyby trudności z przejściem pionowej reakcji obiektu w podporach. W przypadku mostu łukowego kluczowy był brak możliwości spójnego skonstruowania zadaszania rzucającego cień na pomost (jeden z warunków konkursu). Takie zadaszanie można byłoby z łatwością zamontować w kratownicy w kształcie tuby. Jednakże w tym wypadku problemem byłoby wykonanie obiektu ze względu na ruchliwy szlak wodny stanowiący przeszkodę. Zrealizowany ustrój minimalizował problemy wynikające z wymienionych powyżej trudności.

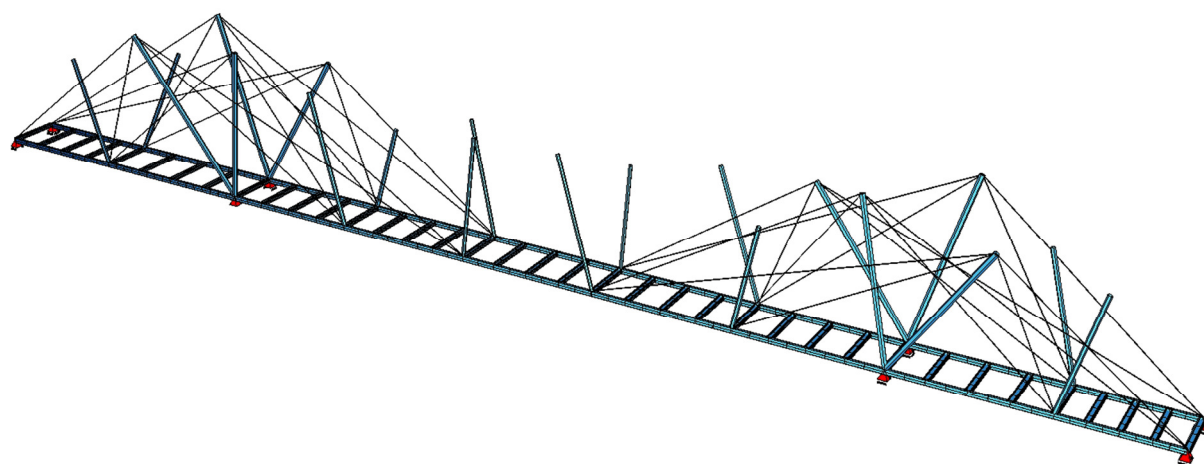
Kładka Kurilpa jest obiektem pieszo-rowerowym. Konstrukcja główna jest trzyprzęsłowa o rozpiętościach teoretycznych $57 + 128 + 45$ m. Cała konstrukcja wraz z rampami ma długość 430 m. Szerokość pomostu mierzona w świetle balustrad wynosi 6,5 m. Główną przeszkodę stanowi rzeka Brisbane, która w miejscu przeprawy ma około 250 m. Skrajnia żeglugi ma szerokość 100 m i wysokość 11,4 m. Dodatkowo przęsła przekraczają drogę szybkiego ruchu położoną na estakadzie, ulicę miejską oraz ścieżkę rowerową. Most oparty jest na żelbetowych podporach posadowionych pośrednio na palach. Ustrój przęsł jest stalowy, a pomost zespolony stalowo-żelbetowy. Zastosowano ciężna ze stalowych lin spiralnych galwanizowanych (powieszenie główne) i nierdzewnych (ciężna drugorzędne).

Konstrukcja ma strukturę sprawiającą wrażenie chaotycznej. Jednakże składa się ona z szeregu elementów pełniących ściśle określone funkcje. Na pierwszy rzut oka bezładną strukturę można rozłożyć na części składowe (rys. 7.17). Poniższy podział elementów wynika z ich funkcji i nie ma bezpośredniego związku ze sposobem budowy opisanym w dalszej części rozdziału. Na podporach znajduje się pomost złożony ze stalowych belek o przekroju zamkniętym, połączonych dwuteowymi poprzecznikami oraz stężeniami. Na nich umieszczono prefabrykowane żelbetowe płyty o grubości od 200 do 250 mm, długości 4,9 m i szerokości 3,4 m. Na miejscu wbudowania płyty połączono między sobą oraz z poprzecznikami za pomocą betonu i stalowych łączników trzpieniowych z łbami. Na podporach pośrednich znajdują się po cztery główne stalowe słupki o przekroju rurowym. Do głównych słupków zamocowano ciężna główne podwieszające pomost. W miejscach połączenia ciężien z pomostem znajdują się niższe, drugorzędne słupki, do których podwieszono pośrednie punkty pomostu (ciężna drugorzędne). Jest to podstawowy układ elementów usztywniających konstrukcję w kierunku pionowym. Znajdujące się po obu stronach pomostu struktury nie leżą w jednakowych płaszczyznach. Żaden ze słupków nie jest prostopadły do pomostu ani w kierunku podłużnym, ani w poprzecznym. Górne punkty słupków zostały w różnym stopniu odchylone,

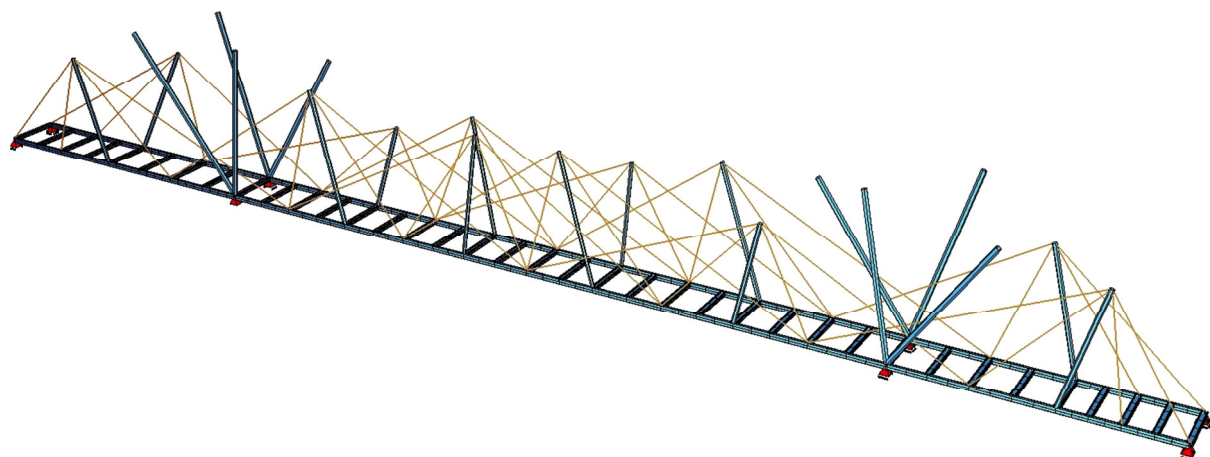
dzięki czemu uniknięto kolizji cięgien z sobą i z innymi słupkami. Nie było zatem konieczności stosowania specjalnych elementów umożliwiających przejście przez siebie poszczególnych prętów. Dodatkowo taki zabieg spotęgował zamierzone wrażenie nieuporządkowanej struktury. Nad pomostem znalazły się poziome poprzeczne zastrzały. Są one utrzymywane na swojej pozycji poprzez cięgna trzeciorzędne łączące je ze górnymi i dolnymi węzłami słupków. Dodatkowo między większością zastrzałów za pomocą kolejnych cięgien zawieszono ostrosłupy mające na celu podtrzymywanie zadaszenia.



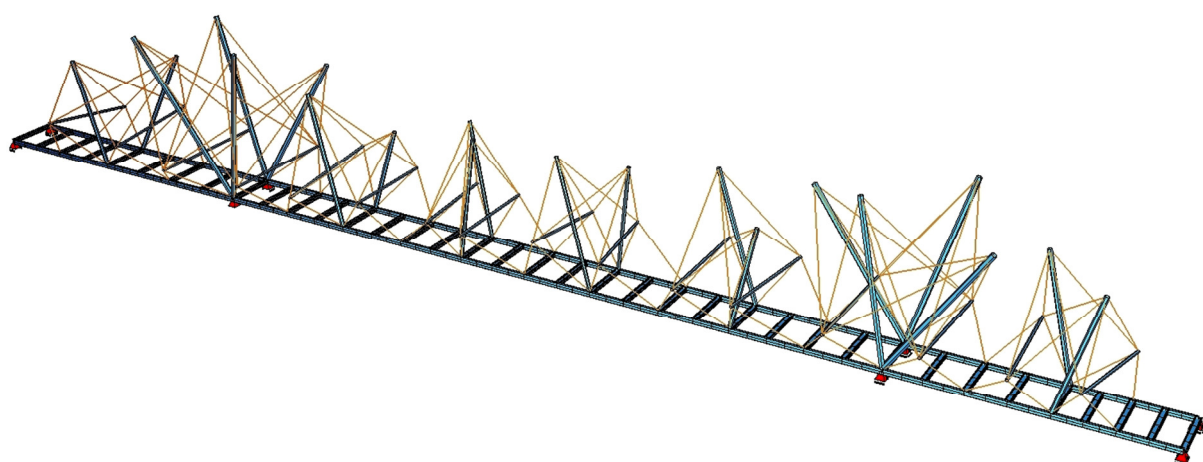
Rys. 7.17a Kładka Kurilpa – części składowe: stalowe elementy pomostu (belki i poprzecznice), słupki główne i długie cięgna podwieszenia głównego



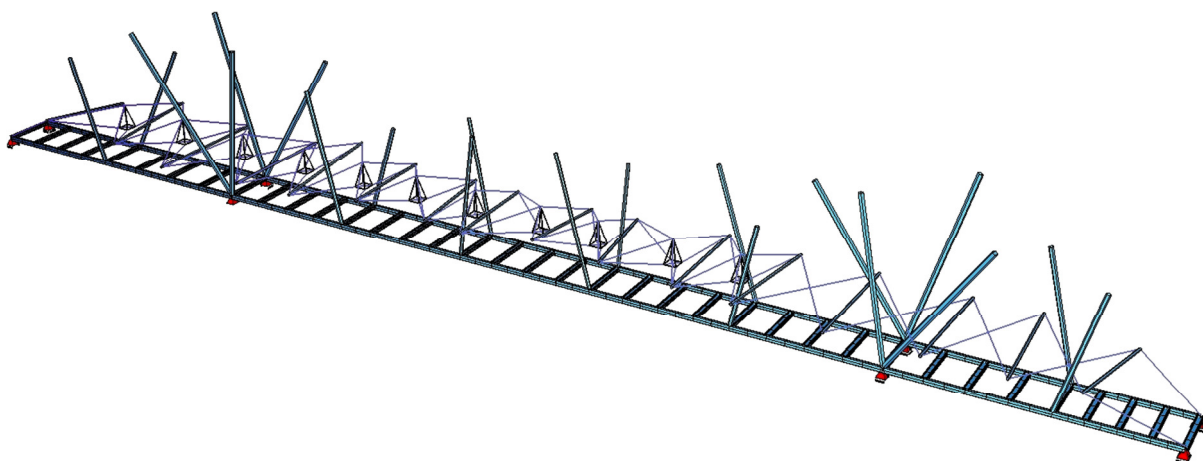
Rys. 7.17b Kładka Kurilpa – części składowe: słupki drugorzędne umieszczone w miejscach połączenia podwieszenia z pomostem



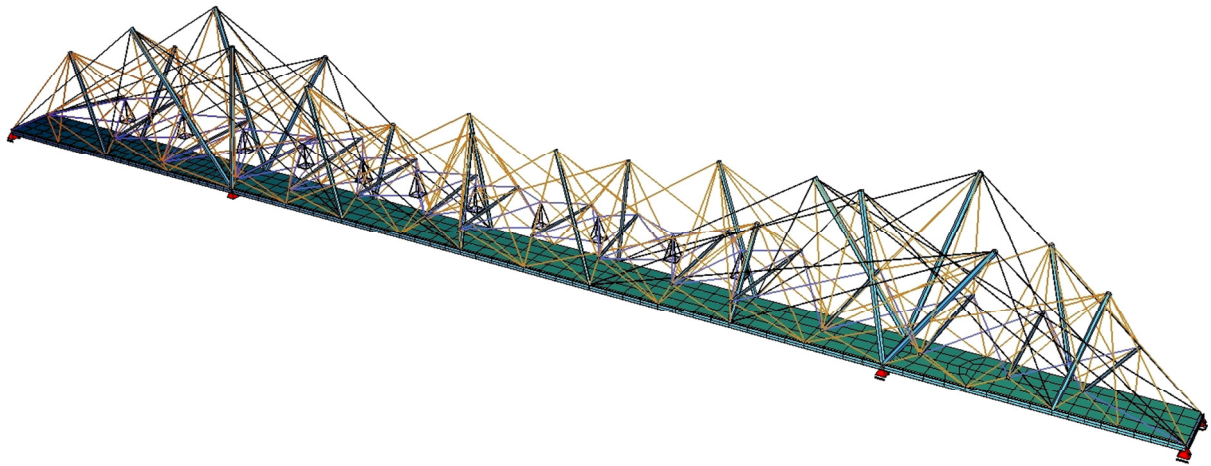
Rys. 7.17c Kładka Kurilpa – części składowe: cięgna podwieszenia drugorzędno



Rys. 7.17d Kładka Kurilpa – części składowe: zastrzały i cięgna (trzeciorzędne) je podwieszające



Rys. 7.17e Kładka Kurilpa – części składowe: cięgna (trzeciorzędne) łączące zastrzały i ostrosłupy podtrzymujące zadaszanie



Rys. 7.17f Kładka Kurilpa – cała struktura

Cechy konstrukcja umożliwiły montaż metodą wspornikową. Najpierw wykonano podpory pośrednie, na których zamontowano główne słupki (rys. 7.18). Były one podtrzymywane na swoich pozycjach za pomocą tymczasowych prętów. Następnie montowano kolejne segmenty konstrukcji stalowej pomostu. W celu właściwego zbalansowania ustroju odbywało się to jednocześnie w obu kierunkach. Kolejne fragmenty były podwieszane do słupków głównych. W miarę postępów prac montowano słupki drugorzędne, również tymczasowo stabilizowane przez dodatkowe pręty oraz kolejne elementy podwieszenia (rys. 7.19). Na stalowej konstrukcji ułożono płyty betonowe stanowiące pomost. Montażu zastrzałów poziomych wraz z ciągnami i konstrukcją wsporczą zadaszania dokonano po połączeniu się obu części mostu (rys. 7.20). Umożliwiło to demontaż tymczasowych konstrukcji wspierających słupki. Końcowym etapem było zamontowanie wyposażenia. Poza typowym wyposażeniem kładek dla pieszych zamontowano zadaszanie dające cień na części pomostu oraz instalację świetlną LED umożliwiającą wielobarwną, sterowaną komputerową iluminację, a także panele fotowoltaiczne do jej zasilania.



Rys. 7.18 Kładka Kurilpa: montaż głównych słupków [źródło: Flickr, autor: Margaret Donald, licencja: CC BY-NC-ND 2.0]



Rys. 7.19 Kładka Kurilpa: montaż słupków drugorzędnych [źródło: Flickr, autor: Margaret Donald, licencja: CC BY-NC-ND 2.0]



Rys. 7.20 Kładka Kurilpa: montaż zastrzałów poziomych i konstrukcji podtrzymującej zadaszenie [źródło: Flickr, autor: Margaret Donald, licencja: CC BY-NC-ND 2.0]

7.4.2 Sposób realizacji zasad tensegrity

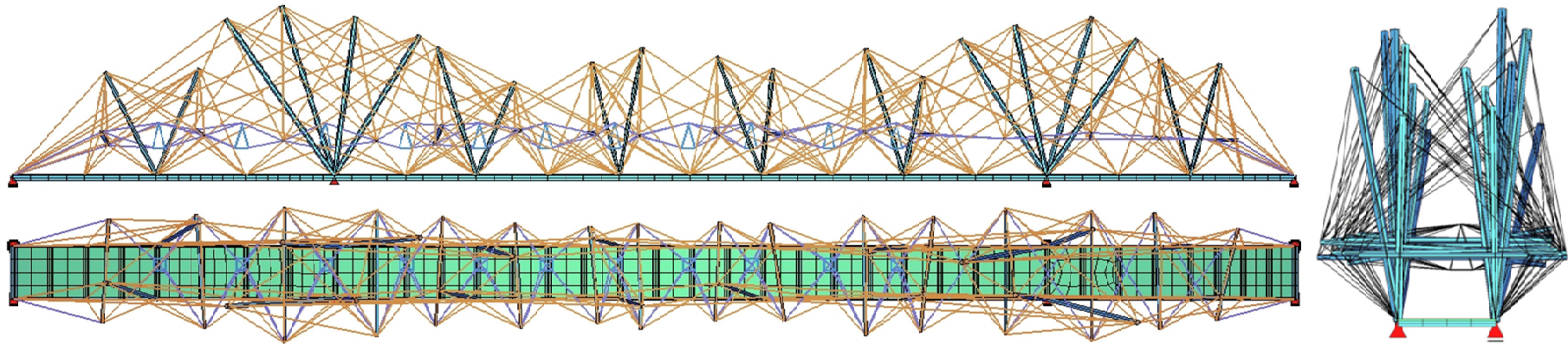
Kładka Kurilpa uznawana jest za pierwszą na świecie realizację mostową tensegrity w tak dużej skali. Jednakże konstrukcja posiada jedynie część cech tensegrity. Elementy główne, decydujące o nośności ustroju (w kierunku pionowym), są rozwiązane w sposób zaczerpnięty z mostów podwieszonych. Nie posiadają zatem stanu samonapężenia. Układ sił wewnętrznych w elementach głównego podwieszenia zależy od kierunku działania obciążeń zewnętrznych. Siły w cięgnach dobrane są tak, aby konstrukcja miała żądaną niweletę, o czym świadczy chociażby metoda wznoszenia konstrukcji. Słupki główne w połączeniu z żelbetową częścią podpory pośredniej stanowią rozdzielony pylon. Do niego w układzie radialnym podwieszony jest pomost. Słupki drugorzędne i połączone z nimi cięgna decydują o zmniejszeniu ugięcia pomostu w punktach pośrednich – między zakotwieniami podwieszenia głównego. Inaczej jest w konstrukcjach opartych na odwróconej kratownicy Finka. Tam podwieszenie związane z kolejnymi słupkami nie ma tak lokalnego charakteru i przenosi siły pochodzące z coraz dalszych fragmentów pomostu aż do podpory. Mimo to w wielu aspektach konstrukcję Kładki Kurilpa można porównać do obiektów quasi-tensegrity, opisanych w rozdziale 7.1. W obu typach konstrukcji sztywny, belkowy pomost połączony jest z elementami ściskanymi. W omawianym obiekcie połączenie słupków z belkami pomostu jest jednak bardziej podatne

niż w przykładach takich jak kładka Forthside. W węzłach zastosowano krzyżujące się blachy o dużo mniejszych momentach bezwładności niż rurowy przekrój poprzeczny słupków. To sprawia, że ciągnowo-prętowy ustrój jest trójwymiarowy, ponieważ siły poziome działające na słupki przejmowane są przez elementy inne niż węzły i utwierdzenie w pomoście.

O cechach tensegrity w australijskiej kładce decyduje drugorzędna konstrukcja znajdująca się ponad pomostem. Składa się ona z wielu zastrzałów „zawieszonych” jedynie między rozciągany, rozpięranymi przez nie cięgnami. Podobnie cięgna między zastrzałami są rozpięrane przez ostrosłupy, które można rozpatrywać w całości jako bryły ściskane. Lokalnie w takich układach występują stany samonapężenia, z tym że reakcje w zewnętrznych węzłach przekazywane są na sąsiednie fragmenty ustroju. Można to porównać do konstrukcji o cechach tensegrity, w których pojedynczy zastrzał znajduje się między rozciągany cięgnami jak na rysunku 2.8. Mimo lokalnego charakteru elementy te mają wpływ na sztywność całej konstrukcji. Przede wszystkim spełniają kluczową rolę w utrzymaniu słupków w żądanych pozycjach, zapobiegając ich wywróceniu pod wpływem działania sił w cięgnach głównych czy obciążeniu wiatrem. Usztywniają poprzecznie całą konstrukcję, przejmując siły od obciążenia poziomych i przeciwdziałają skręcaniu ustroju na przykład pod wpływem nierównomiernego obciążenia pomostu, spowodowanego zgromadzeniem się pieszych po jednej stronie obiektu. Dodatkowo konstrukcja drugorzędna umożliwia podwieszenie zadaszania. Ze względu na znaczenie lokalnej struktury o cechach tensegrity dla globalnego zachowania całego ustroju kładkę można zakwalifikować do grupy obiektów o cechach tensegrity (K+ S+* M- N+* W+* C+) („*” oznacza lokalny charakter zjawiska – por. rozdz. 2.1.3).

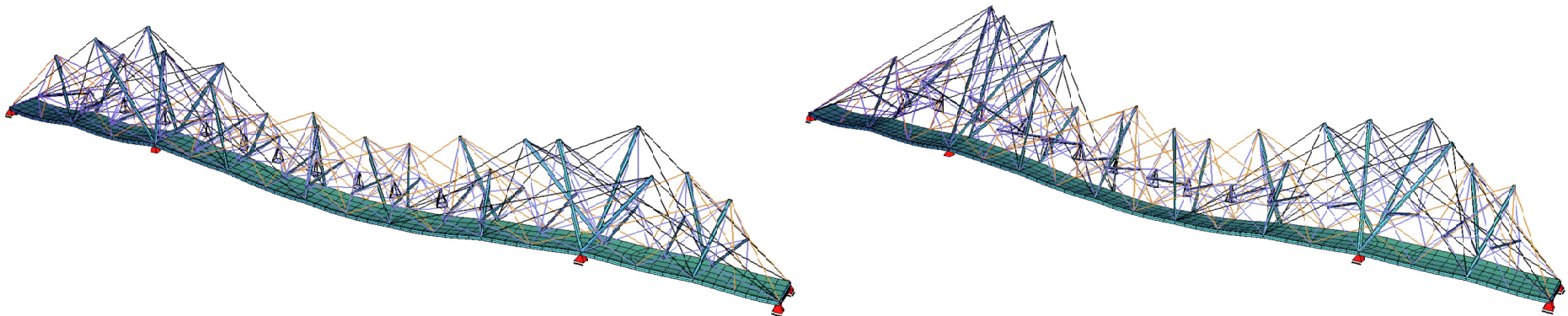
7.4.3 Podstawowa analiza numeryczna

Zbudowano model numeryczny obiektu w programie Sofistik (rys. 7.21). Celem obliczeń było poznanie roli poszczególnych elementów skomplikowanej struktury w przenoszeniu obciążeń i globalnej odpowiedzi konstrukcji na obciążenia statyczne, a także jej podstawowych charakterystyk dynamicznych. Ze względu na brak precyzyjnych danych na temat współrzędnych węzłów i przekrojów poprzecznych elementów analiza miała przede wszystkim charakter jakościowy.



Rys. 7.21 Kładka Kurilpa: wizualizacja modelu obliczeniowego – widok z boku, widok z góry, przekrój poprzeczny

203



Rys. 7.22 Kładka Kurilpa: wizualizacja przemieszczeń węzłów modelu pod wpływem obciążeń bez i z uwzględnieniem wiatru (przemieszczenia zwiększone 50 razy)

Współrzędne węzłów i przekroje poprzeczne określono szacunkowo na podstawie rysunków i opisów zamieszczonych w pracy [Ainsworth: 2011b]. Dobrane przekroje poprzeczne elementów zestawiono w tabeli 7.3. Przy wykorzystaniu opracowanego modelu wykonano obliczenia analogiczne do poprzednich przykładów. Wszystkie słupki zamodelowano za pomocą elementów kratownicowych, a więc ich zamocowanie w pomoście było przegubowe. W obliczeniach założono wstępne sprężenie elementów ciągnowych. Wyjściowe siły sprężające wciągach drugorzędnych wyniosły 150 kN, a w trzeciorzędnych 50 kN. Ciągna podwieszenia głównego zostały wstępnie naprężone siłami wyznaczonymi na podstawie warunku minimalizacji przemieszczeń pionowych węzłów łączących pomost z podwieszeniem głównym i przemieszczeń poziomych górnych węzłów słupków głównych od obciążeń stałych. Siły wstępnego sprężenia w tych linach wyniosły od 492 do 1621 kN.

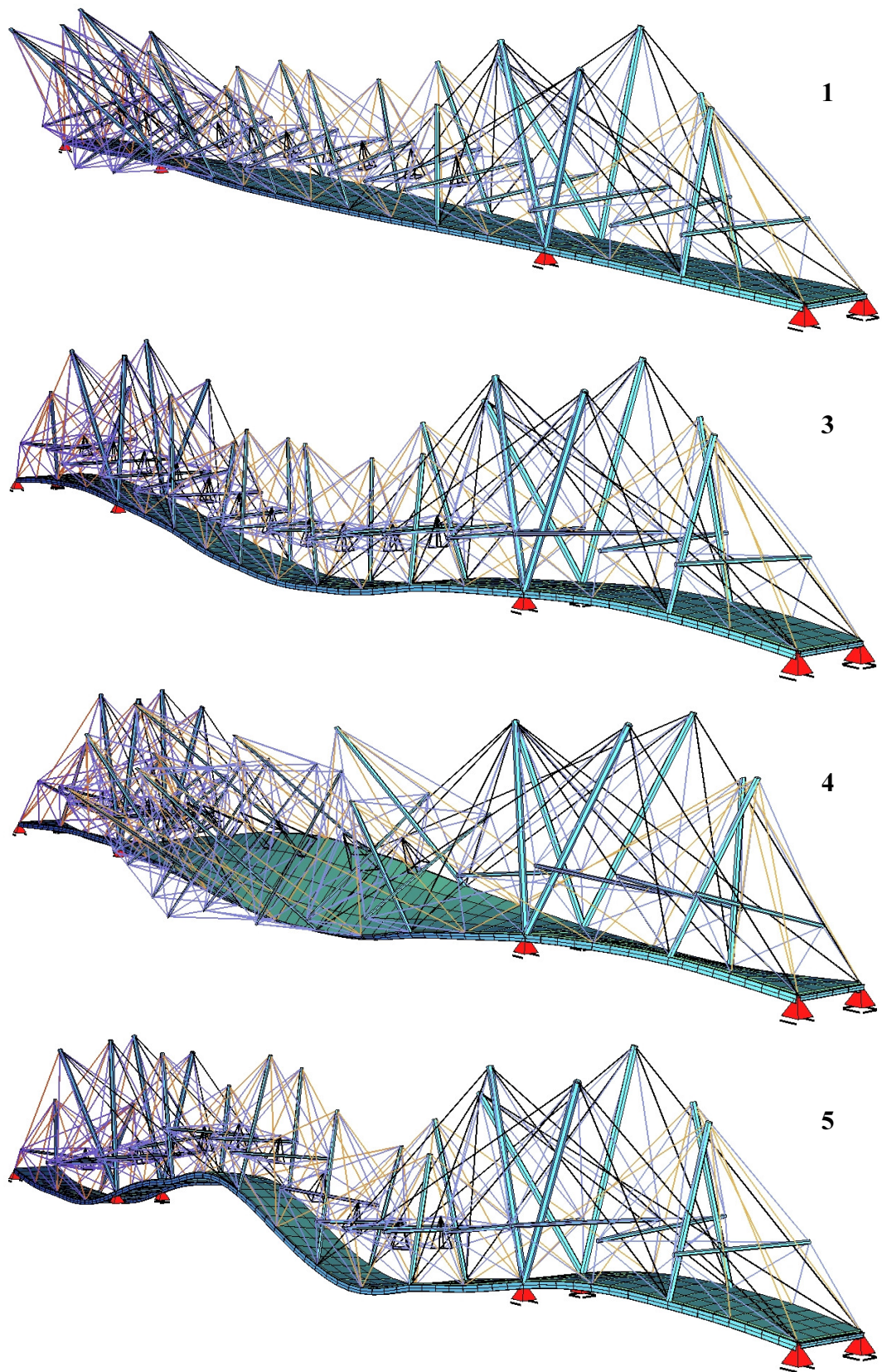
Tab. 7.3 Przekroje elementów w modelu Kładki Kurilpa

Rodzaj elementu	Rodzaj przekroju	Moduł sprężystości [GPa]	Wymiary [mm] (h – wysokość, b – szerokość, D – średnica, t – grubość blachy)		
Belki pomostu	skrzynkowy blachownicowy	210	h = 900	b = 450	t = 12 ÷ 40
Poprzecznice	2 x dwuteowy walcowany	210	h = 550	b = 210	t = 11 ÷ 17
Słupki główne	rurowy	210	D = 905	t = 19,1	
Słupki drugorzędne	rurowy	210	D = 610 ÷ 750	t = 6,4 ÷ 10,0	
Ciągna podwieszenia głównego	ciągnowy linowy	160	D = 80		
Ciągna podwieszenia drugorzędne	ciągnowy linowy	160	D = 30		
Zastrzały	rurowy	210	D = 457 ÷ 508	t = 23	
Ciągna podwieszenia trzeciorzędne	ciągnowy linowy	130	D = 19 ÷ 23		

Przeprowadzono obliczenia, obciążając model ciężarem własnym, szacunkowym ciężarem wyposażenia (balustrady, podwieszony dach), wiatrem, tłumem znajdującym się na całym pomoście i jego połowie, pojazdem samochodowym S klasy E. Obciążenia i ich kombinacje określono na podstawie normy [PN-85/S-10030], analogicznie do poprzednich przykładów. Na rysunku 7.22 przedstawiono wizualizacje otrzymanych przemieszczeń. Maksymalne przemieszczenie w środku przęsła wyniosło 15 cm przy uwzględnieniu obciążeń stałych, ob-

ciążeń od tłumy na całym pomoście oraz od wiatru. Obliczenia potwierdziły zakładane funkcje poszczególnych elementów nośnych konstrukcji. Ciężna główne pełnią rolę typową dla lin i kabli w mostach podwieszonych, o czym świadczy możliwość wykorzystania tych samych algorytmów wyznaczania sił naciągu w linach co w typowych konstrukcjach mostowych tego typu. Różnicą jest podwojenie pylonów i podwieszenia. Ciężna i słupki drugorzędne usztywniają konstrukcję i zmniejszają przemieszczenia pionowe punktów między słupkami. Zastrzały i ciężna trzeciorzędne są kluczowe dla stabilizacji przegubowo podpartych słupków i poprzecznego usztywnienia ustroju. Wszystkie ciężna są rozciągane.

W analizie dynamicznej wyznaczono częstotliwości i postaci drgań własnych modelu (rys. 7.23). Pierwsze wartości wyniosły: 0,76 Hz (kołysanie się słupków nad pierwszą podporą), 0,87 Hz (kołysanie się słupków nad drugą podporą), 0,93 Hz (pionowa giętna – symetryczna postać drgań), 1,41 Hz (skrętna – symetryczna postać drgań), 1,51 Hz (pionowa giętna – antysymetryczna postać drgań). Otrzymane wyniki odbiegają od wartości obliczonych przez autorów projektu (por. [Ainsworth: 2011b] (w tej samej kolejności): 0,76 – 0,78 Hz, 0,87 – 0,89 Hz, 0,93 Hz – 0,77 Hz, 1,41 – 1,18 Hz, 1,51 – 1,25 Hz), co wynika z braku dokładnych informacji na temat rozkładu sztywności i masy (szczególnie wyposażenia), a także nieuwzględnienia w analizie modalnej słupów podpór pośrednich i ich posadowienia. Mimo to rząd wielkości oraz otrzymane postaci drgań pozwalają na ogólne rozpoznanie charakterystyk dynamicznych konstrukcji.



Rys. 7.23 Kładka Kurilpa: 1, 3, 4 i 5 postaci drgań własnych

7.4.4 Wnioski

Obiekt, podobnie jak inne konstrukcje podwieszane, ma stosunkowo niskie pierwsze częstotliwości drgań własnych. Wynika to z lekkości ciężnowej struktury i pomostu oraz dużej rozpiętości przęsła. Co więcej, duża masa znajdująca się powyżej pomostu skutkuje skomplikowanym zachowaniem dynamicznym ustroju. W konstrukcji przy stosunkowo niskich częstotliwościach drgań własnych (również poza postaciami przedstawionymi na rysunku 7.23) występuje wiele poziomych i skrętnych postaci drgań, postaci drgań pionowych i skrętnych o zbliżonych częstotliwościach oraz nietypowych postaci drgań łączących lokalne drgania pomostu i słupków. To wszystko wpływa na szczególną wrażliwość konstrukcji na oddziaływania dynamiczne, zarówno spowodowane przez pieszych, jak i przez wiatr. Autorzy projektu wykonali szczegółową analizę. Badania w tunelu aerodynamicznym wskazały na możliwość występowania zjawiska galopowania skrętnego pomostu przy niskich prędkościach wiatru. W związku z tym na bocznych krawędziach pomostu zastosowano dodatkowe, opływowe elementy niwelujące ten efekt. Problemy aerodynamiczne zidentyfikowano również w słupkach drugorzędnych. W celu zapobiegnięcia występowaniu drgań związanych ze wzbudzeniem wirowym w elementach tych zastosowano tłumiki w postaci pierścieni o masie od 100 do 250 kg, zawieszonych powyżej połowy ich wysokości i połączonych z nimi za pomocą lepkosprężystego materiału pochłaniającego część energii drgań. Ponadto analiza numeryczna drgań wywołanych przez pieszych wskazała na pewne ryzyko występowania zjawiska synchronizacji pieszych i drgającego poziomo pomostu. W związku z tym w środku przęsła zamontowano poziomy strojony tłumik masowy o masie 3,2 t.

Wnioski płynące z dotychczasowej eksploatacji obiektu wskazują na prawidłowe zaprojektowanie konstrukcji zarówno pod względem nośności, jak i warunków użytkowych. Most jest zatem dobrym przykładem tego, jak można skutecznie wykorzystać niektóre z cech ten-segrity w mostownictwie. Należy jednak wspomnieć o tym, że wybranie nowatorskich rozwiązań wiąże się ze zwiększeniem trudności wykonawczych, a także podniesieniem kosztu budowy obiektu. Budowa mostu pochłonęła 63 mln dolarów australijskich, czyniąc go jedną z najdroższych kładek w historii mostownictwa [Duguid: 2011]. Zakładając inflację na poziomie 2,5%, w odniesieniu do 2014 roku, koszt budowy obiektu w stosunku do jego powierzchni wyniósł około 13000 €/m². Choć nie jest to wartość rekordowa, jest większa od średniego kosztu budowy charakterystycznych kładek dla pieszych.

Rozdział 8

Podsumowanie

Przedstawione w niniejszej pracy wyniki badań wskazują na istnienie możliwości wykorzystania konstrukcji tensegrity w budownictwie mostowym. To proste stwierdzenie zostało poparte analizą zarówno samej reguły konstrukcyjnej tensegrity, jak i jej praktycznego wykorzystania w inżynierii lądowej i mostownictwie.

Pojęcie tensegrity rozumiane jest na wiele sposobów, aczkolwiek często nazwa ta używana jest zbyt pochopnie – w odniesieniu do ustrojów, które posiadają pewne, lecz niekoniecznie kluczowe cechy tensegrity. Przegląd literatury wskazuje na duże zróżnicowanie definicji, co wynika z częstego traktowania tensegrity bardziej jako abstrakcyjnej idei niż zasady konstrukcyjnej. Jednakże dzięki użyciu opisu mechaniki konstrukcji z analizy właściwości podstawowych struktur tensegrity wynikają jasno sprecyzowane cechy, jakie mają te ustroje. O wyjątkowości tensegrity, ich odróżnieniu od innych, powszechnie znanych ustrojów decyduje występowanie stanów samonapężenia i usztywniających je mechanizmów infinitezymalnych. Na wykorzystaniu tych cech opiera się cała gałąź badań na temat poszukiwania formy tensegrity. To z nich biorą się inne charakterystyczne cechy takich konstrukcji. Dzięki nim w tego typu strukturach w pewnych elementach w sposób naturalny pojawia się ściskanie, a w innych rozciąganie. Dlatego właśnie część elementów może zostać zastąpiona cięgnami, które znajdują się na zewnątrz nieciągnącego układu elementów ściskanych. Bez mechanizmów infinitezymalnych, usztywnionych przez samonapężenie nie byłoby „integralności rozciągania” (ang. *tensile-integrity* [Fuller: 1962]), a więc i „tensegrity”.

Kiedy jednak te bardzo interesujące pod względem mechanicznym konstrukcje próbuje się wykorzystać w budownictwie, występują pewne trudności. To co decyduje o ich specyfice i wyróżnia je spośród innych ustrojów, niekoniecznie jest korzystne z praktycznego punktu widzenia. Konstrukcje, chociaż są statycznie niewyznaczalne, to nie wynika to ze zwiększonej w stosunku do niezbędnego minimum liczby prętów, lecz z występowania stanów samonapężenia, które mogą przyjmować dowolne wartości przy zachowaniu odpowiednich proporcji sił wewnętrznych. Ryzyko wynikające z możliwości awarii całej budowli w wyniku przerwania bądź przecięcia jednego z cięgien jest niekorzystne z punktu widzenia niezawod-

ności konstrukcji. Co więcej, występowanie w ustroju mechanizmów, chociaż infinitezymalnych, wpływa na to, że konstrukcja w kierunku ich działania może mieć stosunkowo niewielką sztywność. W związku z tym, mimo że istnieją realizacje nazywane tensegrity, to większość (poza nielicznymi przykładami, takimi jak wieże i słupy złożone z modułów typu *simplex*) wykazuje jedynie część z charakteryzujących je cech. Jednakże w wielu konstrukcjach wspomniane właściwości są istotne dla charakterystyki całego ustroju i często wpływają zarówno na jego formę, jak i sztywność. Wobec tego, dostrzegając w niektórych konstrukcjach wyraźne inspiracje i analogie do tensegrity, można je zaliczyć do grupy konstrukcji o cechach tensegrity. Cechy te są podstawą do klasyfikacji tego typu ustrojów. Tym, co odróżnia konstrukcje o cechach tensegrity od kratownic, w których zastosowano cięgna, jest występowanie stanu samonapężenia. Nawet w przypadku, gdy w konstrukcji takiej nie występują mechanizmy infinitezymalne, stan samonapężenia może w różny sposób wpływać na sztywność takiej konstrukcji, tak jak w wielu przywołanych przykładach cięgowych ustrojów przekryć dachowych.

Specyficzna charakterystyka mechaniczna tensegrity znacznie ogranicza swobodę ich kształtowania. Podobnie jak w przypadku wielu ustrojów cięgowych czy powłokowych lub powłokowo-cięgowych tensegrity wymaga przeprowadzenia procesu poszukiwania początkowej formy równowagi ustroju. Proces ten w przypadku tensegrity niejednokrotnie oznacza nie tylko poszukiwanie równowagi z góry ustalonej konfiguracji elementów, ale często decyduje również o ukształtowaniu całej, w wielu przypadkach bardzo skomplikowanej struktury. Przegląd literatury wskazał na bardzo duże zróżnicowanie metod *form-finding*. Wśród metod można wyróżnić zarówno te zaadaptowane z innych obszarów budownictwa, jak i te opracowane specjalnie na potrzeby mechaniki tensegrity. Bogactwo publikacji i stopień zaawansowania przedstawionych w nich badań wskazują, że samo poszukiwanie formy tensegrity jest problemem na tyle interesującym, że może stanowić całkowicie odrębną gałąź rozważań na temat tych struktur. Do przeprowadzenia procesu *form-finding* można użyć również technik opartych na metodzie elementów skończonych. W przypadku prostych modułów o znanej konfiguracji prętów zaproponowano w pracy metodę analizy spektralnej macierzy kratownic, którą w ujęciu dynamicznym można zaimplementować w komercyjnych programach metody elementów skończonych.

Analiza macierzy kratownic typu tensegrity pozwala identyfikować mechanizmy infinitezymalne i stany samonapężenia. Macierz sztywności liniowej prawidłowo podpartej konstrukcji, w której występują mechanizmy infinitezymalne, ma odpowiadające im zerowe wartości własne. Jeśli uwzględnimy wpływ samonapężenia na nieliniowość równań równowagi,

poprzez wprowadzenie macierzy sztywności geometrycznej, wtedy odpowiadające mechanizmom skończonym wartości własne przestają być zerowe. Występowanie mechanizmów i odpowiadających im stanów samonaprężenia objawia się również zerowaniem się wyznacznika macierzy wydłużeń \mathbf{B} . Z kolei analiza spektralna iloczynu macierzy $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ pozwala nie tylko na zidentyfikowanie mechanizmów, ale również na poznanie układu sił samonaprężenia. Jest nim wektor własny odpowiadający zerowym wartościom własnym tejże macierzy. Do identyfikacji mechanizmów skończonych może być przydatna również analiza drgań własnych konstrukcji. W prawidłowo podpartej konstrukcji tensegrity częstości drgań własnych, które odpowiadają mechanizmom skończonym, są zerowe, chyba że zostanie uwzględniona macierz sztywności geometrycznej, odpowiadająca stanowi samonaprężenia. Wtedy wszystkie wartości własne są dodatnie. Jeśli któraś z nich w dalszym ciągu pozostaje zerowa, oznacza to, że odpowiadający jej mechanizm nie jest infinytezymalny. Analiza drgań własnych pozwala na zastosowanie programów komercyjnych metody elementów skończonych do poszukiwania formy tensegrity. Na podstawie wniosków z analizy macierzy kratownic typu tensegrity można stwierdzić, że metoda elementów skończonych może być przydatna w obliczeniach konstrukcji tensegrity, pomimo występowania mechanizmów, jeśli zastosowana zostanie macierz sztywności geometrycznej.

Analiza odpowiedzi konstrukcji tensegrity na oddziaływania statyczne pozwala stwierdzić, że wpływ wstępnego sprężenia struktur tego typu w sposób bardzo wyraźny usztywnia cały ustrój. Dotyczy to wszystkich przypadków, niezależnie od liczby mechanizmów infinytezymalnych i stanów samonaprężenia. Oznacza to, że nawet w przypadku występowania wielu mechanizmów do ich usztywnienia może (choć nie musi) wystarczyć wprowadzenie tylko jednego stanu *self-stress*. Jednakże wpływ ten jest znaczący jedynie w kierunkach związanych z mechanizmami infinytezymalnymi, to znaczy wtedy, gdy obciążenia powodują przemieszczenia węzłów zgodne z postacią tych mechanizmów.

Jak wspomniano, użycie MES jest możliwe, gdy uwzględni się macierz sztywności geometrycznej, ponieważ wtedy całkowita macierz układu nie jest osobliwa. Może to jednak nie wystarczyć przy niewielkim poziomie samonaprężenia. Trzeba wtedy uwzględnić wpływ nieliniowości geometrycznej i zastosować narzędzia iteracyjne, takie jak metoda Newtona-Raphsona. Analiza nieliniowa pozwala również wykazać, że nawet w konstrukcjach bez wstępnego sprężenia mechanizmy infinytezymalne mogą być usztywnione w wyniku pojawienia się sił normalnych w konstrukcji na skutek działania obciążenia zewnętrznego. Należy jednak pamiętać, że w przypadku, gdy obciążenie zewnętrzne powoduje ściskanie cięgien, należy w bardziej złożony sposób uwzględnić ich brak sztywności przy ścisaniu.

Ze względu na powszechność zastosowań MES w programach inżynierskich, można stwierdzić, że istnieje możliwość projektowania konstrukcji tensegrity za pomocą ogólnodostępnych narzędzi obliczeniowych. Metoda elementów skończonych jest właściwa również do badania charakterystyk dynamicznych konstrukcji typu tensegrity. Przy użyciu MES, na kilku przykładach, wykazano wpływ sił samonapężenia na częstotliwości drgań własnych. Przy braku wstępnego sprężenia w tensegrity występują zerowe częstotliwości drgań własnych. Stają się one dodatnie po wprowadzeniu w konstrukcji *self-stress*. Kwadrat częstotliwości odpowiadającej postaci drgań, związanej z mechanizmem infinitezymalnym, rośnie liniowo wraz ze wzrostem poziomu samonapężenia. Wpływ samonapężenia jest znikomy na pozostałe, niezwiązane z mechanizmami częstotliwości drgań własnych. Dodatkowo wykazano, że w przypadku gdy podczas drgań pręty podlegają znacznym obrotom, wskazane jest stosowanie konsekwentnej, a nie diagonalnej macierzy mas.

Poznanie cech mechanicznych tensegrity oraz adekwatnych metod ich analizy pozwala na próbę ich adaptacji do zastosowań mostowych. Ze względu na kształt podstawowych modułów tensegrity, jest to zadanie utrudnione. Zazwyczaj w modułach wymiary we wszystkich kierunkach mają zbliżone wartości, tymczasem mosty mają wydłużony, płaski kształt. Utworzenie struktur mostowych wymaga łączenia z sobą modułów. To, czy konstrukcja wielomodułowa zachowa cechy tensegrity, zależy od sposobu ich łączenia. Połączenie modułów może (choć nie musi) skutkować likwidacją wszystkich bądź tylko niektórych mechanizmów infinitezymalnych lub uciążeniem układu elementów ściskanych. Zależy to między innymi od tego, czy moduły łączy się w istniejących już węzłach, czy poprzez utworzenie nowych węzłów na cięgnach, a także od tego, czy liczba elementów nowej struktury jest równa sumie elementów modułów, czy jest od niej większa lub mniejsza. Odrębnym rozwiązaniem są konstrukcje o cechach tensegrity, oparte na rozpartych zastrzałami cięgnach, rozpiętych między sztywnymi podporami.

Utrata mechanizmów infinitezymalnych korzystnie wpływa na sztywność ustroju. Zmniejszenie przemieszczeń konstrukcji tensegrity pod wpływem obciążeń zewnętrznych można uzyskać poprzez zwiększenie poziomu samonapężenia lub poprzez likwidację mechanizmów. Pierwsza metoda wiąże się z koniecznością zastosowania odpowiednio dużych przekrojów poprzecznych, ze względu na konieczność przeniesienia odpowiednio dużych sił osiowych. Druga metoda nie wymaga znacznego zwiększenia sił normalnych, a efekt braku mechanizmów można uzyskać poprzez odpowiedni sposób połączenia modułów albo poprzez zastosowanie dodatkowych, usztywniających elementów. Dodatkowe elementy zwiększają również stopień statycznej niewyznaczalności ustroju, zmniejszając ryzyko wystąpienia awa-

rii konstrukcji na skutek przzerwania jednego z cięgien. A zatem jeśli celem projektowym będzie wyłącznie uzyskanie odpowiednio sztywnej i niezawodnej konstrukcji, wtedy występowanie mechanizmów infinytezymalnych jest niekorzystne. Płyne stąd wniosek, że użycie „czystych tensegrity” w typowych konstrukcjach mostowych jest nieuzasadnione.

Nie zmienia to jednak faktu, że cechy tensegrity mogą być z powodzeniem wykorzystywane. W konstrukcjach o cechach tensegrity występowanie stanów samonapężenia umożliwia sprężenie konstrukcji. Podobnie jak przy sprężeniu centrycznym ustrojów żelbetowych, gdzie sprężenie powoduje jedynie skrócenie konstrukcji, tak samo samonapężenie w ustrojach o cechach tensegrity, w przeciwieństwie na przykład do konstrukcji mostów podwieszonych, skutkuje jedynie odkształceniami w kierunku osi elementów. Dlatego właśnie za pomocą samonapężenia można dokonać sprężenia dowolnie dużymi siłami (przy odpowiednich przekrojach elementów), niezależnie od warunków podparcia i kierunku działania obciążeń. Chociaż jak wykazały badania numeryczne wybranych przykładów, wpływ samonapężenia na sztywność geometryczną konstrukcji dotyczy mechanizmów infinytezymalnych, to samonapężenie w ustrojach o cechach tensegrity umożliwia stosowanie elementów ciągnowych. Odpowiednio wysoki poziom sprężenia sprawia, że niektóre elementy są wyłącznie rozciągane w każdej fazie pracy konstrukcji. Dzięki temu można uzyskać ustroje o znacznie większej liczbie elementów rozciąganych niż ściskanych, które przy tych samych bezwzględnych wartościach sił muszą mieć większe przekroje poprzeczne, ze względu na problem wyboczenia. Z drugiej strony wprowadzanie coraz wyższego poziomu samonapężenia wymusza stosowanie większych przekrojów poprzecznych elementów, ze względu na zwiększenie sił normalnych również w zastrzałach. Należy zatem zrównoważyć końcowy poziom wstępnego sprężenia, mając na uwadze dwoistość skutków jego podnoszenia.

Stosując konstrukcje o cechach tensegrity, dopuszcza się rezygnację z występowania mechanizmów infinytezymalnych. O sztywności tego typu ustrojów wielomodułowych mogą decydować dodatkowe elementy łączące, będące poza układami samonapężenia. Wydaje się zatem, że nie ma uzasadnienia dla ograniczania sztywności poprzez sztuczne próby spełnienia drugorzędnych wymogów definicji tensegrity. Dlatego możliwe jest zastosowanie płyty pomostu współpracującej ze strukturą o cechach tensegrity. Można wtedy mówić o dźwigarach o cechach tensegrity, podobnie jak mówi się o dźwigarach kratownicowych. Innym rozwiązaniem pozwalającym na zwiększenie sztywności niektórych konstrukcji jest nieprzesuwne podparcie ustroju na obu jego końcach, podobnie jak w mostach wstęgowych. W celu zmniejszenia zużycia materiału możliwe jest również ograniczenie poziomu samonapężenia, dzięki zastąpieniu ściskanych cięgien elementami przenoszącymi niewielkie siły ściskające lub po-

przez dopuszczenie w niektórych kombinacjach obciążeń do wyłączenia z pracy tychże cięgien. W ustrojach wielomodułowych podpartych na zewnętrznych węzłach taka sytuacja dotyczyłaby nielicznych elementów skrajnych – zazwyczaj bardziej wyteżonych modułów. W przypadku gdy rozważa się dopuszczenie do luźnego zwisu cięgien na skutek działania ściskania, można mówić o bezpośrednim wpływie sprężenia na sztywność ustroju. Im większy poziom sił samonapężenia, tym mniej luźnych cięgien, które nie mają udziału w sztywności konstrukcji. Wpływ ten jest pomijalny po przekroczeniu wartości sił sprężających, gwarantujących rozciąganie wszystkich cięgien.

Analiza wybranych ustrojów wielomodułowych belek i płyt oraz struktur opartych na linach rozpiętych między sztywnymi podporami wykazała, że możliwe jest zaprojektowanie kładek dla pieszych o konstrukcji o cechach tensegrity. Wnioski te dotyczą zarówno statycznych, jak i dynamicznych aspektów projektowania, chociaż należy podkreślić, że obliczenia wykonano na modelach przęsł o niewielkiej rozpiętości. W przypadku lekkich ustrojów ciągnowo-prętowych, jakimi są kładki o cechach tensegrity, należy zwrócić szczególną uwagę na zagadnienia związane z ryzykiem wzbudzenia się nadmiernych drgań na skutek działania obciążeń od działania ludzi i wiatru. Ze względu na wymogi kryteriów komfortu wibracyjnego konieczne może być zastosowanie tłumików drgań.

Zaprojektowanie konstrukcji tensegrity możliwe jest również pod względem technologicznym. Współcześnie powszechnie dostępne i stosowane są rozwiązania systemowe cięgien różnego rodzaju. Począwszy od cięgien prętowych z typowych stali konstrukcyjnych, aż do cięgien z wysokowytrzymałych drutów ze stali wysokowęglowej, takich jak liny stalowe i kable złożone z wiązki splotów. Na użytek tensegrity mogą być adaptowane same ciągnia, jak również całe systemy obejmujące węzły, zakotwienia, a także pręty ściskane, chociaż mogą one być projektowane indywidualnie. Ze względu na wysoki poziom sprężenia, użyteczne mogą być także nowoczesne materiały takie jak kompozyty polimerowe. Również wznoszenie konstrukcji mostowej tensegrity może odbywać na jeden z obecnie stosowanych sposobów i nie ma potrzeby opracowywania całkowicie nowej metody. Największym wyzwaniem przy planowaniu budowy jest opracowanie technologii i programu sprężenia, gwarantującego właściwy poziom sił wewnętrznych przy zachowaniu odpowiedniej geometrii ustroju.

O możliwości zastosowania tensegrity w mostownictwie świadczą istniejące projekty określane tym mianem oraz jedna realizacja dużej kładki pieszo-rowerowej. Nie wszystkie z nich wykazują cechy tensegrity. Szczególnym przypadkiem tego typu są ustroje oparte na odwróconej kratownicy Finka. Mimo zastosowania elementów sprężonych takie konstrukcje nie wykazują większości cech tensegrity, w tym stanów samonapężenia. Obiekty takie bliź-

sze są mostom podwieszonym, w których wartości sił sprężających wynikają z konieczności podniesienia pomostu do poziomu niwelety. Studiując inne, wybrane projekty mostów tensegrity: kładkę z modułów pierścieniowych i kładkę Tor Vergata, również stwierdzono, że nie są to „czyste tensegrity”. Można natomiast sklasyfikować je jako konstrukcje o cechach tensegrity. Mimo braku mechanizmów infinitezimalnych w tych projektach wyraźnie wykorzystano ideę tensegrity. Występowanie stanów samonapężenia użytych jako wstępnego sprężenia wpływa na sztywność, poprzez nadanie takich sił rozciągających w cięgnach, aby ograniczyć liczbę luźnych – ściskanych cięgien. Ponadto są to ustroje kratownicowe i występują w nich zastrzały otoczone przez zewnętrzny układ elementów rozciąganych. Elementy ściskane rozpierają cięgna, podobnie jak w pierwszych, opatentowanych strukturach autorstwa Motro, Snelsona i Emmericha.

Najlepszym dowodem na istnienie możliwości wykorzystania tensegrity w mostownictwie powinna być największa i prawdopodobnie jedyna realizacja tego typu, czyli Kładka Kurilpa. Niestety w tym przypadku właściwości tensegrity mają jedynie znaczenie lokalne. Nie decydują one o nośności giętej ustroju. Cechy tensegrity wykorzystano w strukturach drugorzędnych, odpowiadających za utrzymanie na swojej pozycji głównych elementów nośnych, usztywnienie konstrukcji w kierunku poprzecznym i podtrzymanie zadaszania. I chociaż nie są to elementy najważniejsze, są nie bez znaczenia w całej konstrukcji mostu, a w jej strukturze można wskazać wyraźną inspirację tensegrity, wyrażoną chociażby przez występowanie zastrzałów „zawieszonych” między cięgnami. Dlatego Kładka Kurilpa może zostać zaliczona do konstrukcji o cechach tensegrity.

Reasumując, badania na temat konstrukcji tensegrity potwierdziły tezę o możliwości ich zastosowania w mostownictwie, jednak wykorzystanie wszystkich cech tensegrity w ustrojach nośnych typowych mostów jest nieuzasadnione. Nie oznacza to jednak, że specyficzne właściwości tensegrity, chociaż bardzo ciekawe, są bezużyteczne w zastosowaniach inżynierskich. Wyjątkowa łatwość w zmianie charakterystyk statycznych i dynamicznych ustroju na skutek zmniejszenia lub zwiększenia sprężenia jednego bądź wielu cięgien sprawia, że tensegrity w naturalny sposób mogą być wykorzystywane w konstrukcjach sterowanych i rozwijanych. Wydaje się zatem, że można wskazać dwa podstawowe kierunki dalszych badań. Pierwszy z nich to projektowanie i budowa konstrukcji mostowych o cechach tensegrity, przy użyciu technik wskazanych w niniejszej rozprawie. W takich ustrojach dzięki cechom tensegrity można zastosować liczne elementy cięgnowe, uzyskując lekką i ciekawą architektonicznie strukturę. Drugim kierunkiem są konstrukcje sterowane i rozwijane. Otwierają one wiele nowych i różnorodnych obszarów badań, takich jak chociażby konstrukcje inteligentne.

W nich w odróżnieniu typowych rozwiązań, wykorzystywane mogą być „czyste tensegrity”. W przypadku ustrojów sterowanych niedobory sztywności wynikające z istnienia mechanizmów infinitezymalnych, a co za tym idzie – większe zużycie materiału niż w konwencjonalnych konstrukcjach, może być rekompensowane przez zalety ich specjalnych właściwości. W mostach rozwijanych możliwe jest natomiast wykorzystanie mechanizmów jedynie w fazie zmiany geometrii i odebranie ich poprzez dodatkowe elementy w fazie użytkowej. Oba kierunki dalszych rozważań umożliwiają rozwój badań teoretycznych, jak również praktyczne wykorzystanie tensegrity w konstrukcjach inżynierskich, a w szczególności mostowych.

Literatura

- Adam B., Smith I.F.C. (2006), *Learning, Self-Diagnosis And Multi-Objective Control Of An Active Tensegrity Structure*, [w] M. Pandey, W.-Ch. Xie, L. Xu (eds), *Advances in Engineering Structures, Mechanics & Construction*, Springer, Netherlands, pp. 439–448.
- Adam B., Smith I.F.C. (2007a), *Tensegrity Active Control: Multiobjective Approach*, „Journal of Computing in Civil Engineering”, vol. 21, iss. 1, pp. 3–10.
- Adam B., Smith I.F.C. (2007b), *Self-Diagnosis and Self-Repair of an Active Tensegrity Structure*, „Journal of Structural Engineering”, vol. 133, iss. 12, pp. 1752–1761.
- Adam B., Smith I.F.C. (2008), *Active tensegrity: A control framework for an adaptive civil-engineering structure*, „Computers & Structures”, vol. 86, iss. 23–24, pp. 2215–2223.
- Ainsworth I. (2011a), Franklin K., Burnton P., *Kurilpa Bridge – a case study*, [w] *Proceedings of the 4th International Conference „Footbridge 2011” – Attractive structures at reasonable costs. Wrocław, Poland, 6–8 July 2011*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, pp. 1047–1056.
- Ainsworth I. (2011b), Franklin K., *Kurilpa Bridge*, „The Arup Journal”, vol. 1, pp. 66–78.
- Aldrich J.B. (2004), *Control synthesis for a class of light and agile robotic tensegrity structures*, Ph.D. Thesis, University of California.
- Ario I. (2013), *Development of a prototype deployable bridge based on origami skill*, „Automation in Construction”, vol. 32, pp. 104–111.
- Averseng J. et al. (2005), *Active control of a tensegrity plane grid*, [w] *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15*, pp. 6830–6834.
- Bachmann H. et al. (1995), *Vibration problems in structures: practical guidelines*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin.
- Barnes M.R. (1999), *Form-finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation*, „International Journal of Space Structures”, vol. 14, iss. 2, 1999.
- Bathe K.-J. (1996), *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New York.
- Baudriller H. et al. (2006), *Form-finding of complex tensegrity structures: application to cell cytoskeleton modeling*, „Comptes Rendus Mécanique”, vol. 334, iss. 11, pp. 662–668.
- Baumann K., Bachmann H. (1988), *Durch Menschen verursachte dynamische Lasten und deren Auswirkungen auf Balkentragwerke*, Birkhäuser, Basel.
- Bel Hadj Ali N. et al. (2010a), *Design optimization and dynamic analysis of a tensegrity-based footbridge*, „Engineering Structures”, vol. 32, iss. 11, pp. 3650–3659.
- Bel Hadj Ali N., Smith I.F.C. (2010b), *Dynamic behavior and vibration control of a tensegrity structure*, „International Journal of Solids and Structures”, vol. 47, iss. 9, pp. 1285–129.
- Belytschko T., Liu W.K., Moran B. (2000), *Nonlinear finite elements for continua and structures*, Wiley, Evans-ton.
- Biegus A. (1999), *Probabilistyczna analiza konstrukcji stalowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Wrocław.
- Bieniek Z. (2012), *Tensegrity – integrujące rozciąganie w systemach architektonicznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów.
- Bouderbala M., Motro R. (1998), *Folding tensegrity systems*, [w] *IUTAM–IASS Symposium on Deployable Structures: Theory and Applications*, Cambridge, pp. 27–36.

- Briseghella B. *et al.* (2011), *Tensegrity Footbridges with Arch and Straight Deck: Comparison of their Structural Behaviour*, [w] *Proceedings of the 4th International Conference „Footbridge 2011” – Attractive structures at reasonable costs. Wrocław, Poland, 6–8 July 2011*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, pp. 802–809.
- Brownlie K., Curran P., Thompson S. (2008), *Forthside bridge, Stirling, Scotland. Third international Conference „Footbridge 2008”, 2–4.07.2008, Porto, Portugal*, Porto.
- Burkhardt R.W., Jr. (2008), *A Practical Guide to Tensegrity Design* [online] [dostęp 22 marca 2014]. Dostępny w WWW: http://www.angelfire.com/ma4/bob_wb/tenseg.pdf.
- Calladine C.R. (1978), *Buckminster Fuller’s „Tensegrity” structures and Clerk Maxwell’s rules for the construction of stiff frames*, „International Journal of Solids and Structures”, vol. 14, iss. 2, pp. 161–172.
- Chadwick P., Vianello M., Stephen C.C. (2001), *A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight*, „Journal of the Mechanics and Physics of Solids”, vol. 49, iss. 11, pp. 2471–2492.
- Chrzanowski M. (1995), *Reologia ciał stałych*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków.
- Crisfield M.A. (1979), *A faster modified newton-raphson iteration*, „Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering”, vol. 20, iss. 3, pp. 267–278.
- Crisfield M.A. (1991), *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, vol. 1: *Essentials*, pp. 362, Wiley, London.
- Connelly R. (1993), *Rigidity* [w:] *Handbook of Convex Geometry*, vol. A, North-Holland, Amsterdam, pp. 223–271.
- Connelly R., Terrell M. (1995), *Globally rigid symmetric tensegrities*, „Journal of Structural Topology”, no. 21, pp. 59–78.
- Dalilsafaei S., Eriksson A., Tibert G. (2011), *Improving Bending Stiffness of Tensegrity Booms*, „International Journal of Space Structures”, vol. 27, no. 2–3, pp. 117–130.
- Djouadi S. *et al.* (1998), *Active Control of Tensegrity Systems*, „Journal of Aerospace Engineering”, vol. 11, iss. 2, pp. 37–44.
- Domer B., Smith I.F.C. (2005), *An Active Structure that Learns*, „Journal of Computing in Civil Engineering”, vol. 19, iss. 1, pp. 6–24.
- Duffy J. *et al.* (2000), *A review of a family of self-deploying tensegrity structures with elastic ties*, „The Shock and Vibration Digest”, vol. 32, iss. 2, pp. 100–106.
- Dalilsafaei S., Eriksson A., Tibert G. (2012), *Improving Bending Stiffness of Tensegrity Booms*, „International Journal of Space Structures”, vol. 27, no. 2–3, pp. 117–130.
- Duguid B. (2011), *Benchmarking cost and value of landmark footbridges*, [w] *Proceedings of the 4th International Conference „Footbridge 2011” – Attractive structures at reasonable costs. Wrocław, Poland, 6–8 July 2011*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, pp. 3–10.
- Emmerich D.G. (1964), *Construction de réseaux autotendants*, French Patent No. 1,377,290.
- Emmerich D.G. (1988), *Structures tendues et autotendantes*, Ecole d'architecture de Paris la Villette.
- Estrada G.G., Bungartz H.-J., Mohr dieck Ch. (2006), *Numerical Form-finding of tensegrity structures*, „International Journal Solids and Structures”, vol. 43, pp. 6855–6868.
- Fazli N., Abedian A. (2011), *Design of tensegrity structures for supporting deployable mesh antennas*, „Scientia Iranica”, vol. 18, iss. 5, pp. 1078–1087.
- Flaga A. (2011), *Mosty dla pieszych*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2011.
- Fuller B.R. (1962), *Tensile-Integrity Structures*, U.S. Patent No. 3,063,521, November 13, 1962.
- Fuller B.R. (1975), *Synergetics explorations in the geometry of thinking*, Collier Macmillan Publishers, London.

- Garstka J. (2009), *Nowe mosty zmechanizowane*, „Przegląd wojsk lądowych”, nr 11, s. 46–49.
- Gilewski W., Al Sabouni-Zawadzka A. (2013a), *Sterowanie własnościami struktur płytowych typu tensegrity za pomocą samonaprężeń*, [w] *Proceedings of the 11th International Conference on New Trends In Statics and Dynamics of Buildings, October 3–4, 2013*, Faculty of Civil Engineering STU Bratislava, Slovak Society of Mechanics SAS, ss. 47–50.
- Gilewski W., Kasprzak A. (2013b), *Kontynuálny opis wpływu samonaprężeń na własności modułów tensegrity*, [w] W. Szcześniak, M. Ataman (red.) *Teoretyczne podstawy budownictwa*, t. IV: *Mechanika techniczna*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, ss. 117–126.
- Gilewski W., Kasprzak A. (2013c), *Tensegrity Form-finding via modal analysis*, [w] T. Łodygowski *et al.*(eds) *20th International Conference on Computer Methods in Mechanics. Short Papers*, Poznań, pp. TS02–27–28.
- Gough M. (1998), *In the Laboratory of Constructivism: Karl Ioganson's Cold Structures*. „October”, vol. 84, pp. 90–117.
- Gómez Jáuregui V. (2004), *Tensegrity Structures and their Application to Architecture*, Master Thesis, School of Architecture Queen's University Belfast.
- Gómez Jáuregui V. (2009), *Controversial Origins of Tensegrity*, *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2009, Valencia*, [w] A. Domingo, C. Lazaro (eds), *Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures, 28 September – 2 October 2009*, Universidad Politecnica de Valencia, pp. 1642-1652.
- Graells R.A., Mirats Tur J.M. (2009), *Control and simulation of a tensegrity-based mobile robot*, „Robotics and Autonomous Systems”, vol. 57, iss. 5, pp. 526–535.
- Green A.E., Zerna W. (1970), *Theoretical elasticity*, Courier Dover Publications, Mineola, New York.
- Grundmann H., Kreuzinger H., Schneider M. (1993), *Schwingungsuntersuchungen für Fußgängerbauwerke*, [w] „Bauingenieur”, Heft 68, S. 215–225.
- Hajduk J., Osiecki J. (1970), *Ustroje ciężkowe. Teoria i obliczanie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Hanaor A. (1987), *Preliminary Investigation of Double-Layer Tensegrities*, [w] B.H.V. Topping (ed.), *Proceedings of the International Conference on the Design and Construction of Non-Conventional Structures*, vol. 2., Civil-Comp Press, Edinburgh.
- Hanaor A. (1991a), *Double-layer tensegrity grids: static load response. II – experimental study*, „Journal of Structural Engineering”, vol. 117, iss. 6, pp. 1675–1684.
- Hanaor A., Liao M.K. (1991b), *Double-layer tensegrity grids: static load response I – analytical study*, „Journal of Structural Engineering”, vol. 117, iss. 6, pp. 1660–1674.
- Hanaor A. (1992), *Aspects of design of double-layer tensegrity domes*, „International Journal of Space Structures”, vol. 7, iss. 2, pp. 101–113.
- Hanaor A. (1993), *Double-layer tensegrity grids as deployable structures*. „International Journal of Space Structures”, vol. 8, pp. 135–145.
- Jemioło S. (2012), *Tarcze i rodzaje anizotropii materiałów liniowo sprężystych*, [w] Jemioło S. (red.) *Sprężystość i hipersprężystość*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, ss. 35–44.
- Johannes F.N. (2000), *Carbon Fibre Composites as Stay Cables for Bridges*, „Applied Composite Materials”, vol. 7, iss. 2–3, pp. 139–150.
- Juan S.H., Mirats Tur J.M. (2008), *Tensegrity frameworks. Static analysis review*, „Mechanism and Machine Theory”, vol. 43, iss. 7, pp. 859–881.

- Kaczurin W. K. (1965), *Teoria konstrukcji wiszących*, tł. M. Szymański, Arkady, Warszawa.
- Kawaguchi K., Lu Z.-Y. (2002), *Construction of three-strut tension systems*, [w] G.A.R. Parke, P. Disney (eds), *Space Structures 5*, vol. 1, Civil-Comp Press, Guildford.
- Kawecki J., Masłowski R. (2010), *Zastosowanie tłumików pasywnych, quasi-aktywnych i hybrydowych do redukcji drgań sejsmicznych i parasejsmicznych budowli – przegląd rozwiązań*, „Czasopismo Techniczne. Budownictwo”, R. 107, z. 3–B, ss. 59–67.
- Kenner H. (1976), *Geodesic Math and how to Use it*, University of California Press.
- Kisiel I. (1967), *Reologia w budownictwie*, Arkady, Warszawa.
- Kono Y. et al. (1999), *An experimental investigation of a type of double-layer tensegrity grids*, „Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures”, vol. 40, iss. 130, pp. 103–111.
- Koohestani K. (2012), *Form-finding of tensegrity structures via genetic algorithm*, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, iss. 5, pp. 739–747.
- Korkmaz S., Bel Hadj Ali N., Smith I.F.C. (2011), *Determining control strategies for damage tolerance of an active tensegrity structure*, „Engineering Structures”, vol. 33, iss. 6, pp. 1930–1939.
- Korkmaz S., Bel Hadj Ali N., Smith I.F.C. (2012), *Configuration of control system for damage tolerance of a tensegrity bridge*, „Advanced Engineering Informatics”, vol. 26, iss. 1, pp. 145–155.
- Koizumi Y., Shibata M., Hirai S. (2012), *Rolling tensegrity driven by pneumatic soft actuators*, [w] *International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 14–18 May 2012, Saint Paul, MN, USA*, pp. 1988–1993.
- Li Y. et al. (2010), *A Monte Carlo Form-finding method for large scale regular and irregular tensegrity structures*, „International Journal of Solids and Structures”, vol. 47, iss. 14–15, pp. 1888–1898.
- Linkwitz K. (1999), *Form-finding by the direct approach and pertinent strategies for the conceptual design of pre-stressed and hanging structures*, „Journal of Space Structures” 14, pp. 73–87.
- Łopatka M.J., Żelkowski J. (2009), *Wymagania stawiane współczesnym mostom wojskowym*, „Szybkobieżne Pojazdy Gąsienicowe”, nr 24, ss. 35–41.
- Markocki B., Oleszek R. (2011a), *Koncepcja kładki dla pieszych o konstrukcji tensegrity w Magdalence koło Warszawy*, „Inżynieria i Budownictwo”, R. 67, nr 10, 553–557.
- Markocki B., Oleszek R. (2011b), *Konstrukcje Tensegrity w Zastosowaniu Mostowym na Przykładzie Koncepcji Kładki KL-03 nad Trasą S-7 Salomea-Wolica*, [w] *VII Konferencja Estetyka Mostów, Warszawa-Jachranka 2011*, pp. 109–116.
- Masic M., Skelton R. (2002), *Deployable plates made from stable-element class 1 tensegrity*, [w] *Proceedings of SPIE, Smart Structures and Materials 2002*, vol. 4698: McGowan A.-M.R., *Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies*, San Diego.
- Masic M., Skelton R., Gill Ph. (2005), *Algebraic tensegrity Form-finding*, „International Journal Solids and Structures”, vol. 42, pp. 4833–4858.
- Masic M., Skelton R., Gill Ph. (2006), *Optimization of tensegrity structures*, „International Journal Solids and Structures”, vol. 43, pp. 4687–4703.
- Materiały informacyjne firmy Halfen, *System ciągnowy Detan*, [online] [dostęp 22 marca 2014]. Dostępny w WWW: http://www.halfen.pl/s/91_7399/halfen/modules/brochures/index.php.
- Materiały informacyjne firmy Pfeifer, *Preifer Cable Structures – The Lightness of Construction*, [online] [dostęp 22 marca 2014]. Dostępny w WWW: <http://www.pfeifer.de/en/cable-structures/download/brochures/?dclid=9351>.
- Materiały informacyjne firmy BBR, *HiAm CONA. Stay Cable System – Elegance and Strength*, [online] [dostęp 22 marca 2014]. Dostępny w WWW: <http://www.bbrnetwork.com/downloads/brochures.html>.

- Materiały informacyjne firmy Bridon, *Bridon Structures Brochure*, katalog techniczny [online] [dostęp 22 marca 2014]. Dostępny w WWW: <http://bridon.co.nz/uploads/catalogues/structures.pdf>.
- Materiały informacyjne firmy Freyssinet (a), *Freyssinet HD Stay cables*, [online] [dostęp 22 marca 2014]. Dostępny w WWW: http://freyssinet.pl/images/stories/katalogi/49_HD_2000%20new%20logo%20low.pdf.
- Materiały informacyjne firmy Freyssinet (b), *H1000 Stay Cable System*, [online] [dostęp 22 marca 2014]. Dostępny w WWW: http://freyssinet.pl/images/stories/katalogi/39_H1000.pdf.
- Materiały informacyjne firmy Glassolutions (a), *Lite-Floor*, [online] [dostęp 22 marca 2014]. Dostępny w WWW: <http://www.glassolutions.at/de/produkte/sicherheit/litefloor/index.aspx>.
- Materiały informacyjne firmy Glassolutions (b), *Lite-Floor Xtreme*, [online] [dostęp 22 marca 2014]. Dostępny w WWW: <http://www.glassolutions.at/de/produkte/sicherheit/litefloor-xtreme/index.aspx>.
- Materiały informacyjne firmy Macalloy, *Systemy ciągnowe Macalloy*, [online] [dostęp 22 marca 2014]. Dostępny w WWW: <http://macalloy.com/broszury>.
- Materiały informacyjne firmy Toybo, *Pro fiber Zylon*, katalog techniczny [online] [dostęp 22 marca 2014]. Dostępny w WWW: http://www.toyobo-global.com/seihin/kc/pbo/Technical_Information_2005.pdf.
- Michelletti A., Williams W.O. (2004), *An evolutionary procedure for Form-finding for tensegrity structures*, Technical Report, Carnegie Millon University.
- Micheletti A., Williams W.O. (2007), *Shape-Change of Tensegrity Systems by Controlling Edg-Lengths*, [w] *Proceedings of IASS Symposium 2007, Shell and Spatial Structures, Structural Architecture, Toward the future looking to the past, 3–6 December 2007, Venice*.
- Micheletti A. (2012), *Modular Tensegrity Structures: The „Tor Vergata” Footbridge*, [w] M. Frémond, F. Maceri (eds), *Mechanics, Models and Methods in Civil Engineering*, vol. 61, Springer, Berlin-Heidelberg, pp. 375–384.
- Moored K.W., Bart-Smith H. (2009), *Investigation of clustered actuation in tensegrity structures*, „International Journal of Solids and Structures”, vol. 46, iss. 17, pp. 3272–3281.
- Motro R., (1984), *Forms and forces in tensegrity systems*, [w] H. Nooshin (ed.), *Proceedings of Third International Conference on Space Structures*, Elsevier, pp. 180–185.
- Motro R., Najari S., Jouanna P. (1986), *Static and dynamic analysis of tensegrity systems. Shell and spatial structures: computational aspects*, [w] *Proceedings of the International Symposium, July 1968*, pp. 270–278.
- Motro R. (1987), *Tensegrity systems for double layer spacestructures*, [w] H.V. Topping (ed.), *Proceedings of International Conference on the Design and Construction of Non-conventional Structures*, vol. 2, Civil-Comp Press, Edinburgh.
- Motro R. (2003), *Tensegrity. Structural Systems for the Future*, Kogan Page, London-Sterling.
- Motro R. (2009), *Structural morphology of tensegrity systems*, „Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)”, vol. 10, no. 1, pp. 1–19.
- Motro R. (2011), *Structural morphology of tensegrity systems*, „Meccanica”, vol. 46, iss. 1, pp. 27–40.
- Qing-shuai C., Zhi-hong Z. (2010), *A simplified strategy for force finding analysis of suspendomes*, „Engineering Structures”, vol. 32, iss. 1, pp. 306–318.
- Quirant J., Kazi-Aoual M.N., Motro R. (2003), *Designing tensegrity systems. The case of a double layer grid*, „Engineering Structures”, vol. 25, iss. 9, pp. 1121–1130.
- Pałkowski Sz. (1994), *Konstrukcje ciągnowe*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Paul Ch., Lipson H., Valero-Cuevas F. (2005), *Evolutionary Form-finding of tensegrity structures*, [w] *Proceedings of the 2005 Conference on Genetic and Evolutionary Computation*, Washington.

- Paul Ch., Valero-Cuevas F.J., Lipson H. (2006), *Design and control of tensegrity robots for locomotion*, „IEEE Transactions on Robotics”, vol. 22, iss. 5, 944–957.
- Pellegrino S., (1986), *Mechanics of Kinematically Indeterminate Structures*, Ph.D. Thesis, Cambridge.
- Pinaud J.-P., Solari S., Skelton R.E. (2004), *Deployment of a class 2 tensegrity boom*, [w] *Proceedings of SPIE, Smart Structures and Materials 2004*,”, vol. 5390: Flatau Alison B., *Smart Structures and Integrated Systems*, San Diego.
- PN-EN 1995-2, Eurokod 5: *Projektowanie konstrukcji drewnianych*, Część 2: *Mosty*.
- PN-EN 1993-1-1, Eurokod 3: *Projektowanie konstrukcji stalowych*, Część 1-1: *Reguły ogólne i reguły dla budynków*.
- PN-EN 1993-1-12, Eurokod 3: *Projektowanie konstrukcji stalowych*, Część 1-12: *Reguły dodatkowe rozszerzające zakres stosowania EN 1993 o gatunki stali wysokiej wytrzymałości do S 700 włącznie*.
- PN-85/S-10030, *Obiekty mostowe. Obciążenia*.
- Ponzi L. (2002), *Una passerella tensintegra nel campus di Tor Vergata*. Tese, Studio di fattibilità, Università degli studi di roma „Tor Vergata”, Facoltà di Ingegneria - Dipartimento di Ingegneria Civile.
- Pugh A. (1976), *An Introduction to Tensegrity*, University of California Press.
- Raducanu V. (2001), *Architecture et système constructif. Cas des systèmes de tensegrité*. Thèse, Université Montpellier II.
- Reiner M. (1958), *Reologia teoretyczna*, tł. Jan Szmelter, PWN, Warszawa.
- Rhode-Barbarigos L. et al. (2009), *Comparing two design strategies for tensegrity structures*, „Computing in Engineering”, pp. 226–233.
- Rhode-Barbarigos L. et al. (2010a), *Design of tensegrity structures using parametric analysis and stochastic search*, „Engineering with Computers”, vol. 26, iss. 2, pp. 193–203.
- Rhode-Barbarigos L. et al. (2010b), *Designing tensegrity modules for pedestrian bridges*, „Engineering Structures”, vol. 32, iss. 4, pp. 1158–1167.
- Rhode-Barbarigos L. (2012a), *An Active Deployable Tensegrity Structure*, Thèse, École polytechnique fédérale de Lausanne EPFL.
- Rhode-Barbarigos L., Motro René, Smith I.F.C. (2012b), *A transformable tensegrity-ring footbridge*, [w] *The IASS Annual Symposium: IASS-APCS*, Seoul.
- Rieffel J., Valero-Cuevas F., Lipson H. (2009), *Automated discovery and optimization of large irregular tensegrity structures*, „Computers & Structures”, vol. 87, iss. 5–6, pp. 368–379.
- Rutishauser H. (1970), *Simultaneous Iteration Method for Symmetric Matrices*, „Numerische Mathematik”, vol. 16, iss. 3, pp. 205–223.
- Sadao S. (1996), *Fuller on Tensegrity*, „International Journal of Space Structures”, vol. 11, nos 1–2, pp. 37–42.
- Schlaich M. (2004), *The Messeturm in Rostock. A Tensegrity Tower*, „Journal of the IASS”, vol. 45, No. 2, n. 145.
- Schek H. (1974), *The force density method for form finding and computation of general networks*, „Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering”, no. 3, pp. 115–134.
- Seiler Ch., Hüttner S. (2004), *Ein einheitliches Modell zur Beschreibung von Fußgängerlasten für verschiedene Bewegungsarten – Theorie, experimentelle Messungen und praktische Anwendung*, „Bauingenieur”, Ausgabe 11, S. 483–496.
- Shai O. et al. (2009), *Adjustable Tensegrity Robot Based on Assur Graph Principle*, [w] *ASME 2009 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Lake Buena Vista, Florida, USA, November 13–19, 2009*, vol. 10: *Mechanical Systems and Control, Parts A and B*, pp. 257–261.

- Shea K., Fest E., Smith I.F.C. (2002), *Developing intelligent tensegrity structures with stochastic search*, „Advanced Engineering Informatics”, vol. 16, iss. 1, pp. 21–40.
- Skelton R.E. et al. (2000), *An introduction to the mechanics of tensegrity structures*, [w] *Handbook on mechanical systems design*, CRC, Boca Raton.
- Skelton R.E., Mirats Tur J.M. (2009), *Nonlinear control of non-minimal tensegrity models*, [w] *CDC/CCC. Proceedings of the 48th IEEE Conference, 15–18 Dec. 2009*, pp. 6662–6667.
- Skelton R.E., Oliveira M.C. (2009a), *Tensegrity Systems*, Springer US, New York.
- Smith I.F.C. (2009), *Control enhancements of a biomimetic structure*, „ITcon”, vol. 14, Special Issue: *Next Generation Construction IT. Technology Foresight, Future Studies, Roadmapping, and Scenario Planning*, pp. 229–237.
- Snelson K. (1965), *Continuous tension, discontinuous compression structures*, U.S. Patent No. 3,169,611.
- Snelson K. (1996), *Snelson on the Tensegrity Invention*, „International Journal of Space Structures”, vol. 11, pp. 43–48.
- Soong T.T., Manolis G.D. (1987), *Active Structures*, „Journal of Structural Engineering”, vol. 113, iss. 11, pp. 2290–2302.
- Sultan C., Skelton R.E. (1998), *Tendon control deployment of tensegrity structures*, [w] *Proceedings of SPIE, Smart Structures and Materials 1998*, vol. 3323: V. Varadan, *Mathematics and Control in Smart Structures*, San Diego.
- Sultan C. (1999a), *Modeling, Design and Control of Tensegrity Structures with Applications*, Ph.D. Thesis, Purdue University.
- Sultan C., Corless M., Skelton R. E. (1999b), *Reduced prestressability conditions for tensegrity systems*, „International Journal Solids and Structures”, vol. 14, pp. 147–154.
- Sultan C., Skelton R.E. (2003), *Deployment of tensegrity structures*, „International Journal of Solids and Structures”, vol. 40, iss. 18, pp. 4637–4657.
- Szybiński J. (2013), *Konstrukcje Tensegrity w Budownictwie Mostowym*, „Mosty”, nr 1, ss. 46–50.
- Tibert G. (2002), *Deployable Tensegrity Structures for Space Applications*. Ph.D. Thesis, Royal Institute of Technology Department of Mechanics, Stockholm.
- Tibert A.G., Pellegrino S. (2003a), *Deployable Tensegrity Masts*, *Proceedings of the 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, [w] Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, 7–10 April 2003*, Norfolk.
- Tibert A.G., Pellegrino S. (2003b), *Review of Form-finding Methods for Tensegrity Structures*, „International Journal of Space Structures”, vol. 18, No. 4, pp. 209–223.
- Tilly G. P., Cullington D.W., Eyre R. (1984), *Dynamic behaviour of footbridges*, Wokingham, Berkshire.
- Tran H.Ch., Lee J. (2010), *Initial self-stress design of tensegrity grid structures*, „Computers & Structures”, vol. 88, iss. 9–10, pp. 558–566.
- Tran H.Ch., Lee J. (2011), *Determination of a unique configuration of free-form tensegrity structures*, „Acta Mechanica”, vol. 220, iss. 1–4, pp. 331–348.
- Vu K.K., Liew J.Y. Richard, Anandasivam Krishnapillai (2006) *Deployable tension-strut structures: from concept to implementation*, „Journal of Constructional Steel Research”, vol. 62, iss. 3, pp. 195–209.
- Wang B.-B. (1998), *Cable-Strut Systems: Part I – Tensegrity*, „Journal of Constructional Steel Research”, vol. 45, iss. 3, pp. 281–289.
- Wang B.-B., (2004), *Free-standing tension structures. From tensegrity systems to cable-strut systems*, Spon Press, New York.

- Wroldsen A.S. (2007), *Modelling and Control of Tensegrity Structures*, Ph.D. Thesis, Department of Marine Technology, Norwegian University of Science and Technology.
- Xu X., Luo Y. (2010), *Form-finding of nonregular tensegrities using a genetic algorithm*, „Mechanics Research Communications”, vol. 37, iss. 1, pp. 85–91.
- Yao J.T.P. (1972), *Concept of Structural Control*, „Journal of Structural Division” no. 98, pp. 1567–1574.
- Zhang J., Ohsaki M., Kanno Y. (2006), *A direct approach to design of geometry and forces of tensegrity systems*, „International Journal Solids and Structures”, vol. 43, iss. 7–8, pp. 2260–2278.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. (2000), *The finite Element Method, [w] The Basis*, vol. 1., Butterworth-Heinemann, New Jersey.
- Zobel H., Karwowski W. (2006), *Kompozyty polimerowe w mostownictwie. Pomosty wielowarstwowe*, „Geoinżynieria. Drogi, mosty, tunele”, nr 2, ss. 42–49.

Źródła fotografii – portale umożliwiające upublicznianie zdjęć:

Deviantart: <http://www.deviantart.com/>.

Flickr: <http://www.flickr.com/>.

Geograph: <http://www.geograph.org.uk/>.

Wikimedia Commons: <http://commons.wikimedia.org/>.

Licencje:

CC, Creative Common: <http://creativecommons.org/licenses/>.

OGL, Open Government Licence: <http://www.nationalarchives.gov.uk/doc/open-government-licence/>.

Spis tabel

Tab. 2.1 Wymogi definicji konstrukcji o cechach tensegrity	20
Tab. 4.1 Graniastosłup prawidłowy tensegrity – parametry modułu	55
Tab. 4.2 <i>Simplex</i> – stany samonapężenia konstrukcji	56
Tab. 4.3 Rozszerzony ośmiościan tensegrity – parametry modułu	58
Tab. 4.4 Dwudziestościan tensegrity – stany samonapężenia konstrukcji	59
Tab. 4.5 Czworościan ścięty tensegrity – parametry modułu	61
Tab. 4.6 Czworościan ścięty tensegrity – stany samonapężenia konstrukcji	62
Tab. 4.7 Sześćcio-ośmiościan tensegrity – parametry modułu	63
Tab. 4.8 Dwudziestościan tensegrity – stany samonapężenia konstrukcji	64
Tab. 4.9 <i>Simplex</i> – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 4	68
Tab. 4.10 <i>Simplex</i> – siły normalne wywołane obciążeniami zewnętrznymi bez wstępnego sprężenia	69
Tab. 4.11 <i>Simplex</i> – wpływ wstępnego sprężenia konstrukcji na przemieszczenia w zależności od wielkości obciążenia zewnętrznego	70
Tab. 4.12 Rozszerzony ośmiościan tensegrity – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 11	73
Tab. 4.13 Czworościan ścięty tensegrity – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 7	76
Tab. 4.14 Sześćcio-ośmiościan tensegrity – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 7	78
Tab. 6.1 Przykładowe systemy cięgien prętowych [na podstawie katalogów produktów i PN-EN 1993-1-1]	115
Tab. 6.2 Przykładowe systemy cięgien linowych [na podstawie katalogów produktów]	116
Tab. 6.3 Przykładowe systemy kabli z wiązki równoległych splotów [na podstawie katalogów produktów]	118
Tab. 6.4 Wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – słup z połączeniem węzeł-węzeł	135
Tab. 6.5 Wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – słup z połączeniem zastrzał-cięgno	137
Tab. 6.6 Siły normalne w konstrukcji w zależności od typu połączenia modułów rozszerzonego ośmiościanu tensegrity	142
Tab. 6.7 Przemieszczenie jednego z węzłów w środku przęsła konstrukcji z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity	143
Tab. 6.8 Siły normalne w konstrukcji z modułów rozszerzonego ośmiościanu tensegrity z płytą żelbetową	146
Tab. 6.9 Parametry elementów konstrukcyjnych zamodelowanej konstrukcji kładki o cechach tensegrity	147
Tab. 6.10 Wyniki obliczeń konstrukcji kładki o cechach tensegrity	148
Tab. 6.11 Siły normalne w konstrukcji ze zmodyfikowanych czterozastrzałowych modułów typu <i>simplex</i>	151
Tab. 6.12 Siły normalne w płycie Raducanu i Motro	152
Tab. 6.13 Słupy tensegrity: zestawienie charakterystyk dynamicznych	158
Tab. 6.14 Przęsło z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity „I typu”: zestawienie charakterystyk dynamicznych	161
Tab. 6.15 Przęsło z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity „II typu”: zestawienie charakterystyk dynamicznych	161
Tab. 6.16 Konstrukcja mostowa o cechach tensegrity: zestawienie charakterystyk dynamicznych	163
Tab. 7.1 Parametry modułów pierścieniowych i utworzonych z nich konstrukcji	186

Tab. 7.2 Parametry elementów konstrukcyjnych kładki Tor Vergata oraz ekstremalne wyniki w najbardziej wyciężonych elementach	192
Tab. 7.3 Przekroje elementów w modelu Kładki Kurilpa	204

Spis rysunków

Rys. 2.1 <i>Simplex</i> – rysunek z patentu K. Snelsona [Snelson: 1965]	14
Rys. 2.2 Przykład stanu samonapężenia w płaskiej kratownicy	17
Rys. 2.3 Dwudziestościan foremny i porównanie jego proporcji z dwudziestościanem foremnym tensegrity	21
Rys. 2.4 Wzór rombowy, ośmiościan foremny i powstały na jego podstawie <i>simplex</i>	22
Rys. 2.5 Wzór obwodowy, sześćo-ośmiościan i powstały na jego podstawie moduł tensegrity	22
Rys. 2.6 Wzór zygzakowany, czworościan ścięty i powstały na jego podstawie moduł tensegrity	22
Rys. 2.7 Dwuelementowa konstrukcja o cechach tensegrity	23
Rys. 2.8 Jednozastrzałowa płaska konstrukcja o cechach tensegrity	24
Rys. 2.9 Piętnaściozastrzałowy trójwarstwowy system obwodowy (moduł pierścieniowy o podstawie pięciokątnej – por. rys. 7.5)	24
Rys. 2.10 Przykłady wież tensegrity: Needle Tower, Waszyngton, Stany Zjednoczone [źródło: Flickr, autor: c_nilsen, licencja: CC BY-NC-SA 2.0], Wieża targowa, Rostock, Niemcy [źródło: Wikimedia Commons, autor: M. Meißer, licencja: CC BY-SA 3.0]	25
Rys. 2.11 Dach audytorium w Utica, Stany Zjednoczone [źródło: http://www.columbia.edu/cu/gsap/BT/BSI/TENSEGRI]	26
Rys. 2.12 Konstrukcja dachu Kraków Areny, Kraków [zdjęcie własne]	27
Rys. 2.13 Schemat kopuły Geigera	27
Rys. 2.14 Konstrukcja dachu „Spodka”, Katowice [źródło: http://joannanowicka.blogspot.com/ , autor: Mieczysław Migoń (dzięki uprzejmości Joanny Nowickiej)]	28
Rys. 2.15 Schemat kopuły Leviego na przykładzie <i>Georgia Dome</i>	28
Rys. 2.16 Dach stadionu miejskiego w La Placie, Argentyna [źródło: Flickr, autor: Gestión Abierta, licencja: CC BY-NC-SA 2.0]	29
Rys. 2.17 Przekrój poprzeczny Supersamu	29
Rys. 2.18 Schematy modułu i fragmentu konstrukcji projektu Kono: aksonometria i widok z góry	31
Rys. 2.19 Schematy fragmentów konstrukcji opisanych w [Quirant: 2003] i [Averseng: 2005]	31
Rys. 2.20 Schemat konstrukcji „Blur Building”	32
Rys. 2.21 Wnętrze budynku <i>White Rhino</i> , Chiba, Japonia [źródło: http://www.iis.u-tokyo.ac.jp/chiba_e.html]	33
Rys. 2.22 Propozycja wykorzystania tensegrity w przesyłowej sieci elektroenergetycznej (na podstawie: [Dalilsafaei: 2011])	34
Rys. 3.1 Graniastosłup o podstawie trójkątnej i kierunku obrotu górnej podstawy w procesie poszukiwania formy tensegrity w trójzastrzałowym module <i>simplex</i>	36

Rys. 3.2 Graniastosłup o podstawie trójkątnej i kierunek obrotu górnej podstawy w procesie poszukiwania formy tensegrity w trójzastrzałowym module <i>simplex</i>	37
Rys. 3.3 Zmodyfikowany rozszerzony ośmiościan tensegrity	39
Rys. 3.4 Poszukiwanie formy zmodyfikowanego rozszerzonego ośmiościanu tensegrity (przedstawiono wybrane siły w węzłach, pozostałe siły są symetryczne).....	40
Rys. 3.5 Kratownica złożona z dwóch prętów	50
Rys. 3.6 Kratownica złożona z dwóch prętów: Przypadek 1	51
Rys. 3.7 Kratownica złożona z dwóch prętów: Przypadek 1 – stan samonapężenia	51
Rys. 3.8 Kratownica złożona z dwóch prętów: Przypadek 3	52
Rys. 3.9 Kratownica złożona z dwóch prętów: Przypadek 3 – stan samonapężenia	53
Rys. 4.1 Graniastosłupy prawidłowe tensegrity o różnej liczbie zastrzałów	56
Rys. 4.2 Proces „rozszerzania” ośmiościanu.....	57
Rys. 4.3 Dalsze „rozsuwanie” ośmiościanu tensegrity	59
Rys. 4.4 Obrót trójkątów z ciągien – poszukiwanie formy ściętego czworościanu tensegrity.....	60
Rys. 4.5 <i>Simplex</i> – obciążenie statyczne i przemieszczenie pod jego wpływem – przypadek obciążenia pionowego	67
Rys. 4.6 <i>Simplex</i> – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 4	68
Rys. 4.7 <i>Simplex</i> – obciążenie statyczne i przemieszczenie pod jego wpływem – przypadek obciążenia poziomego w węźle nr 4.....	71
Rys. 4.8 <i>Simplex</i> – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia poziomego w węźle nr 4	72
Rys. 4.9 Rozszerzony ośmiościan tensegrity – obciążenie statyczne i przemieszczenie pod jego wpływem – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 11	73
Rys. 4.10 Rozszerzony ośmiościan tensegrity – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 11	74
Rys. 4.11 Rozszerzony ośmiościan tensegrity – obciążenie statyczne i przemieszczenie pod jego wpływem – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 6	75
Rys. 4.12 Czworościan ścięty tensegrity – obciążenie statyczne i przemieszczenie pod jego wpływem – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 7	76
Rys. 4.13 Czworościan ścięty tensegrity – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 7.....	77
Rys. 4.14 Sześćo-ośmiościan tensegrity – obciążenie statyczne i przemieszczenie pod jego wpływem – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 7	78
Rys. 4.15 Sześćo-ośmiościan tensegrity – wpływ sprężenia na przemieszczenia konstrukcji – przypadek obciążenia pionowego w węźle nr 7.....	79
Rys. 4.16 <i>Simplex</i> – pierwsza postać drgań własnych.....	81
Rys. 4.17 <i>Simplex</i> – wpływ sprężenia na pierwszą częstotliwość drgań własnych.....	82
Rys. 4.18 Rozszerzony ośmiościan tensegrity – pierwsza postać drgań własnych	83
Rys. 4.19 Rozszerzony ośmiościan tensegrity – wpływ sprężenia na pierwszą częstotliwość drgań własnych	83
Rys. 4.20 Czworościan ścięty tensegrity – siódma postać drgań własnych	84
Rys. 4.21 Czworościan ścięty tensegrity – wpływ sprężenia na pierwsze częstotliwości drgań własnych (konsekwentna macierz mas elementu).....	85

Rys. 4.22 Sześćcio-ośmiościan tensegrity – pierwsza postać drgań własnych	86
Rys. 4.23 Sześćcio-ośmiościan tensegrity – wpływ sprężenia na pierwszą częstotliwość drgań własnych	86
Rys. 4.24 <i>Simplex</i> – zależność między kwadratem pierwszej częstotliwości drgań własnych i siłą wstępnego sprężenia	87
Rys. 4.25 Tensegrity i kontinuum	89
Rys. 5.1 Wieża z modułów typu <i>simplex</i> – połączenie węzeł-węzeł	96
Rys. 5.2 Wieża Snelsona – połączenie zastrzał-cięgno	97
Rys. 5.3 Połączenie rozszerzonych ośmiościanów tensegrity	98
Rys. 5.4 Dodatkowe cięgna łączące moduły – I typ	99
Rys. 5.5 Połączenie modułów I typu – mechanizm infinitezymalny	100
Rys. 5.6 Dodatkowe cięgna łączące moduły – II typ	100
Rys. 5.7 Połączenie sześćcio-ośmiościanów tensegrity	102
Rys. 5.8 Wolna przestrzeń wewnątrz sześćcio-ośmiościanu tensegrity	103
Rys. 5.9 Zmodyfikowany, czterozastrzałowy moduł typu <i>simplex</i> do konstrukcji płytowych – aksonometria, widok z góry, widok z boku	104
Rys. 5.10 Płyta ze zmodyfikowanych, czterozastrzałowych modułów typu <i>simplex</i> – widok z góry, perspektywa	104
Rys. 5.11 Zmodyfikowany, trójzastrzałowy moduł typu <i>simplex</i> do konstrukcji płytowych – perspektywa, widok z góry, widok z boku	105
Rys. 5.12 Płyta ze zmodyfikowanych, trójzastrzałowych modułów typu <i>simplex</i> – widok z góry, perspektywa	105
Rys. 5.13 Płyta ze zmodyfikowanych, trójzastrzałowych modułów typu <i>simplex</i> bez dodatkowych cięgien – widok z góry, perspektywa.....	106
Rys. 5.14 Płyta ze zmodyfikowanych, trójzastrzałowych modułów typu <i>simplex</i> bez dodatkowych cięgien – postać mechanizmu infinitezymalnego	106
Rys. 5.15 Składowa komórka do konstrukcji płyty Raducanu i Motro.....	107
Rys. 5.16 Płyta zbudowana z modułów Raducanu i Motro – perspektywa	107
Rys. 5.17 Płyta zbudowana z modułów Raducanu i Motro – <i>self-stress</i>	108
Rys. 5.18 Płyta zbudowana z modułów Raducanu i Motro – mechanizm infinitezymalny	109
Rys. 5.19 Konstrukcja mostowa o cechach tensegrity – perspektywa, widok z góry, widok z boku.....	109
Rys. 6.1 Przykład zastosowania cięgien prętowych w budynku: system Detan [źródło: materiały informacyjne firmy Halfen]	113
Rys. 6.2 Przykład zastosowania cięgien prętowych w kładce nad ul. Żwirki i Wigury w Warszawie: system Macalloy 460 [zdjęcie własne].....	114
Rys. 6.3 Przykładowe przekroje lin spiralnych otwartych i zamkniętych [źródło: materiały informacyjne firmy Pfeifer]	115
Rys. 6.4 Przykładowe przekroje lin spiralnych o większych średnicach [źródło: materiały informacyjne firmy Pfeifer]	116
Rys. 6.5 Przykład zastosowania cięgien linowych Bridon LC: Most Fleher, Düsseldorf, Niemcy [źródło: Wikimedia Commons, autor: Christian Fu Mueller, licencja: CC BY 2.0].....	117
Rys. 6.6 Przykład zastosowania kabli z wiązek równoległych splotów Freyssinet HD: Wiadukt Millau, Millau, Francja [źródło: Flickr, autor: TijsB, licencja: CC BY-SA 2.0]	118

Rys. 6.7 Przekrój przez dziewiętnastosplotowy kabel firmy Freyssinet [źródło: materiały informacyjne firmy Freyssinet (a)].....	119
Rys. 6.8 Przykład zastosowania CFRP w cięgnach podwieszenia obiektu mostowego: Wiadukt Storchen, Winterhur, Szwajcaria [źródło: materiały informacyjne firmy BBR]	121
Rys. 6.9 Głowica widlasta systemu firmy Pfeifer [źródło: materiały informacyjne firmy Pfeifer]	122
Rys. 6.10 Przykłady zastosowań połączeń widlastych w obiektach mostowych (od lewej): kładka nad ul. Żwirki i Wigury w Warszawie [zdjęcie własne], Most Severn, Walia/Anglia (granica), Wielka Brytania [źródło: Flickr, autor: Nik Stanbridge, licencja: CC BY-NC-ND 2.0]	122
Rys. 6.11 Przekrój końcówki widlastej przy rurze ściskanej: system cięgnowy Detan [źródło: materiały informacyjne firmy Halfen]	123
Rys. 6.12 Przykład zastosowania połączeń widlastych elementów ściskanych w obiekcie mostowym: Kładka Helix, Marina Bay, Singapur [źródło: Flickr, autor: hj_west, licencja: CC BY-SA 2.0].....	123
Rys. 6.13 Przykłady połączenia wielu elementów w węźle pylonu (od lewej): Kładka Hungerford, Londyn, Wielka Brytania [źródło: Flickr, autor: Andy Schultz, licencja: CC BY-NC-SA 2.0], Kładka Uniwersytetu Nortumbrii, Newcastle, Wielka Brytania [źródło: Flickr, autor: Phil Thirkell, licencja: CC BY-NC 2.0].....	124
Rys. 6.14 Przykłady połączenia wielu elementów w węźle (od lewej): Kładka Hungerford, Londyn, Wielka Brytania [źródło: Flickr, autor: Bruno Girin, licencja: CC BY-SA 2.0], Budynek Królowej Wiktorii, Sydney, Australia [źródło: Deviantart, autor: Michael Domaradzki, licencja: CC BY-NC-SA 3.0]	125
Rys. 6.15 Węzły typu zastrzał-cięgno: Kładka Kurilpa, Brisbane, Australia [źródło: Wikimedia Commons, autor: Kgbo, licencja: CC BY-SA 3.0].....	126
Rys. 6.16 Przykład połączenia liny podwieszającej i liny nośnej w moście wiszącym: Kładka Herrenkrug, Magdeburg, Niemcy [źródło: materiały informacyjne firmy Pfeifer]	127
Rys. 6.17 Połączenie kabli dolnych dźwigara cięgnowego ze słupkiem (zastrzałem): Kraków Arena, Kraków, [zdjęcie własne].....	127
Rys. 6.18 Przykład oparcia pomostu na podwieszonych poprzecznicach: Kładka Łukowa Humber Bay, Toronto, Kanada [źródło: Wikimedia Commons, autor: Tudor Costache, licencja: CC BY-SA 3.0].....	128
Rys. 6.19 Zastosowanie tafli szklanych jako płyty pomostu przy małej rozpiętości podłużnic (od lewej): kładka w Banku Reiffeissen, Innsbruck, Austria, Grand Canyon Skywalk, Arizona, Stany Zjednoczone [źródło: materiały informacyjne firmy Glassolutions (a, b)].....	129
Rys. 6.20 Przykłady kotwienia cięgien (od lewej): Kładka Milenijna, Londyn, Wielka Brytania [źródło: Flickr, autor: Jeff Jenkins, licencja: CC BY-NC-ND 2.0], przekrój zakotwienia systemu HD [źródło: materiały informacyjne firmy Freyssinet (a)], zakotwienie w konstrukcji stalowej – Kraków Arena, Kraków [zdjęcie własne].....	130
Rys. 6.21 Fazy montażu cięgnowej konstrukcji dachowej (od lewej): montaż słupków przy wstępnym naciągu kabli głównych – znaczny zwis kabli, montaż płatwi przy pełnym naciągu kabli głównych, Kraków Arena, Kraków [zdjęcia własne]	132
Rys. 6.22 Wizualizacje modeli słupów	133
Rys. 6.23 Siły normalne w prętach od obciążeń obliczeniowych [kN] – słup z połączeniem węzeł-węzeł.....	134
Rys. 6.24 Siły normalne w prętach od obciążeń obliczeniowych [kN] – słup z połączeniem zastrzał-cięgno	136
Rys. 6.25 Wizualizacja modelu przęsła z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity – I typ	140
Rys. 6.26 Wizualizacja modelu przęsła z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity – II typ.....	140

Rys. 6.27 Wizualizacja ugięcia obu konstrukcji z modułów rozszerzonych ośmiościanów tensegrity (przemieszczenia zwiększone)	143
Rys. 6.28 Zmiana sposobu podparcia konstrukcji z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity	144
Rys. 6.29 Przykład konstrukcji wstęgowej: kładka pieszo-rowerowa im. Davida Kreitzera nad Jeziorem Hodges, Escondido, Stany Zjednoczone [źródło: http://www.djgreenephoto.com , autor: Don Greene, licencja: CC BY-NC 2.0]	145
Rys. 6.30 Wizualizacja modelu konstrukcji z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity ze współpracującą płytą żelbetową	145
Rys. 6.31 Wizualizacja modelu kładki o cechach tensegrity i występujących w niej przemieszczeń wywołanych charakterystyczną kombinacją obciążeń (przemieszczenia zwiększone)	147
Rys. 6.32 Siły normalne w elementach prętowych kładki o cechach tensegrity pod wpływem wstępnego sprężenia i ciężaru własnego konstrukcji (wartości w węzłach odnoszą się do cięgien poprzecznych)	147
Rys. 6.33 Wizualizacja przemieszczeń w kładce o cechach tensegrity pod wpływem niesymetrycznego obciążenia tłumem pieszych (przemieszczenia zwiększone)	149
Rys. 6.34 Wizualizacja modelu płyty ze zmodyfikowanych czterozastrzałowych modułów typu <i>simplex</i> i występujących w niej przemieszczeń wywołanych charakterystyczną kombinacją obciążeń (przemieszczenia zwiększone)	150
Rys. 6.35 Wizualizacja modelu płyty Raducanu i Motro oraz występujących w niej przemieszczeń wywołanych charakterystyczną kombinacją obciążeń (przemieszczenia zwiększone)	151
Rys. 6.36 Siły samonapężenia w elementach ciągnowych płyty Raducanu i Motro (dla czytelności na rysunku pominięto zastrzały)	151
Rys. 6.37 Słup z połączeniem węzeł-węzeł: pierwsza postać drgań (skrętna) $f = 1,05$ Hz (por. rys. 4.16), druga postać drgań (giętna) $f = 2,75$ Hz	158
Rys. 6.38 Słup z połączeniem zastrzał-ciężno: pierwsza postać drgań (skrętna) $f = 1,87$ Hz, druga postać drgań (giętna) $f = 2,22$ Hz	158
Rys. 6.39 Przęsło z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity „I typu”: pierwsze 6 postaci drgań własnych	160
Rys. 6.40 Przęsło z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity „II typu”: pierwsze 6 postaci drgań własnych	162
Rys. 6.41 Przęsło z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity „II typu” – zmieniony sposób podparcia: pierwsza postać drgań własnych (giętna) $f = 7,64$ Hz	163
Rys. 6.42 Konstrukcja mostowa o cechach tensegrity: pierwsze 6 postaci drgań własnych	164
Rys. 6.43 Płyta ze zmodyfikowanych modułów typu <i>simplex</i> : pierwsze postaci drgań własnych: giętna ($f = 17,75$ Hz) i skrętna ($f = 21,79$ Hz)	165
Rys. 6.44 Płyta Raducanu i Motro: pierwsze postaci drgań własnych: skrętna ($f = 25,06$ Hz) i giętna ($f = 27,96$ Hz)	165
Rys. 6.45 Przęsło z rozszerzonych ośmiościanów tensegrity „I typu”: przemieszczenia w środku przęsła pod wpływem pojedynczego pieszego idącego i biegnącego	167
Rys. 6.46 Kładka o cechach tensegrity: przemieszczenia węzłów w środku przekroju pod wpływem obciążenia idącym pieszym	168
Rys. 6.47 Kładka o cechach tensegrity: przemieszczenia węzłów w środku przekroju pod wpływem obciążenia biegnącym pieszym	168
Rys. 6.48 Konstrukcja z Politechniki Federalnej w Lozannie – widok z góry z zaznaczonymi punktami podparcia i kierunkami przesuwów, aksonometria pojedynczego modułu	174

Rys. 6.49 Przykład mobilnego wojskowego mostu tymczasowego konstrukcji nożycowej [źródło: http://www.defenceimagery.mod.uk/ , © Crown copyright 2006, licencja: OGL]	176
Rys. 6.50 Schemat rozwijania kładki o cechach tensegrity złożonej z modułów pierścieniowych opartych na pięciokącie	178
Rys. 7.1 Schemat statyczny kratownicy Finka.....	179
Rys. 7.2 Przykład konstrukcji quasi-tensegrity: Kładka Forthside, Stirling, Szkocja [(od lewej) źródło: Flickr, autor: SwaloPhoto, licencja: CC BY-NC 2.0; źródło: geograph, autor: Donald MacDonald, licencja: CC BY-SA 2.0].....	180
Rys. 7.3 Przykład konstrukcji quasi-tensegrity: kładka w Royal Victoria Dock, Londyn, Wielka Brytania [(od lewej) źródło: Flickr, autor: Liline, licencja: CC BY 2.0; źródło: geograph, autor: Richard Rogerson, licencja: CC BY-SA 2.0]	180
Rys. 7.4 Uproszczone: schemat statyczny i charakterystyczny przekrój poprzeczny kładki KL-03 nad trasą S-7 Salomea-Wolica wg [Markocki: 2011b] (różne skale)	180
Rys. 7.5 Uproszczony schemat budowy mostu quasi-tensegrity metodą wspornikową	181
Rys. 7.6 Moduły pierścieniowe o podstawach cztero-, pięcio- i sześciokątnej.....	183
Rys. 7.7 Schematyczny widok z boku i przekrój poprzeczny pomostu kładki złożonej z 4 modułów pierścieniowych o postawie pięciokątnej.....	184
Rys. 7.8 Elementy struktury z pięciokątnych modułów pierścieniowych: cięgna figur płaskich, cięgna zewnętrzne, podłużne i poprzeczne zastrzały.....	185
Rys. 7.9 Kładka z modułów pierścieniowych: pierwsze 3 postaci drgań własnych.....	188
Rys. 7.10 Schemat statyczny i charakterystyczny przekrój poprzeczny kładki Tor Vergata.....	189
Rys. 7.11 Kładka Tor Vergata: elementy składowe: zastrzały, cięgna modułów, cięgna podłużne, cięgna „X” i „V”	190
Rys. 7.12 Kładka Tor Vergata: moduł wyjściowy i wielokrotnie rozsunięty	190
Rys. 7.13 Kładka Tor Vergata: wizualizacja modelu obliczeniowego.....	191
Rys. 7.14 Kładka Tor Vergata: pierwsze 4 postaci drgań własnych	193
Rys. 7.15 Kładka Kurilpa, Brisbane, Australia [źródło: Flickr, autor: Andrew Sutherland, licencja: CC BY-SA 2.0]	194
Rys. 7.16 Otoczenie Kładki Kurilpa: Queensland Gallery of Modern Art [źródło: Flickr, autor: Wojtek Gurak, licencja: CC BY-NC 2.0]	195
Rys. 7.17a Kładka Kurilpa – części składowe: stalowe elementy pomostu (belki i poprzecznice), słupki główne i długie cięgna podwieszenia głównego	197
Rys. 7.17b Kładka Kurilpa – części składowe: słupki drugorzędne umieszczone w miejscach połączenia podwieszenia z pomostem.....	197
Rys. 7.17c Kładka Kurilpa – części składowe: cięgna podwieszenia drugorzędne	198
Rys. 7.17d Kładka Kurilpa – części składowe: zastrzały i cięgna (trzeciorzędne) je podwieszające	198
Rys. 7.17e Kładka Kurilpa – części składowe: cięgna (trzeciorzędne) łączące zastrzały i ostrosłupy podtrzymujące zadaszenie.....	198
Rys. 7.17f Kładka Kurilpa – cała struktura	199
Rys. 7.18 Kładka Kurilpa: montaż głównych słupków [źródło: Flickr, autor: Margaret Donald, licencja: CC BY-NC-ND 2.0].....	200
Rys. 7.19 Kładka Kurilpa: montaż słupków drugorzędnych [źródło: Flickr, autor: Margaret Donald, licencja: CC BY-NC-ND 2.0]	200

Rys. 7.20 Kładka Kurilpa: montaż zastrzałów poziomych i konstrukcji podtrzymującej zadaszenie [źródło: Flickr, autor: Margaret Donald, licencja: CC BY-NC-ND 2.0]	201
Rys. 7.21 Kładka Kurilpa: wizualizacja modelu obliczeniowego – widok z boku, widok z góry, przekrój poprzeczny	203
Rys. 7.22 Kładka Kurilpa: wizualizacja przemieszczeń węzłów modelu pod wpływem obciążeń bez i z uwzględnieniem wiatru (przemieszczenia zwiększone 50 razy)	203
Rys. 7.23 Kładka Kurilpa: 1, 3, 4 i 5 postaci drgań własnych	206