Numeryczna analiza rozkładu liczb naturalnych na określoną sumę liczb pierwszych

Świerczewski Ł.

Od blisko 200 lat matematycy poszukują odpowiedzi na pytanie zadane przez Christiana Goldbacha, który w 1742 roku zauważył, że liczby naturalne można przedstawić w postaci określonej sumy liczb pierwszych. Pomimo ciągłego rozwoju matematyki i pojawienia się całkowicie nowej dziedziny jaką jest informatyka do dnia dzisiejszego nie udało się rozwiązać wielu problemów z teorii liczb.

W teorii liczb znane są dwie wersje hipotezy Goldbacha. Pierwsza z nich mówi o możliwości zapisu każdej liczby parzystej większej od dwóch w postaci sumy dwóch liczb pierwszych (tzw. „mocna” hipoteza Goldbacha), a druga stwierdza możliwość zapisu każdej liczby nieparzystej większej od siedmiu w postaci sumy trzech liczb pierwszych (tzw. „słaba” hipoteza Goldbacha). Dla przykładu liczbę 9 możemy zaprezentować za pomocą sumy 3 + 3 + 3. Do spełnienia założeń hipotezy wystarczy odnaleźć jedną taką kombinację, lecz wszystkie większe liczby rozkładają się na znacznie większą ilość różnych kombinacji. Wzrost możliwości rozkładu przedstawia Rysunek 2.

Liczbę 29 możemy zaprezentować na siedem różnych sposobów:

29 = 3 + 3 + 23
29 = 3 + 7 + 19
29 = 3 + 13 + 13
29 = 5 + 5 + 19
29 = 5 + 7 + 17
29 = 5 + 11 + 13
29 = 7 + 11 + 11

Liczbę 31 przedstawimy na sześć możliwości:

31 = 3 + 5 + 23
31 = 3 + 11 + 17
31 = 5 + 7 + 19
31 = 5 + 13 + 13
31 = 7 + 7 + 17
31 = 7 + 11 +13

Liczbę 33 możemy przedstawić na osiem sposobów:

33 = 3 + 7 + 23
33 = 3 + 11 + 19
33 = 3 + 13 + 17
33 = 5 + 5 + 23
33 = 5 + 11 + 17
33 = 7 + 7 + 19
33 = 7 + 13 + 13
33 = 11 + 11 + 11

Ktoś mógłby powiedzieć, że im większa liczba tym więcej możliwości rozkładu jednak nie będzie to do końca prawdą. Analizując wyniki można dojść do wniosku, że określone liczby rozkładają się słabiej, a określone lepiej.

Przyjrzyjmy się poniższej tabeli:

Liczba	Ilość rozkładów	Liczba	Ilość rozkładów
195	72	205	95
197	101	207	85
199	93	209	110
201	81	211	100
203	106	213	95

Tabela 1. Wybrane liczby nieparzyste i ilość możliwości przedstawienia ich w postaci różnych sum trzech liczb pierwszych
Źródło: Badania własne

Jak widać nie tylko sam rozmiar liczby determinuje to na ile sposobów możemy ją zapisać jako sumę liczb pierwszych. Próby aproksymacji wielomianami drugiego stopnia z wykorzystaniem programu Statistica przyniosły dość ciekawy efekt jakim jest niżej przedstawiona funkcja:

$$f(x) \sim \begin{cases} 2\cdot10^{-5}\, x^2 + 0{,}7426\, x - 249{,}2182, & \text{gdy } 3 \mid x \text{ i } 5 \mid x \text{ i } 7 \mid x \\ 2\cdot10^{-5}\, x^2 + 0{,}7826\, x - 248{,}9361, & \text{gdy } 3 \mid x \text{ i } 5 \mid x \text{ i } 7 \nmid x \\ 2\cdot10^{-5}\, x^2 + 0{,}8162\, x - 261{,}3085, & \text{gdy } 3 \mid x \text{ i } 5 \nmid x \text{ i } 7 \mid x \\ 2\cdot10^{-5}\, x^2 + 0{,}8435\, x - 277{,}3834, & \text{gdy } 3 \mid x \text{ i } 5 \nmid x \text{ i } 7 \nmid x \\ 2\cdot10^{-5}\, x^2 + 1{,}0978\, x - 383{,}6931, & \text{gdy } 3 \nmid x \text{ i } 5 \mid x \text{ i } 7 \mid x \\ 2\cdot10^{-5}\, x^2 + 1{,}1442\, x - 409{,}4724, & \text{gdy } 3 \nmid x \text{ i } 5 \mid x \text{ i } 7 \nmid x \\ 2\cdot10^{-5}\, x^2 + 1{,}2183\, x - 439{,}6678, & \text{gdy } 3 \nmid x \text{ i } 5 \nmid x \text{ i } 7 \nmid x \end{cases}$$

$a \mid b$ – a dzieli bez reszty b
$a \nmid b$ - a nie dzieli bez reszty b

Wzór funkcji 1. Funkcja aproksymująca ilość możliwych, różnych zapisów liczby nieparzystej w postaci sumy trzech liczb pierwszych
Źródło: Badania własne

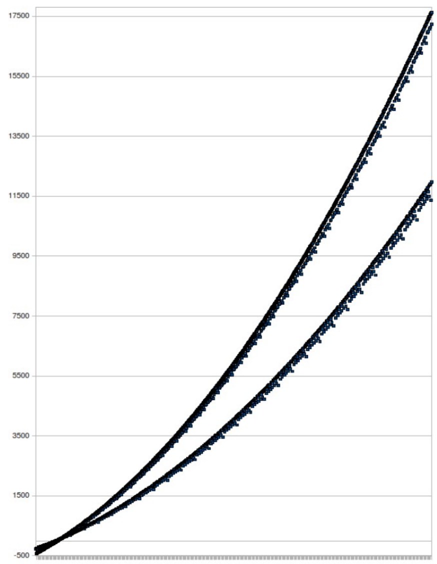
Jak widać bardzo dobrze udało się wydzielić siedem charakterystycznych grup i wykonać dla nich niezależną aproksymację, dzięki czemu uzyskano dość dobrą precyzję przybliżeń.

x	g(x)	f(x)	Błąd bezwzględny	Błąd względny
807	574	533,57	40,43	7,04340%
813	577	540,58	36,42	6,31267%
831	588	561,68	26,32	4,47665%
837	601	568,74	32,26	5,36774%
843	632	575,82	56,18	8,88973%
849	605	582,91	22,09	3,65152%
867	626	604,27	21,73	3,47142%
873	657	611,42	45,58	6,93791%
879	638	618,58	19,42	3,04368%
891	650	632,95	17,05	2,62288%
897	666	640,16	25,84	3,88020%
909	660	654,61	5,39	0,81602%
921	689	669,13	19,87	2,88414%

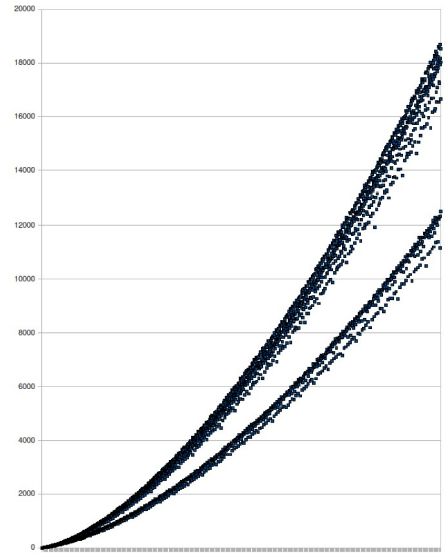
Tabela 2. Błąd uzyskiwany przy stosowaniu funkcji przybliżającej
Źródło: Badania własne

Podczas analizy wygenerowanych wykresów można zauważyć charakterystyczne, określonej postaci liczby, które w pewnym okresie przyjmują wartości znacznie większe (rozkład na sumę trzech liczb pierwszych) lub mniejsze (rozkład na sumę dwóch liczb pierwszych) od pozostałych. Pierwszy z przypadków można zaobserwować na rysunkach numer: 3, 4 i 5, a drugi odpowiada rysunkom 6 oraz 7.

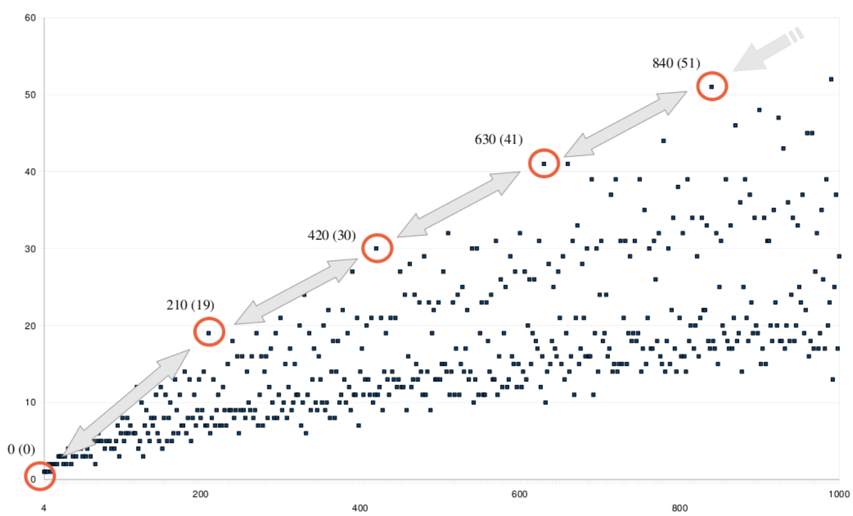
W przypadku wykresów dla uproszczenia przyjęto, że f(x) określa funkcję która zwraca ilość możliwych kombinacji zapisu danej liczby parzystej na sumę dwóch liczb pierwszych, a g(x) liczb nieparzystych na sumę trzech liczb pierwszych.



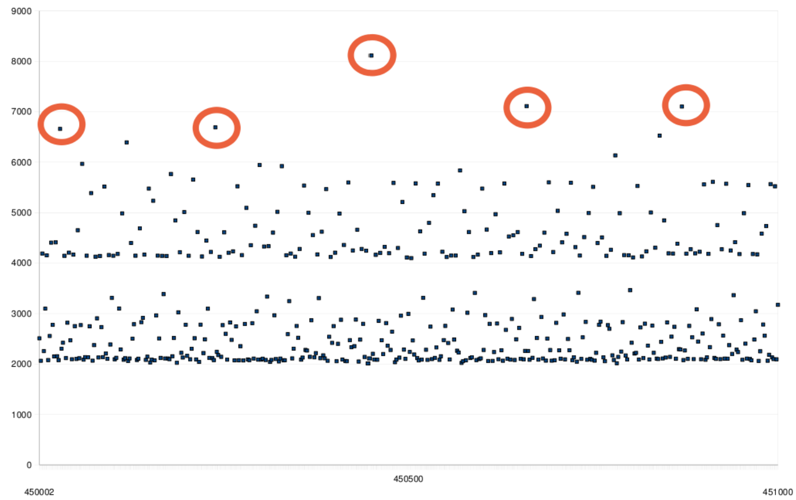
Rysunek 1. Wykres funkcji uzyskanej dzięki aproksymacji.
Źródło: Badania własne



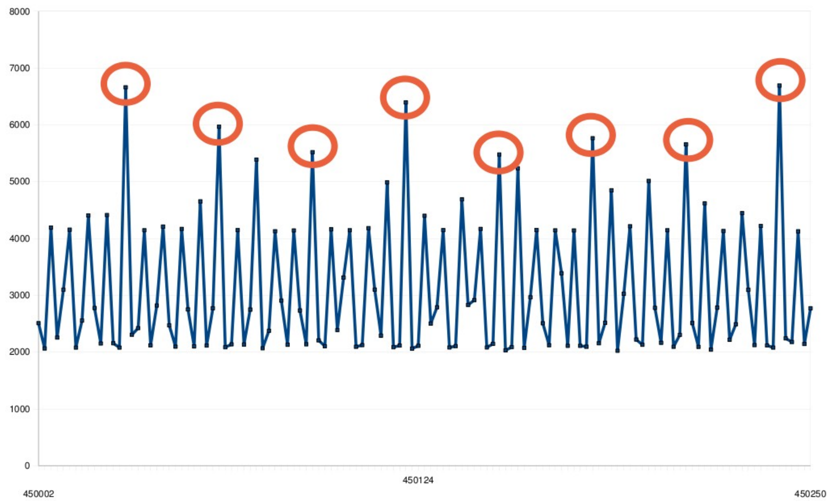
Rysunek 2. Wykres funkcji rzeczywistej określającej wzrost możliwości rozkładu liczb nieparzystych na sumę trzech liczb pierwszych.
Źródło: Badania własne



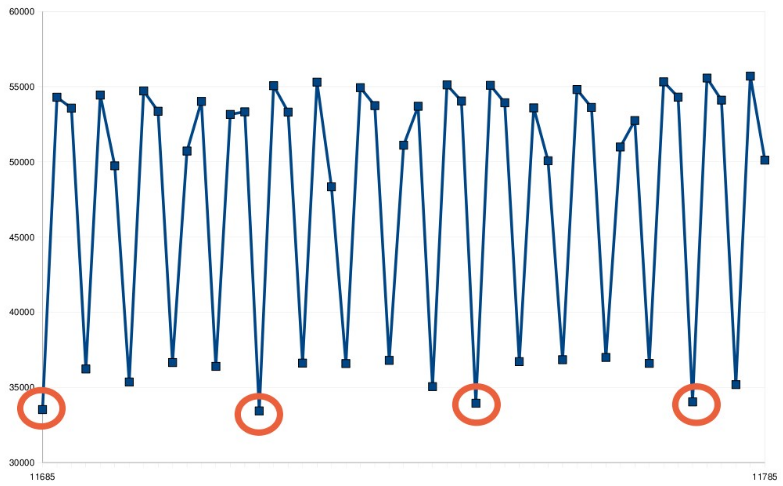
Rysunek 3. Wykres funkcji rzeczywistej określającej wzrost możliwości rozkładu liczb parzystych na sumę dwóch liczb pierwszych
Źródło: Badania własne



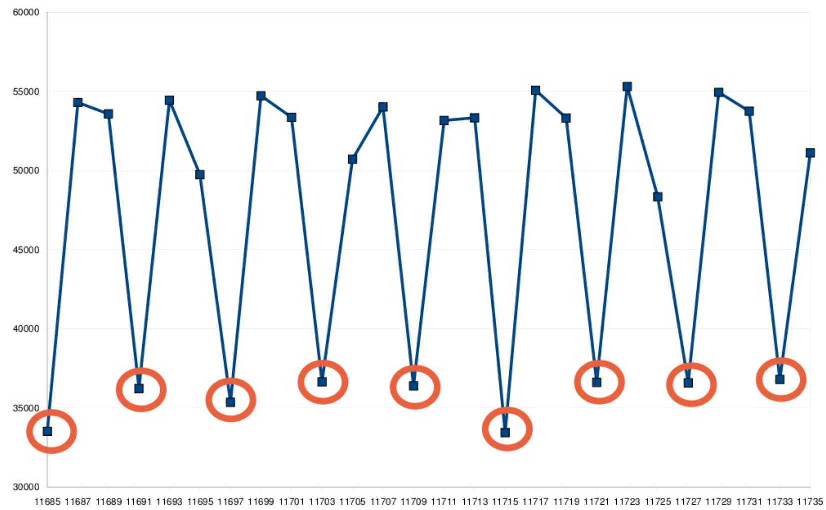
Rysunek 4. Charakterystyczne punkty, w których funkcja f(x) przyjmuje zauważalnie największe wartości. Badany zakres: [450 002, 451 000]
Źródło: Badania własne



Rysunek 5. Charakterystyczne punkty, w których funkcja f(x) przyjmuje zauważalnie największe wartości. Badany zakres: [450 002, 450 250]
Źródło: Badania własne



Rysunek 6. Charakterystyczne punkty, w których funkcja g(x) przyjmuje zauważalnie najmniejsze wartości. Badany zakres: [11 685, 11 785]
Źródło: Badania własne



Rysunek 7. Charakterystyczne punkty, w których funkcja g(x) przyjmuje zauważalnie najmniejsze wartości. Badany zakres: [11 685, 11 735]
Źródło: Badania własne

Streszczenie

W artykule poruszono problematykę hipotezy Goldbacha. Autor postanowił zbadać jeden z najsłynniejszych problemów teorii liczb. Komputerowej analizie została poddana zarówno oryginalna wersja hipotezy Goldbacha mówiąca o możliwości rozkładu wszystkich liczb parzystych większych od dwóch na sumę dwóch liczb pierwszych , jak i tak zwana „słaba” hipoteza Goldbacha postulująca rozkład liczb nieparzystych na sumę trzech liczb pierwszych. Głównym zadaniem było poszukiwanie odpowiedzi na pytania: „Czy w sposób efektywny można przewidywać ilość możliwych różnych rozkładów na daną sumę liczb pierwszych określonej liczby naturalnej?”, „Jaka jest złożoność obliczeniowa algorytmów analizujących tego typu problemy?”. Do obliczeń numerycznych wykorzystano środowisko programistyczne języka C, a ostatecznie także pakiet matematyczny Statistica, który umożliwił aproksymację określonych funkcji.

Abstract

The article mentions the issue of Goldbach’s hypothesis. The author decided to study one of the most common problems within the number theory. Computer analysis covered both the original version of Goldbach’s hypothesis stating the possibility of dividing all even numbers bigger than two into a sum of two prime numbers, as well as the so-called “weak” Goldbach’s hypothesis postulating the division of odd numbers into a sum of three prime numbers. The main aim was to find an answer for the following questions: “Can we effectively anticipate the amount of possible various divisions into the given sum of prime numbers of the determined natural numbers?”, “What is the computational complexity of algorithms analysing these types of issues?”. C language programme environment was used to perform numerical calculations, and finally also the Statistica mathematical packet, which enabled approximation of determined functions, was used.

Bibliografia

Wacław Marzantowicz, Piotr Zarzycki, Elementarna teoria liczb, Wydawnictwo PWN, Warszawa 2006
Yan Song Y., Teoria liczb w informatyce, Wydawnictwo PWN, Warszawa 2006

Nota o autorze

Łukasz Świerczewski, Instytut Informatyki i Automatyki, Państwowa Wyższa Szkoła Informatyki i Przedsiębiorczości w Łomży. Zainteresowania to głównie programowanie równoległe i matematyka teoretyczna. Strona internetowa: www.goldbach.pl/~lswierczewski email: lswierczewski@pwsip.edu.pl