

POLSKA AKADEMIA NAUK
Komitet Elektroniki i Telekomunikacji
INSTYTUT ŁĄCZNOŚCI

przy współudziale:

POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
ZJEDNOCZENIA PRZEMYSŁU PODZESPOŁÓW
I MATERIAŁÓW PÓLPRZEWODNIKOWYCH
UNITRA-ELEKTRON
STOWARZYSZENIA ELEKTRYKÓW POLSKICH
WOJSKOWEJ AKADEMII TECHNICZNEJ
POLSKIEJ SEKCJI IEEE

II Krajowe Sympozjum
ŚWIATŁOWODY
I ICH ZASTOSOWANIA

zorganizowane pod protektoratem
Prof. dra Edwarda Kowalczyka
Ministra Łączności

Jabłonna, 13-15 luty 1979

CENTRUM NAUKOWO-PRODUKCYJNE TECHNIKI
RADIA I TELEWIZJI
1979

Ryszard Romaniuk
Instytut Podstaw Elektroniki
Politechniki Warszawskiej

ANALITYCZNY MODEL DYSPERSJI W IDEALNYM WIELOMODOWYM
ŚWIATŁOWODZIE WŁÓKNISTYM

Szybki rozwój telekomunikacji optycznej wiąże się z rozwojem techniki laserowej [1], [4] i technologią szklanych światłowodów włóknistych [2]. Telekomunikacja światłowodowa [3] jest częścią trzech dziedzin: techniki światłowodowej, optoelektroniki oraz optyki zintegrowanej. W skład traktu telekomunikacji światłowodowej wchodzi trzy główne elementy: nadajnik optyczny, światłowod i odbiornik optyczny. Lasery półprzewodnikowe i diody elektroluminescencyjne stanowią dogodne źródła energii w nadajniku, a włókna szklane są doskonałym ośrodkiem transmisyjnym.

Warunki, jakie stawia się ośrodkowi transmisyjnemu, wynikają z zadań traktu, czyli: rodzaju informacji, sposobu jej obróbki i przesyłania oraz parametrów nadajnika i odbiornika, a także z ograniczeń narzucanych przez sam ośrodek transmisyjny. Podstawowe parametry transmisyjne światłowodów to tłumienność i własności dyspersyjne. Wielkości te określają dwa ograniczenia, jakim podlega transmisja światłowodowa.

Tłumienność zależy od wielu czynników, takich jak [2]:

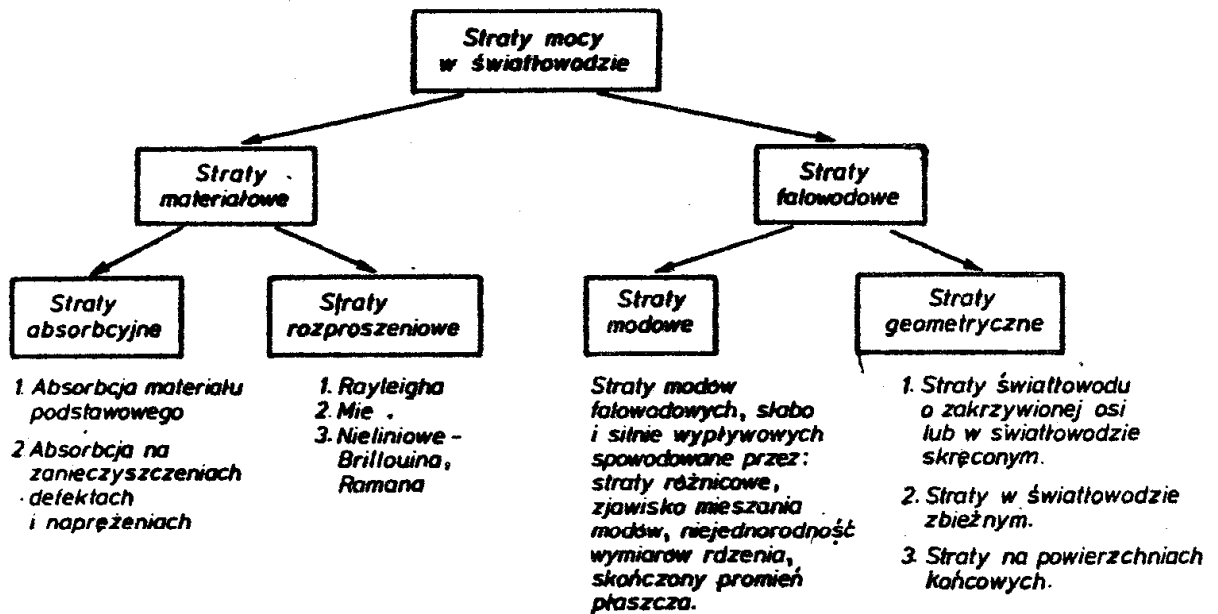
rodzaj szkła na rdzeń i płaszcz, użyte domieszki i modyfikatory, stan czystości substratów wyjściowych, technologia przygotowania masy szklanej, sposób wyciągania włókna, wymiary włókna i ich stabilność, struktura powierzchni granicznej rdzeń-płaszcz, rozkład współczynnika załamania w przekroju poprzecznym światłowodu, naprężenia wewnętrzne wywołane obróbką termiczną i siłami zewnętrznymi, sposób zabezpieczenia włókna i umieszczenia go w kablu. Ze względu na mechanizm zachodzenia straty mocy można sklasyfikować jak na rys. 1.

Parametry dyspersyjne światłowodu określają zniekształcenia fazowe przy transmisji sygnału analogowego lub zniekształcenie kształtu impulsu (rozszerzenie, zniekształcenie grzbietu) podczas transmisji sygnału cyfrowego. Wymienione zjawiska wywołane są zarówno przez materiał światłowodu, jak również przez strukturę modową falowodu, dlatego też ogólnie dzielimy procesy dyspersyjne na materiałowe i falowodowe. Dyspersja obliczana jest w jednostkach czasu na jednostkę długości toru i wyrażana najczęściej w ns/km.

W światłowodzie, w którym fala elektromagnetyczna rozprzestrzenia się w postaci wielu rodzajów (modów), dominującym typem dyspersji jest dyspersja międzymodowa, wywołana przez różny czas transmisji poszczególnych modów. W światłowodach wielomodowych o skokowym profilu współczynnika załamania światła, zniekształcenia tego typu ograniczają dopuszczalne pasmo modulacyjne do kilkunastu MHz/km przy transmisji analogowej. Szerokość impulsu wzrasta w tych warunkach nawet do 50ns/km [3].

Najmniejszą dyspersję, czyli najmniejsze zniekształce-

nie sygnału transmitowanego osiąga się we włóknach przenoszących jedynie mod podstawowy. Takie światłowody jednomodowe można uzyskać przez wykonanie rdzenia o bardzo małych rozmiarach, rzędu 3-5 μm , albo sprowadzając względną różnicę



Rys. 1. Straty mocy w światłowodzie

współczynników załamania w płaszczy i rdzeniu $\Delta = (n_1 - n_2) / n_1$ do bardzo małych wartości, rzędu 0,01% [2]. Przy pracy ze światłowodami jednomodowymi występuje kilka poważnych trudności. Światłowody o małych rozmiarach rdzenia jest bardzo trudno sprząć ze źródłem oraz między sobą. Z drugiej strony wraz ze zmniejszaniem się wartości Δ , wzrastają straty wywołwane zagięciem lub skręceniem włókna. Są to istotne powody, na skutek których w obecnej generacji telekomunikacji światłowodowej wykorzystuje się prawie wyłącznie włókna wielomodowe, mimo że ich parametry transmisyjne są gorsze [2].

Część I

DYSPERSYJNY MODOWY WSPÓLCZYNNIK ZAŁAMANIA

1. WPROWADZENIE

Metody opisu zjawisk dyspersji w szklanym światłowodzie włóknistym można podzielić na kilka głównych grup:

- metody korzystające z praw optyki falowej [13],
- metody optyki geometrycznej, bazujące na równaniu eikonału [1], [4],
- metody pasmowe, badające transmitancję światłowodu jako biernego układu dolnoprzepustowego [5], [11], [7],
- metody impulsowe, dualne do metod pasmowych, opisujące propagację impulsu poprzez światłowód [8], [14], [15], [16],
- metody "falogodowe", rozpatrujące wpływ struktury przewodnicy falowej na dyspersję [3.II],
- metody modelowe.

Stosowanie różnych metod badania dyspersji prowadzi często do różnych wyników [3], [6], [10], [12], gdyż stosowane modele światłowodów /każda metoda bazuje na odrębnym modelu falowodu/ nie tworzą modelu jednorodnego i całkowitego, modelu, w którym poszczególne submodele uzupełniają się lub są ściśle powiązanymi uproszczeniami.

Często również wyniki teoretyczne nie tylko nie są zgod-

ne z wynikami eksperymentalnymi, ale wręcz wykazują sprzeczność [6], [15]. Na ogół jednak występuje zgodność jakościowa, a brak zgodności ilościowej wyjaśnia się w oparciu o analizę błędów wprowadzanych przez układ pomiarowy. Przy pomiarze dyspersji w różnych układach pomiarowych istotnym problemem staje się wiarygodność wyników, a także ich powtarzalność. Pewnym, częściowym rozwiązaniem tego zagadnienia jest przeprowadzanie pomiarów jednej próbki światłowodów w wielu laboratoriach, porównywanie wyników, analiza różnic i powiązanie tych różnic z różnicami występującymi w układach pomiarowych stosowanych w poszczególnych laboratoriach.

W pracy niniejszej podjęto próbę ujednoczenia opisu dyspersji falowej, wyprowadzając ten opis ze zjawisk propagacji mocy modowej w falowodzie. Zasadniczym celem pracy jest próba utworzenia jednorodnego i jak najbardziej całkowitego modelu procesów dyspersyjnych w wielomodowym, szklanym światłowodzie włóknistym. Dodatkowym celem jest uzyskanie wyników analizy w wystarczająco zamkniętej i prostej postaci, aby możliwe było ich bezpośrednio, praktyczne wykorzystanie w optymalizacji dyspersyjnej produkowanych obecnie światłowodów do celów telekomunikacyjnych.

2. ŚWIATŁOWÓD IDEALNY

Rozważmy cylindryczny światłowod włóknisty o następujących założeniach idealizujących:

- a) Założenie wielomodowości. Włókno propaguje bardzo dużą liczbę modów i można przyjąć, że liczby modowe azymutalna i radialna m, l są wielkościami ciągłymi /a nie jak w rzeczywistości dyskretnymi/,

- b) Założenie stosowalności optyki geometrycznej. Zmiana współczynnika załamania w przekroju poprzecznym włókna /profil włókna/ jest bardzo mała na drodze λ - odpowiadającej długości fali propagowanej w światłowodzie. Warunek ten jest równoważny stosowalności w światłowodzie praw optyki geometrycznej lub metody WKB pierwszego rzędu.
- c) Założenie idealizacji modowej światłowodu. Ma ono na celu wyeliminowanie wpływu innych czynników na odpowiedź impulsową włókna, takich jak: warunki pobudzania modów, różnice strat modowych, mieszanie modów. Zakłada się więc: jednakowe straty modowe, niewystępowanie mieszania modów /czyli każdy mod niesie równą ilość energii do końca włókna/, równe i równoczesne pobudzenie wszystkich modów we włóknie.
- d) Założenie warunku słabej propagacji. Ma ono postać $n_1 \approx n_2$ gdzie n_1, n_2 - współczynniki załamania rdzenia i płaszczka światłowodu, i pozwala na przybliżenie pola elektromagnetycznego w światłowodzie przez pole TEM oraz przyjęcie modów za liniowo spolaryzowane [13].

Wprowadźmy następujące parametry pomocnicze: u, w - argumenty funkcji Bessela i Hankela, będące rozwiązaniami falowymi dla światłowodu, V - częstotliwość znormalizowana, b - znormalizowana modowa stała propagacji, NA - apertura numeryczna światłowodu, Δ - względna różnica współczynników załamania rdzenia i płaszczka, k_i - liczba falowa, v_g - prędkość grupowa, $\tilde{\tau}_g$ - znormalizowane względem jednostkowej długości światłowodu opóźnienia grupowe, \bar{n}^2 - dys-

persyjny modowy współczynnik załamania, n - modowy efektywny współczynnik załamania, N - grupowy współczynnik załamania, zdefiniowane w następujący sposób:

$$u^2 = a^2(k_1^2 - \beta^2); \quad w^2 = a^2(\beta^2 - k_2^2);$$

$$V^2 = u^2 + w^2 = akNA = ak_2 \sqrt{(2 - \Delta)\Delta};$$

$$k_i = n_i \cdot k; \quad b = \frac{w^2}{V^2} = \frac{\beta^2/k^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \approx \frac{n - n_2}{n_1 - n_2}; \quad (1)$$

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}; \quad V_g = \frac{d\omega}{d\beta};$$

$$\tilde{\tau}_g = \frac{d\beta}{cdk}; \quad \bar{n}^2 = nN = \frac{\beta}{k} \cdot \frac{d\beta}{dk};$$

$$N = \frac{dkn}{dk} = n + k \frac{dn}{dk} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda};$$

W ogólnym przypadku, gdy obowiązują założenia a, b, c, dyspersja materiałowa oraz charakterystyki falowodowe wpływają na opóźnienie grupowe i na dyspersję stałej propagacji β w złożony sposób. Należy dokonać więc podziału zjawisk dyspersji. Ze względu na mechanizm zachodzenia wyróżnić można następujące składowe:

- a) dyspersja materiałowa - wynikająca z naturalnych własności dyspersyjnych materiału światłowodu, a której względne znaczenie zależy od szerokości spektralnej źródła pobudzającego światłowód,
- b) dyspersja falowodowa - która zawiera dwa różne składniki:
 - dyspersję wewnątrzmodową /zwaną też modową/ - wynikającą z zależności $\tilde{\tau}_g(\lambda)$ dla indywidualnego modu. Dyspersja ta

jest przedmiotem niniejszej pracy,

- dyspersję międzymodową - wynikającą z istnienia niezerowego opóźnienia różnicowego $\Delta \tau_g$ między różnymi modami propagowanymi w światłowodzie wielomodowym.

3. DISPERSYJNY MODOWY WSPÓLCZYNNIK ZAŁAMANIA

3.1. Metoda falowa

Wyznaczamy dyspersyjny modowy współczynnik załamania, zdefiniowany we wzorze (1), z równania Helmholtza zapisanego dla współrzędnych cylindrycznych:

$$(\nabla_p^2 - \beta^2 + \frac{\omega^2}{v^2(r)}) \psi = 0 \quad (2)$$

gdzie: $\omega = 2\pi f$, v - prędkość fali elektromagnetycznej w falowodzie, $\psi = \psi(r)$, ∇_p^2 - laplasjan "poprzeczny"

Równanie (2) można zapisać w postaci:

$$(\nabla_p^2 - \beta^2) \psi = \frac{-\omega^2}{v^2(r)} \psi \quad (3)$$

Zapisując równanie Helmholtza dla funkcji sprzężonej ψ^* , mnożąc obustronnie obie postacie równania odpowiednio przez ψ i ψ^* oraz dodając do siebie, otrzymano:

$$\psi^* \nabla_p^2 \psi + \psi \nabla_p^2 \psi^* + 2(k^2 n^2(r) - \beta^2) |\psi|^2 = 0$$

Korzystając z następującego przekształcenia:

$$\nabla^2 |\psi|^2 = \nabla^2 (\psi \psi^*) = \psi \nabla^2 \psi^* + \psi^* \nabla^2 \psi + 2 \nabla \psi \nabla \psi^*$$

otrzymuje się postać równoważną do (3) (2):

$$|\nabla_p \psi|^2 + \beta^2 |\psi|^2 = \omega^2 \frac{|\psi|^2}{v^2(r)} \quad (4)$$

jeśli spełnione jest $\Delta^2 |\psi|^2 = 0$, co zachodzi, gdy gęstość mocy jest funkcją harmoniczną, czyli jest jednoznacznie określona w falowodzie przez swoje wartości na granicy rdzeń - płaszcz.

Z tej postaci, całkując (4) obustronnie względem współrzędnej r , a następnie różniczkując względem β i zapisując kwadrat modułu $|\Psi|^2$ jako gęstość mocy $p(r)$, otrzymuje się dla cylindrycznego falowodu gradientowego:

$$\bar{n}^2 = \frac{\int_0^{\infty} p(r) n^2(r) r dr}{\int_0^{\infty} p(r) r dr} \quad (5)$$

Wzór ten posiada postać zgodną z twierdzeniem o całkowitej uogólnionej wartości średniej, stąd bierze się oznaczenie dyspersyjnego modowego współczynnika załamania jako wartości średniokwadratowej.

3.2. Metoda promieniowa

Wyznaczamy dyspersyjny modowy współczynnik załamania z równania promienia na płaszczyźnie.

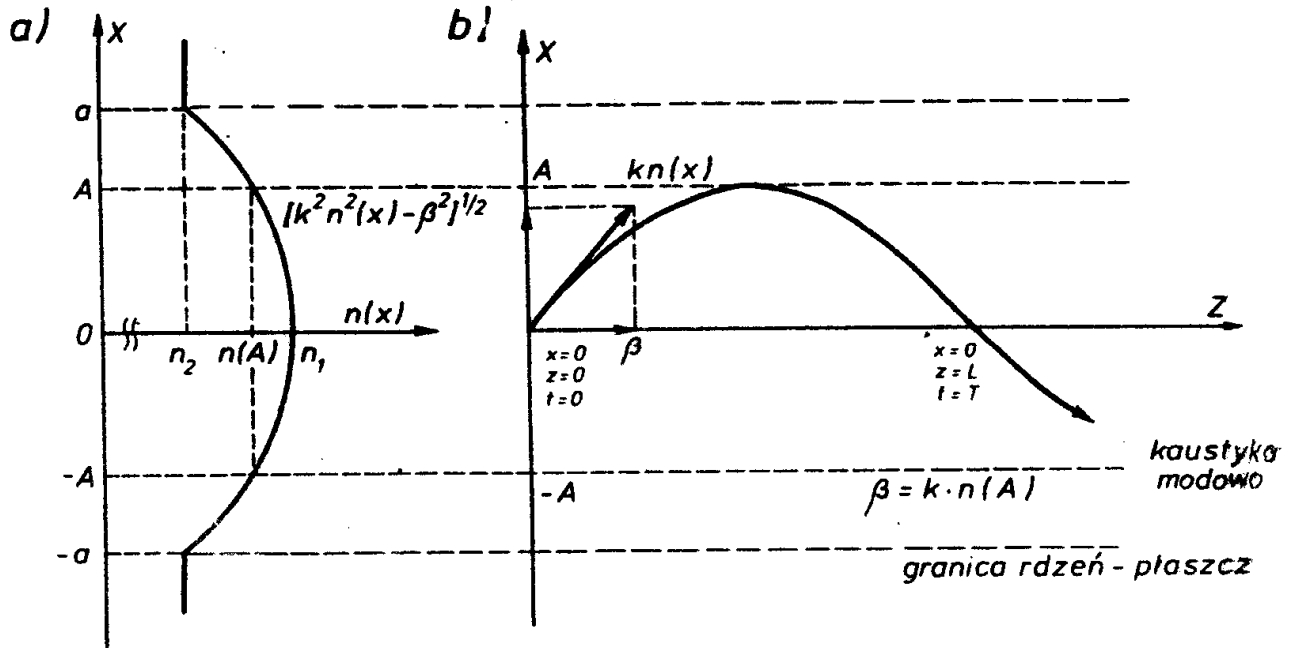
$$\rho = \frac{dx}{dz} = \operatorname{tg} \theta = \frac{[k^2 n^2(x) - \beta^2]^{1/2}}{\beta} \quad (6)$$

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\rho} \quad (7)$$

$$n(x) = \begin{cases} n_1 \left(1 - \frac{1}{2} g(x)\right) & x < a \\ n_2 & x > a \end{cases} \quad (8)$$

$$0 \leq g(x) \ll 1; \quad \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \geq 0; \quad g(x) = g(-x);$$

$$g(0) = 0$$



Rys.1. a/ Rozkład współczynnika załamania światła w przekroju poprzecznym falowodu,
 b/ kształt toru promienia w światłowodzie rozwiązany

Z rys. 1 można wyznaczyć prędkość grupową i dyspersyjny mody współczynnik załamania światła [9]:

$$V_g = \frac{L}{T}; \quad \bar{n}^2 = \frac{cT\beta}{kL} \quad (9)$$

$$L = \int_0^A c \operatorname{ctg} \theta dx = \int_0^A \beta [k^2 n^2(x) - \beta^2]^{-1/2} dx \quad (10)$$

$$T = \int_0^A \frac{dx}{v(x) \sin \theta} = \int_0^A \frac{kn(x)/\omega}{\sin \theta} dx = \int_0^A \frac{k^2 n^2(x)}{\omega} [k^2 n^2(x) - \beta^2]^{-1/2} dx \quad (11)$$

Ze wzorów (10) i (11) otrzymuje się:

$$\bar{n}^2 = \frac{\int_0^A n^2(x) [k^2 n^2(x) - \beta^2]^{-1/2} dx}{\int_0^A [k^2 n^2(x) - \beta^2]^{-1/2} dx} \quad (12)$$

a więc postać analogiczną do (5).

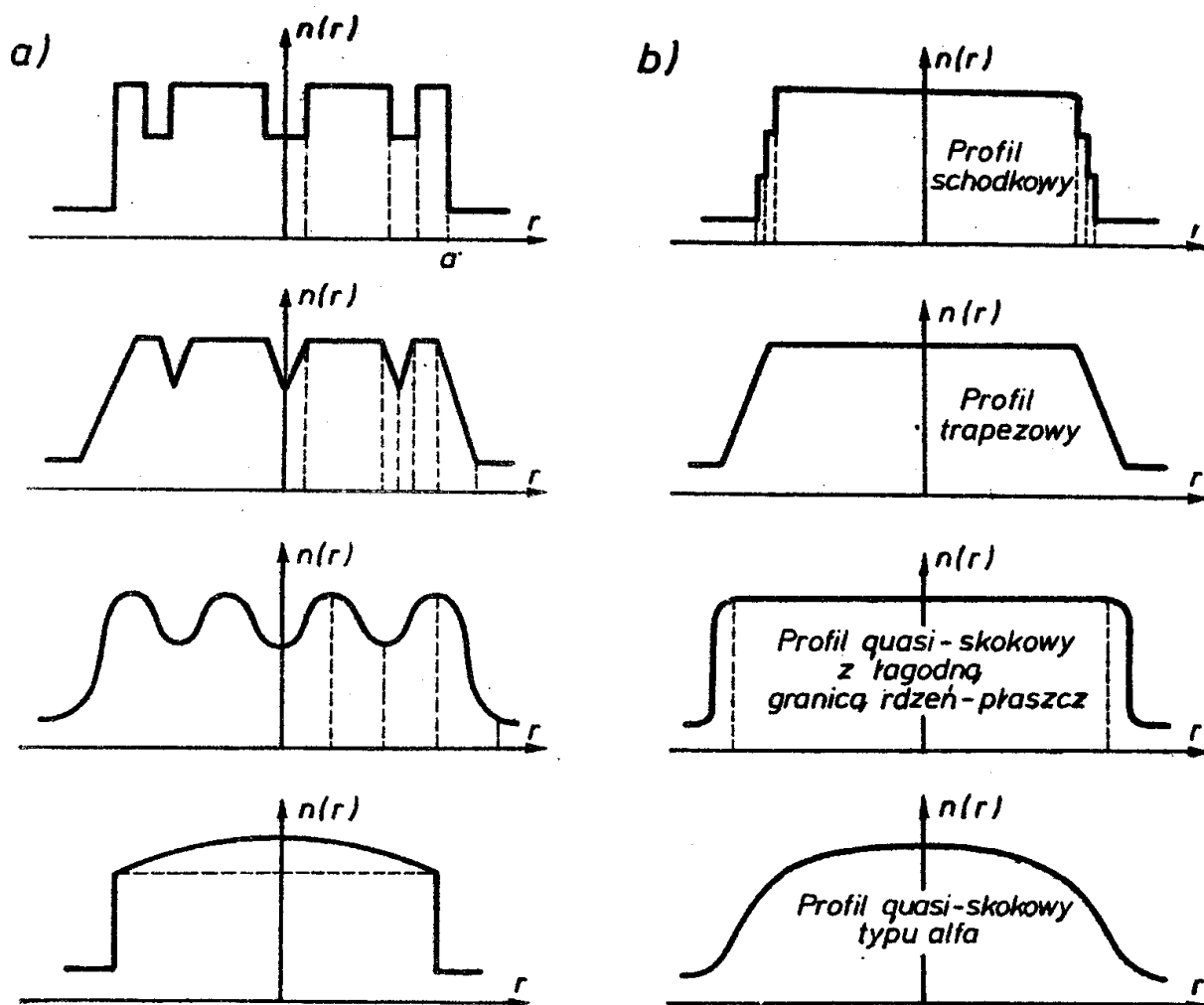
Rozważmy interesujący z praktycznego punktu widzenia światłowod o quasi - skokowym profilu współczynnika załamania światła. Takim profilem może być np. rozkład typu alfa.

$$n(x) = \left\{ \begin{array}{l} (1 - 2\Delta \rho^\alpha)^{1/2} ; \quad \rho = x/a < 1 \\ (1 - 2\Delta)^{1/2} ; \quad \rho > 1 \end{array} \right\} \alpha \ll 2 \quad , \quad (13)$$

Dla wymienionego profilu przy wystarczająco dużych wartościach α można przyjąć, że wyrażenie pod całką w mianowniku wzoru (12) posiada wartość stałą, co prowadzi do przybliżonego wyrażenia na \bar{n}^2 dla takiego światłowodu.

$$\bar{n}^2 = \frac{1}{A} \int_0^A n^2(x) dx \quad (14)$$

Uproszczenie, dzięki któremu otrzymano wzór (14), jest równoważne, według (10) i (11) przyjmując założenie o niezależności modowego kąta propagacji od współrzędnej X , a więc zastępując światłowod o profilu quasi - skokowym światłowodem o odpowiednio wybranym profilu skokowym. Rozważanie powyższe dotyczy ogólnej klasy profili quasi-skokowych a także, w pierwszym przybliżeniu, specjalnych profili współczynnika załamania z tzw. zniekształconym grzbietem. Kilka tego typu profili współczynnika załamania, których własności dyspersyjne mogą być opisane prostym wzorem (14) przedstawiono na rys. 2



Rys.2. Typy profili współczynnika załamania światła w światłowodzie, dla których obowiązuje przybliżony wzór (14)
 a/ profile współczynnika załamania ze zniekształconym grzbietem,
 b/ profile współczynnika załamania quasi-skokowe

3.3. Metoda falowodowa

Wyznaczamy dyspersyjny modowy współczynnik załamania z rozwiązania problemu własnego światłowodu wielomodowego o skokowym profilu współczynnika załamania. Ze wzoru (1)

na znormalizowaną stałą propagacji jest:

$$\beta = k (n_2^2 + NA^2 b)^{1/2} \quad (15)$$

Pochodna (15) względem k wynosi:

$$\bar{n}^2 = n_2 N_2 + (n_1 N_1 - n_2 N_2) b + \frac{k \cdot NA^2}{2} \cdot \frac{db}{dk} \quad (16)$$

Przekształćmy pochodną db/dk wykorzystując zależność:

$$\frac{dV}{dk} = \frac{V}{k} \cdot \frac{n_1 N_1 - n_2 N_2}{NA^2} \quad (17)$$

a więc (16) można zapisać w postaci:

$$\bar{n}^2 = n_2 N_2 + (n_1 N_1 - n_2 N_2) b + \frac{n_1 N_1 - n_2 N_2}{2} V \frac{db}{dV} \quad (18)$$

Aby znaleźć pochodną:

$$\frac{db}{dV} = \frac{d}{dV} \left[\frac{w^2(V)}{V^2} \right] = \frac{2w}{V^2} \cdot \frac{dw}{dV} - \frac{2w^2}{V^3} \quad (19)$$

należy rozwiązać zagadnienie własne światłowodu dielektrycznego. Równanie własne można zapisać dla falowodu optycznego w postaci Schlesingera, Diamanta i Vigantsa [13]:

$$\frac{\epsilon J^- - H^-}{\epsilon J^+ - H^+} = - \frac{J^- - H^-}{J^+ - H^+} \quad (20)$$

gdzie:

$$J^\pm = \frac{1}{u} \frac{J_{m \pm 1}}{J_m}, \quad H^\pm = \frac{1}{jw} \frac{H_{m \pm 1}}{H_m}; \quad \epsilon = \frac{n_1^2}{n_2^2} \quad (21)$$

oraz J_m, H_m - funkcje Bessela i Hankela pierwszego rodzaju m -tego rzędu.

W celu znalezienia dodatkowej zależności między funkcjami J oraz H w światłowodzie obliczamy pochodną względem częstotliwości znormalizowanej równania własnego:

$$\frac{d}{dV} \left[(\epsilon J^- - H^-) (J^+ - H^+) = - (\epsilon J^+ - H^+) (J^- - H^-) \right] \quad (22)$$

Obliczenia prowadzą do następujących wyników:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} J^-(J^+ - H^+) + \dot{J}^-(\varepsilon J^+ - \frac{\varepsilon+1}{2} H^+) + \dot{J}^+(\varepsilon J^- - \frac{\varepsilon+1}{2} H^-) - \\ - \dot{H}^-(\frac{\varepsilon+1}{2} J^+ - H^+) - \dot{H}^+(\frac{\varepsilon+1}{2} J^- - H^-) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Ponieważ jednak: $V = \alpha k_2(\varepsilon) \cdot (\varepsilon - 1)^{1/2}$

$$\dot{\varepsilon} = \left\{ \alpha k_2 / (\varepsilon - 1)^{1/2} - \frac{n_2}{n_1} (\varepsilon - 1)^{1/2} \right\}^{-1} \quad (24)$$

jest liczbą bardzo małą, więc pomijając ją we wzorze (23) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \dot{J}^-(\varepsilon J^+ - \frac{\varepsilon+1}{2} H^+) + \dot{J}^+(\varepsilon J^- - \frac{\varepsilon+1}{2} H^-) = \\ = \dot{H}^-(\frac{\varepsilon+1}{2} J^+ - H^+) + \dot{H}^+(\frac{\varepsilon+1}{2} J^- - H^-) \end{aligned} \quad (25)$$

gdzie:

$$\dot{J}^\pm = \pm \frac{U'}{U} \left[1 - (2m \pm 1) J^\pm + J^{\pm 2} \right] \quad (26)$$

$$\dot{H}^\pm = \pm \frac{W'}{W} \left[1 - (2n \pm 1) H^\pm + H^{\pm 2} \right] \quad (27)$$

Pomimo pominięcia (24) postać pochodnej (25) równania własnego jest jeszcze zbyt skomplikowana aby można było wyznaczyć z niej proste związki pomiędzy funkcjami walcowymi i ich argumentami.

Gdy we wzorze (25) przyjąć założenie $\varepsilon \approx 1$ spełnione przez większość falowodów rzeczywistych, to otrzymujemy prostszą postać (25):

$$\varepsilon \dot{J}^-(J^+ - H^+) + \varepsilon \dot{J}^+(J^- - H^-) = \dot{H}^-(\varepsilon J^+ - H^+) + \dot{H}^+(\varepsilon J^- - H^-) \quad (28)$$

Pominięcie ε po jednej ze stron równania (28) daje:

$$\frac{\varepsilon \dot{J}^+ - \dot{H}^+}{\varepsilon \dot{J}^- - \dot{H}^-} = \frac{J^+ - H^+}{J^- - H^-} \quad \text{lub} \quad \frac{\dot{J}^+ - \dot{H}^+}{\dot{J}^- - \dot{H}^-} = \frac{\varepsilon J^+ - H^+}{\varepsilon J^- - H^-} \quad (29)$$

Jeśli natomiast zastosować do równania (20) założenie słabej propagacji to upraszcza się ono do jednej z dwóch równoważnych postaci: $|\mathcal{E} = 1|$

$$J^- = H^- \quad \text{lub} \quad J^+ = H^+ \quad (30)$$

Obliczenie pochodnej (30) względem częstotliwości znormalizowanej, wprowadzając zredukowane funkcje Bessela i Hankela:

$$j_m = -\frac{J_m^2}{J_{m+1} J_{m-1}} \quad ; \quad h_m = \frac{H_m^2}{H_{m+1} H_{m-1}}$$

prowadzi do wzoru:

$$\frac{uu'}{ww'} = \frac{j_m}{h_m} \frac{1-h_m}{1-j_m} \quad (31)$$

Inną zależność między wielkościami j_m, h_m, u, w otrzymuje się mnożąc przez siebie obie postacie równania własnego (30):

$$h_m = \frac{w^2}{u^2} j_m \quad (32)$$

Następną zależność otrzymujemy różniczkując równanie $v^2 = u^2 + w^2$:

$$uu' + ww' = v \quad (33)$$

Korzystając z zależności (31), (32), (33) pochodne argumentów falowych wynoszą [13]:

$$w' = \frac{w}{v} (1 + j_m) \quad (34)$$

$$u' = \frac{u}{v} (1 - h_m) \quad (35)$$

co wstawione do wzoru (19) daje:

$$\frac{db}{dv} = \frac{2b}{v} j_m \quad (36)$$

i następnie do wzoru (18):

$$\bar{n}^2 = n_2 N_2 + (n_1 N_1 - n_2 N_2) b (1 + j_m) \quad (37)$$

3.4. Porównanie metod

Dla światłowodu o profilu skokowym wzór (5) można zapisać w postaci;

$$\bar{n}^2 = n_1^2 \frac{P_1}{P} + n_2^2 \frac{P_2}{P} = n_2^2 + NA^2 \frac{P_1}{P} \quad (38)$$

gdzie $P_1 + P_2 = P$ moc propagowana w rdzeniu i płaszczu falowodu.

Pominięcie dyspersji materiałowej w lewej stronie równania (37) i porównanie go ze wzorem (38) pozwala napisać:

$$\frac{P_1}{P} = b(1 + j_m) \quad (39)$$

Zależność tę można również wyprowadzić w oparciu o równanie Poyntinga [13]. Ze wzoru $\beta^2 = k_2^2 + w^2/a^2$ jest:

$$\bar{n}^2 - n_2^2 = b \cdot NA^2 \quad (40)$$

Korzystając z (38) i (39) można napisać:

$$\bar{n}^2 - n^2 = n \lambda \frac{dn}{d\lambda} = b \cdot NA^2 \cdot j_m \quad (41)$$

4. Dyskusja równania własnego (światłowodu) i jego postaci uproszczonych.

Składowe styczne pól w rdzeniu i płaszczu światłowodu muszą spełniać warunki brzegowe narzucone przez granicę rdzeń-płaszcz. Warunki ciągłości wstawione do równań składowych pól prowadzą do równania własnego:

$$\begin{aligned} & - (m \beta JH)^2 \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{w} \right)^2 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{uw} JJ'HH' + \\ & + \left(\frac{k_1}{u} J'H \right)^2 + \left(\frac{k_2}{w} JH' \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Dzieląc (42) obustronnie przez czynnik $(JHk_2)^2$ i wprowadzając oznaczenia:

$$\eta_1 = \frac{J'}{uJ} ; \quad \eta_2 = \frac{H'}{wH} ; \quad \epsilon = \frac{n_1^2}{n_2^2} \quad (43)$$

otrzymano:

$$\begin{aligned} (\eta_1 + \eta_2) (\varepsilon \eta_1 + \eta_2) &= \left(\frac{m \beta V^2}{u^2 w^2 k_2} \right)^2 = \\ &= \left[m (\varepsilon - 1) \frac{\beta k_2 a^2}{u^2 w^2} \right]^2 \end{aligned} \quad (44)$$

Można zauważyć, że dla $\varepsilon \approx 1$ równanie (43) przybiera prostą postać:

$$\eta_1 + \eta_2 = \frac{m \beta V^2}{u^2 w^2 k_2} \quad (45)$$

Równanie (42) można przedstawić również w innej postaci.

Dzieląc je przez $J J' H H'$ otrzymano:

$$\left(\varepsilon \frac{w}{u} \frac{J'}{J} + \frac{H'}{H} \right) \left(\frac{w}{u} \frac{J'}{J} + \frac{H'}{H} \right) = \left(\frac{m \beta V^2}{u^2 w k_2} \right)^2 \quad (46)$$

Korzystając dodatkowo z zależności $\beta^2 = k_1^2 - u^2/a^2$ otrzymano:

$$\frac{\beta^2}{k_2^2} = \varepsilon - \frac{u^2}{a^2 k_2^2} \frac{N A^2 n_2^2}{N A^2 n_2^2} = \frac{V^2 \varepsilon - \frac{u^2 N A^2}{n_2^2}}{V^2} = \frac{u^2 + \varepsilon w^2}{V^2} \quad (47)$$

Zależność (47) jest równoważna następującej na efektywny modowy współczynnik załamania jako funkcję argumentów falowych:

$$n = \frac{(n_1^2 w^2 + n_2^2 u^2)^{1/2}}{V} \quad (48)$$

Wzory (47) i (48) można zapisać w nieco innej postaci:

$$\left(\frac{\varepsilon}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) = \left[\frac{(\varepsilon - 1) a^2 \beta k_2}{u^2 w^2} \right]^2 \quad (49)$$

Korzystając z zależności (49) w równaniu własnym (44) otrzymano:

$$\begin{aligned}
 (\eta_1 + \eta_2) (\varepsilon \eta_1 + \eta_2) &= \left(\frac{mV^2}{u^2 w^2} \right)^2 \frac{u^2 + \varepsilon w^2}{V^2} = \\
 &= m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left(\frac{\varepsilon}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

Równanie własne (50), dla przypadku gdy $m=0$ /mody południkowe/ daje się rozbić na dwa niezależne równania opisujące mody TM i TE. Korzystając z własności funkcji walcowych $Z'_0 = -Z_1$ otrzymano:

$$\text{dla rodzajów TM} \quad \varepsilon \frac{w}{u} \frac{J_1}{J_0} + \frac{H_1}{H_0} = 0
 \tag{51}$$

$$\text{dla rodzajów TE} \quad \frac{w}{u} \frac{J_1}{J_0} + \frac{H_1}{H_0} = 0
 \tag{52}$$

Dla przypadków gdy $m \neq 0$ /mody skośne/, równanie (50) opisuje rodzaje hybrydowe EH i HE.

Część II.

WSPÓLCZYNNIKI DYSPERSJI FALOWEJ

1. WPROWADZENIE

Współczynnikami dyspersji nazywam wielkości /pajozęścioj w postaci pochodnych/ związane z częstotliwościową zależnością prędkości grupowej lub modowej stałej propagacji, a także wielkości ujmujące zależność dyspersji falowej od różnych parametrów falowodu np. eliptyczności rdzenia, krzywizny osi światłowodu, strat płaszcza itp.

Stosowane obecnie w telekomunikacji światłowodowej źródła promieniowania posiadają następujące pasma względne B w odniesieniu do częstotliwości środkowej pasma $f_0, \lambda = 1 \mu\text{m}$: LED GaAs - $3 \cdot 10^{-2}$ (30nm), laser GaAs - 10^{-3} /1nm/, laser Nd:

YALG - 10^{-5} /0.01mm/ [3]. Sygnał modulujący nośną optyczną doznaje zniekształcenia podczas transmisji w światłowodzie ze względu na różnice opóźnień grupowych różnych składowych częstotliwości nośnej. Jeśli pasmo optyczne nie jest zbyt szerokie na tyle, aby trzeba było uwzględniać dyspersję anomalną, jest jednak wystarczająco szerokie w porównaniu z pasmem transmitowanego impulsu /ten warunek jest zazwyczaj spełniony gdyż $\Delta\lambda = 10\text{pm}$ dla $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$ daje pasmo 3GHz/, to opóźnienie grupowe modu na jednostkę częstotliwości i jednostkę długości włókna wynosi w przybliżeniu $d\tilde{\tau}_g/df$ [3], gdzie $\tilde{\tau}_g = N/c$

2. PODSTAWOWE WSPÓŁCZYNNIKI DYSPERSJI

Uwzględniając pasmo optyczne można zapisać jednostkowe rozszerzenie impulsu jako:

$$t_p = B \frac{d\tilde{\tau}_g}{df} = \frac{1}{c} \frac{B}{f_0} k \frac{d^2\beta}{dk^2} \quad (1)$$

We wzorze tym ujęta jest zarówno dyspersja materiałowa $n(f)$, jak również dyspersja falowodowa ponieważ:

$$\beta = \beta[V(f)] \quad (2)$$

oraz dyspersja międzymodowa bowiem $\tilde{\tau}_g$ jest parametrem modowym.

Pochodna $d\beta/dV$ opisująca zmiany modowej stałej propagacji w funkcji częstotliwości znormalizowanej jest czynnikiem decydującym o dyspersji falowodowej i nazwana może być współczynnikiem dyspersji falowodowej. Obliczenie tego współczynnika prowadzi do następujących wyników. Wychodząc ze wzoru $\beta^2 = k_2^2 + w^2/a^2$ i rozpatrując wszystkie jego wyrazy jako funkcje V mamy:

$$\frac{d\beta}{dV} = -\frac{1}{\beta} \left(k_2 k_2' - \frac{w w'}{a^2} - \frac{a' w^2}{a^3} \right) \quad (3)$$

gdzie:

$$w' = \frac{w}{V} (1 + j_m) \quad (4)$$

$$a' = a/V \quad (5)$$

$$k_2' = n_2 \frac{dk}{dV} + k \frac{dn_2}{dV} = \frac{k_2 NA^2}{V(n_1 N_1 - n_2 N_2)} - \frac{NA}{an_2} \approx \frac{k_2}{V} - \frac{NA}{an_2} \quad (6)$$

Przybliżenie we wzorze (6) dotyczy pominięcia różnicy charakterystyk dyspersyjnych rdzenia i płaszcza światłowodu. Wstawiając (4), (5) i (6) do (3) otrzymuje się:

$$\frac{d\beta}{dV} = \frac{1}{a^2 V \beta} (V^2 - a^2 k_2^2 - w^2 j_m) = -\frac{1}{a^2 V \beta} (V^2 + a^2 k_1^2 - u^2 h_m) \quad (7)$$

gdzie drugi ze wzorów (7) otrzymano opierając wyprowadzenie na wzorze $\beta^2 = k_1^2 - u^2/a^2$.

Przyjmując przybliżenie oparte na zależności $\sqrt{1-x} \approx 1-x/2$, czyli $\beta = k_1 (1 - u^2/2k_1^2 a^2)$, współczynnik dyspersji falowodowej wynosi:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dV} &= k_1' - \frac{u u'}{a^2 k_1} + \frac{u^2 a'}{a^3 k_1} + \frac{u^2 k_1'}{a^2 k_1^2} = \\ &= \frac{n_1}{a NA} - \frac{NA}{an_1} + \frac{u^2}{a^3 k_1^2} \left(\frac{h_m + 1}{NA} - \frac{NA}{n_1} \right) \approx \\ &\approx \frac{1 - 2\Delta}{a \sqrt{2\Delta}} + \frac{u^2}{a^3 k_1^2 n \sqrt{2\Delta}} [h_m + 1 - 2(n_1 - n_2)] \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie $NA = n_1 \sqrt{(2 - \Delta)\Delta} \approx n_1 \cdot \sqrt{2\Delta}$.

Pierwszy wyraz wzoru (8) opisuje wyłącznie efekt materiałowy w dyspersji stałej propagacji, wyraz drugi opisuje efekt falowodowy i materiałowy jednocześnie.

Zgodnie ze wzorem (1) za współczynnik dyspersji falowej można również przyjąć pochodną $d^2\beta/dk^2$. Dla włókna słabo propagującego [3] pochodna ta wynosi:

$$\beta = k_2(1 + b\Delta) \quad (9)$$

$$b = (n - n_2) / (n_1 - n_2) \quad (10)$$

$$\frac{db}{dk} = N_2 + (N_1 - N_2) \frac{dVb}{dV} \quad (11)$$

$$\frac{dVb}{dV} = b + V \frac{db}{dV} = b(1 + 2j_m) \quad (12)$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$\bar{N} = \frac{dN}{dk} = k \frac{d^2n}{dk^2} = \frac{\lambda^3}{2\pi} \frac{d^2n}{d\lambda^2} \quad (13)$$

na współczynnik dyspersji materiałowej. Za współczynnik dyspersji materiałowej przyjąć można również:

$$\frac{d^2\beta}{d\omega^2} = \frac{\bar{N}}{c^2} \quad (14)$$

lub

$$\frac{dTg}{d\lambda} = \begin{cases} -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2} \\ \frac{1}{c} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \lambda^2 \frac{d^2n}{d\lambda^2} \end{cases} \quad (15)$$

uwzględniając pasmo źródła

lub

$$\frac{dVg}{d\omega} = -Vg^2 \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \quad (16)$$

Różniczkowanie (11) względem k daje:

$$\frac{d^2\beta}{dk^2} = \bar{N}_2 + (\bar{N}_1 - \bar{N}_2) \frac{dVb}{dV} - (N_1 - N_2) \frac{d}{dk} \frac{dVb}{dV} \quad (17)$$

Wstawiając $d/dk = (dV/dk) \cdot (d/dV)$ do (17) otrzymuje się:

$$\frac{d^2\beta}{dk^2} = \bar{N}_2 + (\bar{N}_1 - \bar{N}_2) \frac{dVb}{dV} - \frac{(n_1 N_1 - n_2 N_2) (N_1 - N_2)}{NA^2} \cdot \frac{V}{k} \cdot \frac{d^2Vb}{dV^2} \quad (18)$$

Przyjęcie przybliżenia wykorzystanego we wzorze (6) pozwala napisać (18) w formie:

$$\frac{d^2\beta}{dk^2} = \bar{N}_2 + (\bar{N}_1 - \bar{N}_2) \frac{dVb}{dV} - (N_1 - N_2) \frac{V}{k} \cdot \frac{d^2Vb}{dV^2} \quad (19)$$

gdzie:

$$\frac{d^2Vb}{dV^2} = 2 \frac{db}{dV} + V \frac{db}{dV} \frac{d^2b}{dV^2} = 2 (w w' w'' + w'^2 - 3w^2) \quad (20)$$

$$w'' = \frac{w}{V^3} \left[(1 + j_m)^2 + (1 - h_m) u j_m' \right] \quad (21)$$

$$j_m' = \frac{w}{V} (1 + j_m) \left[2 J_m' \frac{j_m}{J_m} - (J_{m+1}' J_{m-1} + J_{m+1} J_{m-1}') \frac{j_m^2}{J_m^2} \right] \quad (22)$$

Wzory (1) i (19) opisują jednostkowe rozszerzenie impulsu we włóknie słabo propagującym. Uwzględnienie w (1) jedynie dyspersji materiałowej prowadzi, zgodnie z (13), do uproszczonego wzoru:

$$t_p = \frac{1}{c} \frac{B}{f_0} \lambda^2 \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \quad (23)$$

3. INNE WSPÓŁCZYNNIKI DYSPERSJI

Spośród dużej różnorodności możliwych do utworzenia współczynników dyspersji istotnym jest współczynnik dv_g/da /gdzie a - promień rdzenia/ wynikający z eliptyczności rdzenia światłowodu. Modowi HE_{11} struktury cylindrycznej odpowia-

dają dwa mody struktury eliptycznej, parzysty HE_{11}° i nieparzysty HE_{11}° o polach elektrycznych odpowiednio w kierunku osi większej i mniejszej elipsy. Różne prędkości grupowe między tymi modami można wyznaczyć rozważając małą eliptyczność rdzenia jako nałożenia dwóch rdzeni okrągłych o różnych promieniach równych większej i mniejszej półosiom elipsy. Szybkość zmian prędkości grupowej ze zmianą promienia jest

[1]:

$$\frac{dv_g}{da} = \frac{dv_g}{dV} \cdot \frac{dV}{da} = kNA \frac{dv_g}{dV} \quad (24)$$

Innym przykładem współczynnika dyspersji może być wielkość ujmująca wpływ strat płaszcza oraz warunków pobudzenia światłowodu na dyspersję [2], lub ważny współczynnik dv_g/dh_{ij} [4], gdzie h_{ij} współczynnik sprzężenia modu i-tego z j-tym.

Część III

OPTIMALIZACJA PROFILU WSPÓLCZYNNIKA ZAŁAMANIA ŚWIATŁA W ŚWIATŁOWODZIE WŁÓKNISTYM ZE WZGLĘDU NA MINIMUM DYSPERSJI

1. WPROWADZENIE

1.1. Optymalizacja pasmowa

Wprowadźmy następujące oznaczenia: B_w - pasmo światłowodu, B_i - pasmo impulsu pobudzającego, B_s - pasmo źródła światła. Rozważmy typowe wartości B_i oraz B_s jeśli impulsem B_i modulujemy źródło światła B_s . Stosowane w telekomunikacji światłowodowej źródła posiadają następujące pasma B_s oraz pasma względne B_{sw} w odniesieniu do częstotliwości środkowej pasma $f_0 = 300 \text{ THz} / \lambda_0 = 1 \mu\text{m}$: DEL GaAs - $\Delta\lambda = 30 \text{ nm}$, $B_{sw} =$

$\approx 3 \cdot 10^{-2}$, $B_s = 9\text{THz}$; laser GaAs - $\Delta\lambda = 1\text{nm}$, $B_{sw} = 10^{-3}$,
 $B_s = 300\text{GHz}$; laser Nd:YAlG - $\Delta\lambda = 0,01\text{nm}$, $B_{sw} = 10^{-5}$, $B_s = 3\text{GHz}$.

Pasmo impulsu pobudzającego określone jest krotnością systemu cyfrowego PCM, w jakim pracuje rozważane urządzenie, a także wymaganą jakością tego systemu, a w szczególności wymaganą wartością SNR, która to wartość jest istotna ze względu na jej związek z prawdopodobieństwem błędu cyfrowego w systemie. Porównując wartości B_i z B_s stwierdzić można, że nawet przy dużych krotnościach systemu i bardzo wąskich pasmach źródła światła zachodzi warunek $B_s \gg B_i$. Warunku podobnego nie można wyprowadzić dla pasm B_i oraz B_w , gdyż B_w jest, między innymi, funkcją długości światłowodu i dla wystarczająco dużych długości może być małe np. kilkaset MHz [8]. Dla dużych krotności PCM i dużych długości światłowodu może zachodzić $B_i > B_w$, co jest niekorzystne ze względu na silnie tłumiące działanie światłowodu, poza swoim pasmem, na propagowany impuls. Widać więc, że w przestrzeni: L-długość światłowodu, B_i oraz B_w istnieje problem optymalnego doboru wartości B_i . Dla każdego systemu telekomunikacyjnego musi być dobrana optymalna dla niego krotność cyfrowa. Optymalizację dodatkowo komplikuje fakt, że sygnał modulujący nośną optyczną /o skończonym pasmie B_s / doznaje zniekształcenia podczas transmisji w światłowodzie nie tylko ze względu na jego skończone pasmo, ale przede wszystkim ze względu na różnice opóźnień grupowych różnych składowych częstotliwości nośnej.

Opisany powyżej problem można nazwać optymalizacją pasmową zewnętrzną, gdyż dotyczy współpracy włókna ze źród-

lem modulowanym. Odpowiednio optymalizacją pasmową wewnętrzną nazwać można poszukiwanie maksimum globalnego B_w jako funkcji geometrii światłowodu i parametrów rozkładu współczynnika załamania światła w rdzeniu i płaszczu. Przestrzeń optymalizacji tworzyć będą takie wielkości jak: $V=akNA$ - częstotliwość znormalizowana, a - promień rdzenia światłowodu, $NA^2=n_1^2-n_2^2$ - apertura numeryczna światłowodu, n_1, n_2 - współczynniki załamania na osi rdzenia i w płaszczu, kształt rdzenia, funkcja rozkładu współczynnika załamania $g(x)$ oraz jej pochodne do drugiej włącznie.

Podstawowym problemem optymalizacji pasmowej wewnętrznej jest znalezienie wielowymiarowej, dyspersyjnej funkcji geometrii światłowodu i parametrów profilu współczynnika załamania, które byłyby funkcją celu. Ze względu na możliwość przewidzenia obszaru maksimum globalnego takiej funkcji problem optymalizacji można rozwiązać prostą metodą optymalizacji statycznej np. metodą poszukiwań bezpośrednich Hooka-Jeevesa.

1.2. Optymalizacja impulsowa

Zagadnienie optymalizacji profilu współczynnika załamania światłowodu ze względu na minimum dyspersji falowej rozważane jest prawie wyłącznie metodami impulsowymi [8.I], [14.I.]. W optymalizacji impulsowej wykorzystuje się fakt, że impuls optyczny, którym pobudzany jest światłowód, propagowany jest wielomodowo, modami o różnych czasach przejścia /inaczej opóźnieniach grupowych/. Jeżeli w problemie optymalizacji wybrać jako funkcję celu maksymalne grupowe opóźnienie różnicowe /maksymalną różnicę czasów przejścia/

to wynik optymalizacji da minimum dyspersji modowej /minimum rozszerzenia impulsu pobudzającego falowód/.

Problem ten, jak dotąd, posiada rozwiązanie dla wybranych klas rozkładu współczynnika załamania, np. dla rozkładu wykładniczego typu alfa [15.I] i rozważany jest wyłącznie dla przybliżenia optyki geometrycznej, gdzie może być obliczony z równania eikonalu lub za pomocą przybliżenia WKB czas przejścia modu [13].

1.3. Poszukiwanie optimum globalnego

Problem ten był krótko rozpatrzony w [7]. Można tutaj przypomnieć, że narzucenie jakiejkolwiek wybranej klasy profili współczynnika załamania prowadzi do rozwiązania optymalnego lokalnie. Dodatkowo, optymalizacja profilu współczynnika refrakcji daje jedynie minimum dyspersji międzomodowej. Na dyspersję całkowitą składa się jeszcze dyspersja wewnątrzmodowa oraz dyspersja materiałowa.

2. OPTYMALNY PROFIL WSPÓLCZYNNIKA ZAŁAMANIA DLA FALOWODU DWUWYMIAROWEGO

Rozważenie falowodu płaskiego, w którym pola spełniają warunek $\partial/\partial y=0$, jest równoważne rozpatrywaniu własności modów południkowych /przecinających oś falowodu/ w falowodzie trójwymiarowym o symetrii osiowej. W części pierwszej obliczono modową prędkość grupową metodą falową i metodą optyki geometrycznej. Stawiając warunek stałości prędkości grupowej w przestrzeni modowej można znaleźć optymalny rozkład współczynnika załamania światła ze względu na minimum dyspersji międzomodowej.

Wzór (5.I) z części I /metoda falowa/ prowadzi do nas-

tępującego wyrażenia na prędkość grupową:

$$v_g = cn_m \int p(x) dx / \int n^2(x) p(x) dx = cn_m / \overline{n^2(x)} \quad (1)$$

gdzie: $n_m = \beta/k$ modowy efektywny współczynnik załamania.

Metoda optyki geometrycznej natomiast, wzór (12.I), prowadzi do następującego wyprowadzenia. Wprowadźmy pomocniczą funkcję J:

$$J = \int_0^A [k^2 n^2(x) - \beta^2]^{1/2} dx = k \int_0^A [n^2(x) - n^2(A)]^{1/2} dx \quad (2)$$

gdzie: $x=A$ - jest współrzędną kaustyki modowej.

Obliczmy prędkość grupową ze wzoru:

$$v_g = -\partial J / \partial \omega / \partial \beta \partial J \quad (3)$$

co daje:

$$v_g = cn_m \int [k^2 n^2(x) - \beta^2]^{-1/2} dx / \int n^2(x) [k^2 n^2(x) - \beta^2]^{-1/2} dx \quad (4)$$

Zależność (3) można przedstawić w postaci równania:

$$\partial J / \partial \beta + v_g \partial J / \partial \omega = 0 \quad (5)$$

o rozwiązaniu [1]:

$$n(x) = n(0) \operatorname{sech} x \quad (6)$$

co jest rozwiązaniem optymalnym /uzyskanym na drodze metod optyki geometrycznej) dla modów południkowych.

3. OPTYMALNY PROFIL WSPÓŁCZYNNIKA ZAŁAMANIA DLA MODÓW

SKOŚNYCH

Wychodząc z równania eikonału i stosując wynikające z niego równanie promienia w przybliżeniu przyosiowym:

$$(d/dz) [n d\bar{r}/dz] = \nabla n \quad (7)$$

otrzymuje się następujące wyrażenie na prędkość grupową:

$$v_g = v(r) \left[1 + \frac{r/dr}{n/dn} \right] \quad (8)$$

Żądając ponownie spełnienia warunku $v_g = \text{const}$ w przestrzeni modowej jako rozkład optymalny otrzymuje się:

$$n(r) = n(0) (1 + Cr^2)^{-1/2}; \quad C = \text{const} \quad (9)$$

Z porównania wzorów (6) i (9) wynika, że rozkłady optymalne dla promieni południkowych i skośnych są różne.

4. OPTIMALIZACJA PROFILU WSPÓLCZYNNIKA ZAŁAMANIA ZA POMOCĄ METODY PERTURBACYJNEJ

4.1. Prędkość i opóźnienie grupowe modu zaburzonego

Założmy rozkład współczynnika załamania w postaci

$$n(r) = n_0 \begin{cases} (1 - 2\Delta \rho^2 + \xi \Delta^2 \rho^4)^{1/2}; & \rho = r/a \leq 1 \\ (1 - 2\Delta + \xi \Delta^2)^{1/2} & \rho \geq 1 \end{cases} \quad (10)$$

gdzie ξ - współczynnik wyrazu perturbacyjnego czwartego rzędu. Najlepsze przybliżenie (6) otrzymuje się dla $\xi = 2/3 = \frac{2}{3}$, co wynika z rozwinięcia funkcji sech w szereg potęgowy/ oraz przybliżenie (9) dla $\xi = 1$.

Równanie falowe dla ośrodka opisanego wzorem (10) jest:

$$\frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} + \left(k_0^2 - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2} - \frac{V^2 r^2}{a^4} + \xi \frac{V^4 r^4}{k_0^2 a^8} \right) \Psi = 0 \quad (11)$$

Rozwiązaniem równania (11), bez czynnika perturbacyjnego, są funkcje o postaci:

$$\Psi_{l,m} = \left(\frac{V}{\pi a^2} \frac{m!}{(m+1)!} \right)^{1/2} \exp(-V\rho^2/2) (V\rho^2)^{l/2} L_m^{(l)}(V\rho^2) \quad (12)$$

gdzie: $L_m^{(1)}$ jest wielomianem Laguerre'a

Równanie własne dla ośrodka (10) dające zaburzone wartości własne $\beta(\omega)$ jest [11].

$$u^2 = a^2(k_1^2 - \beta^2) = 2V(2m+1+1) - \xi \frac{\Delta}{2} [6m^2 + 6(1+1)m + (1+1)(1+2)] \quad (13)$$

Opóźnienie grupowe $\tilde{\tau}_{/m,1/}$, znormalizowane względem długości światłowodu, można obliczyć z równania dyspersyjnego (13):

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} = d\beta/cdk = (N_0/c) \left\{ 1 + n_0 \lambda \Delta' (2m+1) / N_0 V + \right. \\ \left. + [2(2m+1)^2 / V^2 - \xi (6m^2 + l^2 + 2ml) / 2V^2 - \right. \\ \left. - \xi n_0 \lambda \Delta' (6m^2 + l^2 + 2ml) / 2N_0 \Delta V^2] \Delta^2 + o(\Delta^3) \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

gdzie $\Delta' = d\Delta/dk$, $N_0 = n_0 - \lambda n_0'$

Wzór (14) można zapisać w innej postaci, pomijając wspólne dla wszystkich modów opóźnienie $t_{/m,1/} = \tilde{\tau}_{/m,1/} - \tilde{\tau}_{/0,0/}$ [2]:

$$\begin{aligned} t(m,1) = \frac{N_0}{c} \left\{ \frac{n_0 \lambda \Delta' (2m+1)}{N_0 V} + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{n_0 \lambda \Delta'}{2N_0 \Delta} \right) \frac{4(2m+1)^2}{V^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\xi}{8} \frac{n_0 \lambda \Delta'}{2N_0 \Delta} + \frac{\xi}{8} \right) \frac{4}{V^2} (6m^2 + l^2 + 2ml) \right] \Delta^2 + o(\Delta^3) \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

Różnica opóźnień modowych jest minimalizowana dla $\xi = 8/3$ i $l = 0$ oraz $\xi = 4$ i $m = 0$, gdy przyjmiemy $n_0 \lambda \Delta' / 2N_0 \Delta = 0$.

Wzór (15) dotyczy analizy przypadku gdy mody o tej samej wartości β posiadają różne wartości v_g . Podobny przypadek rozpatrywał Marcatili [5] dla światłowodów o profilu typu alfa. Wcześniejsza, wobec wyżej wymienionych, analiza Glogego [3.III] dotyczy modów, które posiadając jednakowe wartości β , mają również jednakowe prędkości grupowe v_g .

Prędkość grupową modu zaburzonego można również przedstawić w postaci:

$$v_g = \partial\omega / \partial\beta = (k_0^2 - k_0\rho + q^2) c / (k_0 - \rho/2) n_0 ;$$

$$\rho = 2(2m+1+1)(2\Delta - \Delta^2)^{1/2}/a ; \quad (16)$$

$$q = \xi [6m^2 + 6m(1+1) + (1+1)(1+2)] (2\Delta - \Delta^2)/a^2$$

Prędkość grupowa (16) staje się równa prędkości fazowej na osi światłowodów c/n_0 , jeśli równanie dyspersyjne (13) można zapisać:

$$\beta = k_0 - (2m+1+1) [(2-\Delta)\Delta]^{1/2}/a \quad (17)$$

co zachodzi dla:

$$\xi = (2m+1+1)^2 [6m^2 + 6m(1+1) + (1+1)(1+2)]^{-1} \quad (18)$$

Należy zwrócić uwagę, że ξ ulega zmianom, gdy zmienia się stosunek m/l .

Dla ośrodka o kwadratowym rozkładzie współczynnika załamania ($\xi = 0$), równanie dyspersyjne (13) można zapisać w prostej postaci:

$$\delta/\Delta = m_u + l_u \leq 1 \quad (19)$$

gdzie: $0 \leq \delta = 0,5(1 - \beta^2/k_0^2) \leq \Delta$ - bieżąca modowa wartość parametru Δ , $m_u = m/m_{\max}$, ($m_{\max} = V/4$), $l_u = l/l_{\max}$, ($l_{\max} = V/2$) - znormalizowane względem wartości maksymalnych radialna i azymutalna liczby modowe.

Dla takiego ośrodka Olshansky i Keck [4] pokazali, że korzystając z przybliżenia WKB opóźnienie modowe jest minimalizowane przez wybór optymalnej wartości α w rozkładzie

α - potęgowym:

$$\alpha = \text{const} = 2 \left[1 - \rho_0 - \Delta(2 - \rho_0)(3 - \rho_0)/(5 - 4\rho_0) \right]; \quad (20)$$

$$\rho_0 = \lambda d \Delta / \Delta d \lambda$$

Oznacza to, że mody o tej samej stałej propagacji β mają tę samą wartość v_g .

4.2. Opis dyspersji w oparciu o średniokwadratową szerokość propagowanego impulsu.

Personick [3] pokazał, że wygodnym narzędziem analizy pasma światłowodu jest średniokwadratowa szerokość propagowanego impulsu optycznego:

$$G^2 = \int t^2 f(t) dt - \left[\int t f(t) dt \right]^2 \quad (21)$$

gdzie funkcja $f(t)$ opisuje kształt impulsu

Olshansky [4] znalazł powiązanie wielkości G^2 z modowym opóźnieniem grupowym (14)

$$G^2 = \overline{\tau^2} - \overline{\tau}^2 + B_{sw} \left(\overline{\lambda_0^2 \tau'^2} + \overline{\tau \lambda_0^2 \tau''} - \overline{\tau \lambda_0^2 \tau''} \right) \Big|_{\lambda = \lambda_0} \quad (22)$$

gdzie B_{sw}^2 jest średniokwadratową względną szerokością spektralną źródła światła, τ' , τ'' , pochodne $\tau(\lambda)$.

We wzorze (22) można wyróżnić następujące czynniki:

$$G_{\text{międzymodowe}}^2 = \overline{\tau^2} - \overline{\tau}^2 + B_{sw}^2 \left(\overline{\lambda_0^2 \tau'' \tau} - \overline{\lambda_0^2 \tau'' \tau} \right) \quad (23)$$

$$G_{\text{wewnqtrzmowane}}^2 = B_{sw}^2 \overline{\lambda_0^2 \tau'^2} \quad (24)$$

Czynnik międzymodowy (23) wynika z różnic opóźnień modowych i składa się z dominującego czynnika $\overline{\tau^2} - \overline{\tau}^2$ oraz niewielkiego czynnika korekcyjnego proporcjonalnego do szerokości spek-

tralnej źródła. Zwykle wyraz ten jest pomijany [4]. Na dyspersję wewnątrzmodową (24) składają się dwa czynniki: czysty efekt materiałowy i efekt falowodowy. Separacji można dokonać przedstawiając opóźnienie modowe w postaci $\tilde{\tau} = N_1/c + \delta\tilde{\tau}$, gdzie $N_1 = n_1 - dn_1/d\lambda$ oraz $\delta\tilde{\tau}$ przedstawia czynnik korekcyjny wprowadzany przez falowód. Pochodna $\tilde{\tau}$ wynosi $\tilde{\tau}' = -\lambda n_1'' + \delta\tilde{\tau}'$. Podnosząc $\tilde{\tau}'$ do kwadratu i uśredniając oraz wstawiając do wzoru (24) otrzymuje się: 2

$$\overline{\sigma}_{\text{wewn}\ddot{a}\text{trzm}\ddot{o}\text{d}\ddot{o}\text{w}\ddot{o}} = \quad (25)$$

$$= \overline{B_{sw}^2} \left[\overline{\lambda_0^4 n_1''^2} - 2 \overline{\lambda_0^2 n_1''} \overline{\lambda_0 \delta\tilde{\tau}'} + \overline{\lambda_0^2 \delta\tilde{\tau}'^2} \right]$$

W tej postaci czynnik wewnątrzmodowy posiada składową materiałową, falowodową i mieszaną. Zazwyczaj składowa materiałowa dominuje [4], więc (25) można zapisać w postaci:

$$\overline{\sigma}_{\text{wewn}\ddot{a}\text{trzm}\ddot{o}\text{d}\ddot{o}\text{w}\ddot{o}} \approx \overline{B_{sw} \lambda_0^2 n_1''} \quad (26)$$

Ze względu na swą interpretację fizyczną wielkość powyższa może być nazwana absolutnym minimum dyspersji falowodu jednomodowego.

Wyróżnienie czynników w (22) można dokonać również w inny sposób [2]:

$$\overline{\sigma}_{\text{modowe}}^2 = \overline{t^2} - \overline{t}^2 ; \quad \lambda = \lambda_0 \quad (27)$$

$$\overline{\sigma}_{\text{falowe}}^2 = \overline{B_{sw}^2 \lambda_0^2 \tau'^2} \quad (28)$$

$$\overline{\sigma}_{\text{mieszane}}^2 = \overline{B_{sw}^2 \left[\tau \lambda_0^2 \tau'' - \tilde{\tau} \lambda_0^2 \tilde{\tau}'' \right]} \quad (29)$$

$$\overline{\sigma}_{\text{falowe}}^2 = \overline{\sigma}_{\text{materiałowe}}^2 + \overline{\sigma}_{\text{falowodowe}}^2 + \overline{\sigma}_{\text{mieszane (falowe)}}^2 \quad (30)$$

$$\overline{\sigma}_{\text{materiałowe}}^2 = \overline{B_{sw}^2 (\lambda_0^2 n_0''/c)^2} \quad (31)$$

$$\overline{\sigma}_{\text{falowodowe}}^2 = \overline{B_{sw}^2 \lambda_0^2 \delta\tilde{\tau}'^2} \quad (32)$$

$$\overline{\sigma}_{\text{mieszane (falowe)}}^2 = -2 \overline{B_s^2 n_0'' \lambda_0 \delta\tilde{\tau}'/c} \quad (33)$$

Wyznaczamy dyspersję modową, ze wzoru (27):

$$\bar{t}^2 = \int_0^1 \int_0^{1-l_u} t^2 dm_{\nu} dl_u / \int_0^1 \int_0^{1-l} dm_{\nu} dl_u \quad (34)$$

$$\bar{t} = \int_0^1 \int_0^{1-l_u} t dm_{\nu} dl_u / \int_0^1 \int_0^{1-l} dm_{\nu} dl_u \quad (35)$$

$$G_{\text{modowe}} = \frac{N_0}{c} \left[\frac{n_0^2 \lambda^2 \Delta'^2}{72 N_0^2 \Delta^2} + \right. \quad (36)$$

$$+ \frac{n_0 \lambda \Delta'}{15 N_0 \Delta} \left(\frac{n_0 \lambda \Delta'}{2 N_0 \Delta} - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{\xi}{3} \right) \Delta^3 +$$

$$\left. + \left(n_0 \lambda \Delta' / 2 N_0 \Delta + 1/2 \right)^2 \left(1/12 - \xi/18 + 7 \xi / 720 \right) \Delta^4 \right]^{1/2}$$

Optymalną wartość parametru perturbacyjnego ξ , minimalizującą dyspersję modową można obliczyć z warunku $dG_{\text{modowe}}^2/d\xi=0$ [2]:

$$\xi_{\text{opt(modowe)}} = \frac{20}{7} \left[1 + (4 n_0 \lambda \Delta' / 5 N_0 \Delta^2) (1 + n_0 \lambda \Delta' / N_0 \Delta)^{-1} \right] \quad (37)$$

Dyspersja falowa obliczona przez Ikedę [2] w oparciu o definicję Olshansky'ego wynosi [4]

$$G_{\text{falowe}} = (B_{\text{sw}}/c) \left\{ \lambda_0^4 n_0^2 - 2 \lambda_0^3 n_0^4 N_0 \Delta' \left[(n_0 \lambda \Delta' / 3 N_0 \Delta) + \right. \right.$$

$$\left. + (1/2 + n_0 \lambda \Delta' / N_0 \Delta) (1 - \xi/4) \Delta \right] + N_0^2 \lambda_0^2 \Delta'^2 \left[n_0^2 \lambda^2 \Delta'^2 / 8 N_0 \Delta + (38)$$

$$+ (2 n_0 \lambda \Delta' / 5 N_0 \Delta) (1 + n_0 \lambda \Delta' / N_0 \Delta) (1 - \xi/3) \Delta +$$

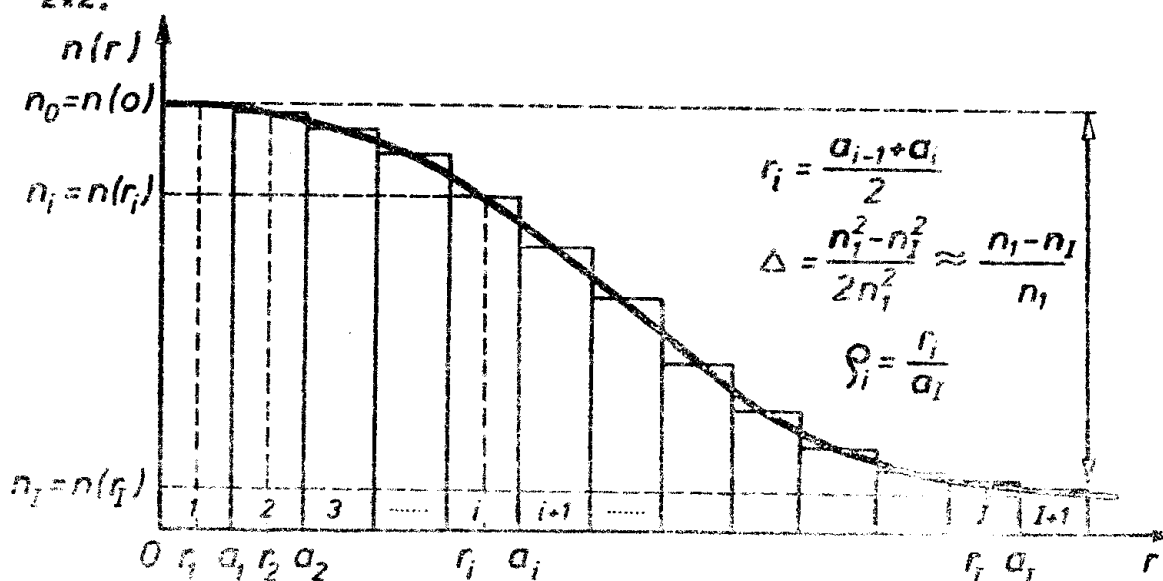
$$\left. + (1 + n_0 \lambda \Delta' / N_0 \Delta)^2 (1/3 - 2 \xi/9 + 3 \xi^2 / 80) \Delta^2 \right\}^{1/2}$$

W analogiczny sposób, w jaki wyprowadzono wzór (37) można znaleźć wartość $\xi_{\text{opt/falowe}}$. Wzory (37) i (38) dają śred-

niokwadratową szerokość impulsu w ramach zaznaczonych przybliżeń.

5. OPTIMALIZACJA PROFILU WSPÓLCZYNNIKA ZAŁAMANIA ZA POMOCĄ METODY MACIERZOWEJ

Stosując skokowe, wielowarstwowe przybliżenie gradientowego profilu współczynnika załamania (rys.1/ pola modowe można zapisać w postaci macierzowej [9]. Analogiczna metoda stosowana była przez Collina [10] do ciągłej transformacji impedancji w układach mikrofalowych za pomocą niesymetrycznych linii paskowych /NLP/. W każdej warstwie przyjmujemy stały współczynnik załamania, więc równanie falowe przybiera prostą postać zawierającą tylko jedną osiową składową pola elektromagnetycznego. Dodatkowo równanie falowe dla składowych pól r i θ we współrzędnych cylindrycznych można rozdzielić, stosując odpowiednie kombinacje liniowe pól, dzięki czemu macierze polowe o wymiarze 4×4 , przy dodatkowym założeniu słabej propagacji, upraszczają się do macierzy 2×2 .



Rys.1. Profil współczynnika załamania i przybliżenie warstwowe dla włókna o symetrii osiowej. Promień rdzenia jest $r = a_1$ oraz i jest numerem kolejnej warstwy

W pierwszej warstwie pola można zapisać w postaci odpowiednich funkcji Bessela spełniających równania Maxwella z warunkami brzegowymi określonymi przez warstwy następne. W ostatniej warstwie rozwiązanie przewidujemy w postaci funkcji Hankela. Formułując po kolei wszystkie warunki brzegowe otrzymujemy równanie własne takiego falowodu, a jako jego rozwiązanie wartości własne modowej stałej propagacji. Kładąc warunek stałości modowej stałej propagacji poszukujemy takich współczynników w równaniu własnym, aby otrzymać optymalny profil współczynnika załamania światła w przekroju poprzecznym światłowodu.

5.1. Dyskretyzacja profilu współczynnika załamania

Załóżmy profil współczynnika załamania światłowodu w następującej postaci:

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 [1 - 2\Delta f(r)] & 0 < \rho \leq 1 \\ n_I^2 (1 - 2\Delta) & \rho > 1 \end{cases} \quad (39)$$

$$f(r) = \sum_{q=1}^Q \xi_q \rho^{2q} \quad (40)$$

Zdefiniujmy następujące wektory i macierze:

$$\underline{n}(r) = \begin{bmatrix} n(r_1) \\ n(r_2) \\ \vdots \\ n(r_I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_I \end{bmatrix} \quad (41) \quad \underline{n}^2(r) = \begin{bmatrix} n_1^2 & 0 & & 0 \\ 0 & n_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n_I^2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f(r_1) \\ f(r_2) \\ \vdots \\ f(r_I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_I \end{bmatrix} \quad (43) \quad \underline{\bar{f}} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \vdots \\ \bar{f}_Q \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_I^2 \\ r_1^4 & r_2^4 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ r_1^{2Q} & & & r_I^{2Q} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Za pomocą powyżej zdefiniowanych macierzy profil (39), (40) można zapisać:

$$\underline{n}(r) = n_1^2 (1 - 2 \Delta \underline{\bar{f}}^T \underline{r}) \quad (46)$$

5.2. Dyskretyzacja i normalizacja mocy falowodowej

Amplitudy pól modów falowodowych wygodnie jest tak znormalizować, że wektor Poyntinga w kierunku z przyjmuje wartość 1. Moc propagowana w światłowodzie wynosi:

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (E_r H_\theta^* - E_\theta H_r^*) r dr d\phi \quad (47)$$

Moc rozprzestrzeniająca się w warstwie i światłowodzie o symetrii osiowej jest:

$$P_i = \pi \int_{a_{i-1}}^{a_i} (E_r H_\theta^* - E_\theta H_r^*) r dr \quad (48)$$

Moce $P_i(a_i, m, l)$ są parametrem modowym i wygodnie jest zgrupować je w postaci macierzy:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & & 0 \\ 0 & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_I \end{bmatrix} \quad (49)$$

5.3. Dyskretny zapis równania dyspersyjnego

Korzystając z następujących zależności:

$$\beta^2 = k_1^2 (1 - 2 \Delta u^2 / V^2) \quad (50)$$

$$n_m N_m \int_0^{\infty} p(r) r dr = \int_0^{\infty} n(r) N(r) p(r) r dr \quad (51)$$

oraz wykorzystując dyskretne postaci profilu współczynnika załamania i mocy modowej, równanie dyspersyjne dla światłowodu wielowarstwowego można zapisać jako dyskretną zależność np. na opóźnienie modowe:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{k}{c\beta P} \sum_{i=1}^l n_i N_i p_i \approx \\ &\approx [c(1 - 2 \Delta u_j^2 / V^2)]^{-1} \frac{\sum_{i=1}^l n_i^2 p_i}{n_j^2 P} \end{aligned} \quad (52)$$

Dla wszystkich modów światłowodu tworzymy następującą macierz opóźnień modowych:

$$\underline{\tilde{\tau}} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_{11} & \tilde{\tau}_{12} & \dots & \tilde{\tau}_{1l_{max}} \\ \tilde{\tau}_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\tau}_{m_{max}l} & \dots & \dots & \tilde{\tau}_{m_{max}l_{max}} \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} m - \text{azymutalna} \\ l - \text{południkowa} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Liczba} \\ \text{modowa} \end{array} \quad (53)$$

5.4. Przedstawienie zagadnienia własnego światłowodu w postaci macierzowej.

W rdzeniu światłowodu warunek skończonej wartości pola E_z na osi i na granicy rdzeń-płaszcz implikuje wybór rozwiązania w postaci funkcji Bessela pierwszego rodzaju. W modelu warstwowym światłowodu (profil typu multistep-index)

można tak zapisać pole w pierwszej warstwie:

$$E_{z(1)} = A J_m(u_1, \rho_1) \exp j \varphi ;$$

$$\varphi = \omega t - \beta z - m \phi$$
(54)

gdzie: $u_1 = a(k_1^2 - \beta^2)^{1/2}$

Analogicznie dla składowej H_z pola magnetycznego zachodzi:

$$H_{z(1)} = B J_m(u_1, \rho_1) \exp j \varphi$$
(55)

Pozostałe istotne składowe, wyznaczone z równań Maxwella są dla obszaru pierwszej warstwy:

$$E_{r(1)} = - \frac{j a_1 \beta A J_m'}{u_1} - \frac{\omega \mu_0 a_1^2 m B J_m}{u_1^2 r}$$
(56)

$$E_{\phi(1)} = \frac{a_1^2 m \beta A J_m}{u_1^2 r} + \frac{j \omega \mu_0 a_1 B J_m'}{u_1}$$
(57)

We wzorach powyższych pominięto dla wygody powtarzający się czynnik $\exp(j\varphi)$.

Stosując odpowiednie kombinacje liniowe pól (54) - (57) można znacznie uprościć zapis. W dalszych rozważaniach będą stosowane następujące kombinacje:

$$E_{(r)}^{\pm} = E_r \pm j E_{\theta}$$
(58)

$$\phi_z^{\pm} = j E_z + \frac{\omega \mu}{\beta} H_z$$
(59)

Wzory (58) - (59) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \phi_z^- \\ E^- \\ \phi_z^+ \\ E^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j & -\frac{G}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -j \\ 0 & -\frac{G}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \\ E_r \\ E_\theta \end{bmatrix} \quad (60)$$

Związek pomiędzy ϕ_z^\pm i E_z^\pm wyznaczony z równań Maxwella wynosi:

$$\beta \phi_z^\pm = \left(\frac{d}{dr} \pm \frac{m \pm 1}{r} \right) E_z^\pm \quad (61)$$

Ze wzorów (54)-(57), korzystając z podstawowych własności

funkcji Bessela otrzymano:

$$J_m' + \frac{a_1 m}{u_1 r} J_m = J_{m-1} \quad \text{oraz} \quad -J_m' + \frac{a_1 m}{u_1 r} J_m = J_{m+1}$$

$$E^- = J_{m-1} \frac{a_1}{u_1} (\omega \mu_0 B - j\beta A) = J_{m-1} A_1^{m-1} \quad (62)$$

$$E^+ = J_{m+1} \frac{a_1}{u_1} (\omega \mu_0 B + j\beta A) = J_{m+1} A_1^{m+1} \quad (63)$$

$$\phi_z^- = -J_m \frac{u_1}{\beta a_1} A_1^{m-1} \quad (64)$$

$$\phi_z^+ = J_m \frac{u_1}{\beta a_1} A_1^{m+1} \quad (65)$$

Wzory (62) - (65) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\underline{\Psi}_{r_1} = \begin{bmatrix} \phi_z^- \\ E^- \\ \phi_z^+ \\ E^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{u_1}{\beta a_1} J_m & 0 \\ J_{m-1} & 0 \\ 0 & \frac{u_1}{\beta a_1} J_m \\ 0 & J_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{m-1} \\ A_1^{m+1} \end{bmatrix} \quad (66)$$

$r = a_1$

W ostatniej warstwie światłowodów ($\rho > 1$), warunek malenia wartości pola wzdłuż współrzędnej r implikuje wybór rozwiązania w postaci zmodyfikowanej funkcji Hankela pierwszego rodzaju:

$$E_{z(I)} = CH_m(W_I \rho) \quad (67)$$

$$H_{z(II)} = DH_m(W_I \rho) \quad (68)$$

$$E_{r(II)} = \frac{-j\alpha_I \beta CH_m^i}{W_I} + \frac{\omega \mu_0 a_I^2 m DH}{W_I^2 r} \quad (69)$$

$$E_{\phi(II)} = \frac{a_I^2 m \beta CH_m}{W_I^2 r} - \frac{\omega \mu_0 a_I DH_m'}{W_I} \quad (70)$$

gdzie: $W_I = a_I^2 (\beta^2 - k_I^2)$.

Dla obszaru płaszcza otrzymuje się macierz, analogiczną do (66).

$$\underline{\Psi}_{r(II)} = \begin{bmatrix} \phi_z^- \\ E^- \\ \phi_z^+ \\ E^+ \end{bmatrix}_{r=a_I} = \begin{bmatrix} -\frac{W_I}{\beta a_I} H_m & 0 \\ H_{m-1} & 0 \\ 0 & -\frac{W_I}{\beta a_I} H_m \\ 0 & H_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_I^{m-1} \\ A_I^{m+1} \end{bmatrix} \quad (71)$$

Pola w sąsiednich warstwach można związać ze sobą za pośrednictwem iloczynu macierzy przejścia $\underline{\Pi}_i$ oraz macierzy warunków brzegowych \underline{T}_i w następujący sposób [9]:

$$\underline{\Psi}_{r=a_{i+1}} = \underline{\Pi}_i \underline{T}_i \underline{\Psi}_{r=a_i} \quad (72)$$

Macierz $\underline{\Pi}_i (a_{i+1}, a_i)$ opisuje pole w warstwie $i+1$, jej zadaniem jest połączenie pola w punkcie $r=a_i$ z polem w punkcie $r=a_{i+1}$ w tej warstwie. Dzięki operacjom na li-

niowych kombinacjach pola, macierz przejścia można sprowadzić do postaci klatkowej diagonalnej:

$$\underline{\Pi}_i = \begin{bmatrix} \underline{\Pi}^- & \begin{matrix} 00 \\ 00 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 00 \\ 00 \end{matrix} & \underline{\Pi}^+ \end{bmatrix} \quad (73)$$

gdzie macierze $\underline{\Pi}^-$, $\underline{\Pi}^+$ można wyznaczyć z równań pola napisanych dla warstwy i dla dwóch warunków $k_i > \beta$ oraz $k_i < \beta$. Drugi z tych warunków określa odcięcie modowe dla badanej warstwy.

\underline{T}_i jest macierzą, w której zapisane są, w odpowiedni sposób, warunki brzegowe w punktach $r=a_i$ pomiędzy warstwami i oraz $i+1$.

$$\underline{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\Delta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\Delta \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{n_{i-1}^2}{n_i^2 - 1} \quad (75)$$

Przybliżenie we wzorze (74) dotyczy światłowodów słabo propagujących.

Pole w płaszczyźnie (ostatnia warstwa w modelu multistep-index) może być otrzymane przez kolejne transformacje pola warstwy pierwszej zgodnie z (72).

$$\underline{\Psi}_{r=a_I} = \underline{F} \underline{\Psi}_{r=a_1} \quad (76)$$

$$\underline{F} = \underline{T}_I \underline{\Pi}_{I-1} \underline{T}_{I-1} \dots \dots \underline{\Pi}_2 \underline{T}_2 \underline{\Pi}_1 \underline{T}_1 \quad (77)$$

Pola w pierwszej i ostatniej warstwie są znane, można więc z zależności (76) wyznaczyć macierz \underline{F} oraz otrzymać równanie charakterystyczne dla modów falowodowych światłowodu typu multistep-index. Wstawiając (66) i (71) do równania (76) otrzymano:

$$\begin{bmatrix} -F_{11} \frac{u_1}{\beta} J_m(u_1, a_1) + F_{12} J_{m-1}^{(u_1, a_1)} ; \frac{w}{\beta} H_m(w a_1) ; F_{13} \frac{u_1}{\beta} J_m(u_1, a_1) + F_{14} J_{m+1}^{(u_1, a_1)} ; 0 \\ -F_{21} \frac{u_1}{\beta} J_m + F_{22} J_{m-1} ; -H_{m-1} ; F_{23} \frac{u_1}{\beta} J_m + F_{24} J_{m+1} ; 0 \\ -F_{31} \frac{u_1}{\beta} J_m + F_{32} J_{m-1} ; 0 ; F_{33} \frac{u_1}{\beta} J_m + F_{34} J_{m+1} ; \frac{w}{\beta} H_m \\ -F_{41} \frac{u_1}{\beta} J_m + F_{42} J_{m-1} ; 0 ; F_{43} \frac{u_1}{\beta} J_m + F_{44} J_{m+1} ; -H_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_I^{m-1} \\ A_I^{m-1} \\ A_I^{m-1} \\ A_I^{m-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (78)$$

Równanie charakterystyczne modów falowodowych światłowodu o profilu multistep-index można zapisać w postaci następującego wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} F_{21} - J_- F_{22} - H_- (F_{11} - J_- F_{12}) & ; & F_{23} + J_+ F_{24} + H_- (F_{13} + J_+ F_{14}) \\ F_{41} - J_- F_{42} - H_+ (F_{31} - J_- F_{32}) & ; & F_{43} + J_+ F_{44} + H_+ (F_{33} + J_+ F_{34}) \end{vmatrix} = 0 \quad (79)$$

$$J_{\pm} = \frac{\beta}{u_1} \frac{J_{m\pm 1}(u_1 a_1)}{J_m(u_1 a_1)} \quad ; \quad H_{\pm} = \frac{\beta}{w_1} \frac{H_{m\pm 1}(w_1 a_1)}{H_m(w_1 a_1)}$$

5.5. Światłowód typu multistep-index, słabo propagujący

Dla włókna słabo propagującego macierz \underline{T}_i jest diagonalna oraz pole elektromagnetyczne przedstawione czterema składowymi (60) można rozdzielić na dwie niezależne grupy odpowiadające rodzajom HE i EH:

$$\underline{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \Delta \end{bmatrix} \quad (80)$$

Wzory (72), (76), (77) przybierają dla włókna słabo propagującego postać: - transformacja pola pomiędzy sąsiednimi warstwami:

$$\begin{bmatrix} \phi_z^{\pm} \\ E^{\pm} \end{bmatrix}_{r=a_{i+1}} = \underline{\Pi}^{\pm} \underline{T}_i \begin{bmatrix} \phi_z^{\pm} \\ E^{\pm} \end{bmatrix}_{r=a_i} \quad (81)$$

- całkowita transformacja pola:

$$\begin{bmatrix} \phi_z^{\pm} \\ E^{\pm} \end{bmatrix}_{r=a_I} = \underline{F}_{ij} \begin{bmatrix} \phi_z^{\pm} \\ E^{\pm} \end{bmatrix}_{r=a_1} \quad (82)$$

$$F = \underline{T}_I \underline{\Pi}_{I-1}^{\pm} \underline{T}_{I-1} \dots \dots \dots \underline{\Pi}_2^{\pm} \underline{T}_2 \underline{\Pi}_1^{\pm} \underline{T}_1 \quad (83)$$

Pole w pierwszej warstwie wynosi:

$$\begin{bmatrix} \phi_z^{\pm} \\ E^{\pm} \end{bmatrix} = A_1^{m\pm 1} \begin{bmatrix} \pm \frac{u_1}{\beta} J_m(u_1 \rho_1) \\ J_{m\pm 1} \end{bmatrix} \quad (84)$$

Pole w płaszczy wynosi:

$$\begin{bmatrix} \phi_z^{\pm} \\ E_z^{\pm} \end{bmatrix} = A_I^{m \pm 1} \begin{bmatrix} -\frac{w_I}{a_I \beta} H_m(w_I \rho_I) \\ H_{m \pm 1}(w_I \rho_I) \end{bmatrix} \quad (85)$$

Równanie charakterystyczne światłowodu słabo propagującego multistep-index posiada postać:

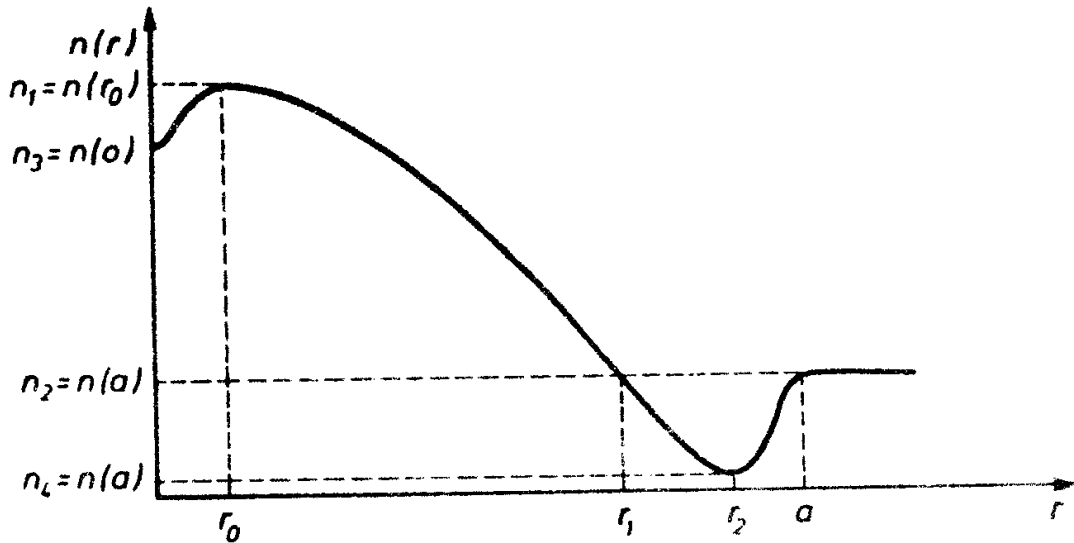
$$H_{\pm}(F_{11}^{\pm} \pm J_{\pm} F_{12}^{\pm}) + F_{21}^{\pm} \pm J_{\pm} F_{22}^{\pm} = 0 \quad (86)$$

6. OPTIMALIZACJA PROFILU WSPÓŁCZYNNIKA ZAŁAMANIA ZA POMOCĄ METODY WARIACYJNEJ [12]

Założmy, ogólniejszy niż przedstawiony we wzorze (10), profil współczynnika załamania /rys.2/, uwzględniający dolinę osiową /wynikającą z metody produkcji włókna - CVD/ i dolinę na granicy rdzeń-płaszcz /wprowadzoną celowo dla zmniejszenia dyspersji i zmniejszenia roli tego obszaru w propagacji światła/

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 [1 - 2 \Delta f(r)] & ; \quad \rho = r/a \leq 1 \\ n_2^2 = n_1^2 [1 - 2 \Delta] & ; \quad \rho > 1 \end{cases} \quad (87)$$

$$f(r) = \sum_{i=1}^I \xi_i (\rho^{2i} - \rho_0^{2i}) \quad (88)$$



Rys.2. Badany profil współczynnika załamania światła z doliną osiową /pochodzącą od metody CVD/ i doliną na granicy rdzeń-płaszcz, zwany profilem typu wygięzione W

Problem polega, w tym wypadku, na doborze optymalnego kompletu stałych ξ_1 , i nie może być łatwo rozwiązany za pomocą metody perturbacyjnej. Funkcjonał dyspersyjny można zapisać w postaci:

$$\beta^2 = \frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} k^2 n^2(r) |\Psi|^2 r dr d\phi - \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\nabla \Psi|^2 r dr d\phi}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\Psi|^2 r dr d\phi} = \quad (89)$$

$$= k_1^2 (1 - 2 \Delta u^2 / V^2)$$

stąd wynika /zarys wyprowadzenia przedstawiono w części I/

$$\frac{\beta}{k} \frac{d\beta}{dk} = n_1 N_1 \left[1 - \Delta \left(2 - \frac{n_1 \lambda \Delta'}{N_1 \Delta} \right) \frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r) p(r) r dr d\phi}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} p(r) r dr d\phi} \right] \quad (90)$$

gdzie $\Psi / r, \theta /$ - pole elektryczne w światłowodzie, $p/r = |\Psi|^2$ - gęstości mocy.

Pola w płaszczyźnie i rdzeniu można przedstawić następująco:

co:

$$\Psi_{p\bar{l}}(r, \phi) = (1/a\sqrt{\pi}) \exp(-j_m \theta) \bar{K}_m ;$$

$$\bar{K}_m = K_m(w\rho) / K_m(w) \quad (91)$$

$$\Psi_{rdz}(r, \phi) = (1/a\sqrt{\pi}) \exp(-j_m \theta) \sum C_K J_{mk} ;$$

$$J_{mk} = J_m(u_k \rho) / J_m(u_k) \quad (92)$$

gdzie: K_m - zmodyfikowana funkcja Hankela m -tego rzędu, J_m -
 - funkcja Bessela, u_k - k -ty pierwiastek funkcji Bessela,
 $C_k = \text{const}$. Funkcje J_{mk} , J_{ml} spełniają warunek ortogonalności

$$\int_0^a J_{mk} J_{ml} r dr = \delta_{k,l} \quad (93)$$

gdzie $\delta_{k,l}$ - delta Kroneckera.

Warunek ciągłości pól na granicy rdzeń-płaszcz można przed-
 stawić w przybliżonej postaci /przybliżenie dotyczy warunku
 słabej propagacji/:

$$\left. \frac{r}{\Psi_{rdz}} \frac{d\Psi_{rdz}}{dr} \right|_{r=a} = \left. \frac{r}{\Psi_{p\bar{l}}} \frac{d\Psi_{p\bar{l}}}{dr} \right|_{r=a} = \frac{w K'_m}{K_m} \quad (94)$$

Wstawiając (91), (92), (94) do (89) można wyrazić β^2 pop-
 rzez stałe C_k

$$\beta^2 = \frac{[\sum \sum C_k C_l (k_l^2 a^2 - u_k^2) \delta_{kl} - v^2 \sum \sum C_k C_l A_{mkl} - 2w K_{m-1} \sum \sum C_k C_l / K_m]}{a^2 \sum_k \sum_l C_k C_l \delta_{kl}} \quad (95)$$

$$A_{mkl} = \int_0^a f(r) J_{mk} J_{ml} r dr = \sum \xi_i (2 \int_0^1 x^{2i+1} J_{mk} J_{ml} dx - \rho_0^{2i} \delta_{kl}) \quad (96)$$

Z warunku stacjonarności stałej propagacji β ze względu na małe zmiany Ψ [2.I] /czyli również małe zmiany współczynników c_k / wynika $\partial\beta^2/\partial c_k=0$, $k=1,2,\dots,L$, Warunek ten w odniesieniu do wzoru (95) daje:

$$\sum_{k=1}^L c_k S_{kl} = 0 \quad (97)$$

$$S_{kl} = - \frac{2\omega K_{m-1}}{K_m} \diamond (u^2 - u_k^2) \delta_{kl} - V^2 A_{mkl} \quad (98)$$

Rozwiązanie układu równań jednorodnych (97) istnieje, gdy spełniony jest warunek /równanie charakterystyczne/:

$$\det(S_{kl}) = 0 \quad (99)$$

Wstawiając ponownie (87), (91), (92) do równania dyspersyjnego (90) otrzymuje się:

$$\frac{\beta}{k} \frac{d\beta}{d\omega} = n_1 N_1 \left\{ 1 - \Delta \left(2 - \frac{n_1 \lambda \Delta'}{N_1 \Delta} \right) \frac{\sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L c_k c_l (A_{mkl} + 1/K_m - 1)}{\sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L c_k c_l (\delta_{kl} + 1/K_m - 1)} \right\} \quad (100)$$

gdzie $K_m = H_m^2 / H_{m-1} H_{m+1}$

$$\bar{\tau} = \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{N_1}{c} \frac{1 - \Delta \left(2 - n_1 \lambda \Delta' / N_1 \Delta \right) \sum \sum c_k c_l (A_{mkl} + 1/K_m - 1)}{(1 - 2\Delta u^2 / V^2)^{1/2} \sum \sum c_k c_l (\delta_{kl} + 1/K_m - 1)} \quad (101)$$

Za wskaźnik jakości optymalizacji można przyjąć /podobnie jak w metodzie perturbacyjnej/ wariancję różnicowego czasu opóźnienia dla M-modów:

$$G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\tau_i - \bar{\tau})^2; \quad \bar{\tau} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \tau_i \quad (102)$$

7. ZAKOŃCZENIE

Transmitancję systemu telekomunikacji światłowodowej można zapisać w postaci następującego równania [6]:

$$Y(\omega) = C_y \cdot R \cdot D \cdot F \cdot S \cdot A \cdot C_x \cdot X(\omega) \quad (103)$$

sygnał wyjściowy odbiornik światłowod nadajnik sygnał wejściowy

gdzie poszczególne symbole oznaczają transmitancję następujących elementów systemu: C_y - dekodery, R - wzmacniacz odbiornika, D - dekodery, F - światłowod, S - źródło optyczne wraz z układem sprzężenia z włóknem, A - zasilacz źródła, C_x - koder.

Rozważmy problem optymalizacji pasmowej systemu. Zasadniczym zagadnieniem optymalizacji globalnej wychodzącej z zależności (103) jest przedstawienie tej transmitancji w postaci analitycznej. W takim ujęciu np. światłowod wygodnie jest przedstawić w postaci odpowiedniego filtra dolnoprzepustowego o transmitancji [7.I.]

$$F_0(\omega) = A \exp(-\omega^2/2\omega_0^2) \exp(-j\omega\tilde{\tau}) \quad (104)$$

gdzie: $A = \text{const}$, $\omega_0 = A_1/\sqrt{L}$ - częstotliwość odcięcia, $\tilde{\tau} = A_2 \cdot L$ - czas propagacji impulsu, L - długość światłowodu, A_1, A_2 - stałe:

$$F(\omega) = \exp(-2\alpha l) \exp(-\omega^2 l/2\omega_0^2 l_0) \exp(-j\omega\tilde{\tau} l/l_0) \quad (105)$$

gdzie: L_0 - długość światłowodu dla której zmierzono ω_0 i $\tilde{\tau}$.
Ze wzoru (105) widać, że tłumienie liniowe tak opisanego światłowodu wynosi:

$$\alpha_L = 2\alpha + \omega^2/2\omega_0^2 l_0 \quad (106)$$

Rozważmy, jak będzie transmitowany optyczny sygnał modulowany częstotliwościowo w najprostszym modelu światłowodu. Niech optyczny sygnał wejściowy we włóknie jednomodowym posiada postać:

$$P_{we}(t) = \exp(-t/t_{we}) \exp i(\omega_0 t - \frac{1}{2} \dot{\omega} t^2) \quad (107)$$

gdzie t_{we} - stała określająca szerokość impulsu wejściowego, $\dot{\omega} = \partial\omega/\partial t$ - szybkość zmian częstotliwości kątovej.

Widmo sygnału wejściowego (107) jest równe: $A = \frac{1}{t_{we}} + i \frac{\dot{\omega}}{2}$

$$P_{we}(\omega) = (\pi/A)^{1/2} \exp[-(\omega - \omega_0)^2/4A] \quad (108)$$

Jeśli charakterystykę częstotliwościową światłowodu przyjąć w uproszczonej postaci, traktując włókno wyłącznie jako przesuwnik fazy o przesunięciu zależnym od długości włókna l .

$$Z(\omega) = \exp[-i\beta(\omega)l] \quad (109)$$

to sygnał na wyjściu można przedstawić w postaci [3.IV.]

$$P_{wy}(t, l) = (1/4\pi A)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(\omega - \omega_0)/4A] \exp i(\omega t - \beta z) d\omega \quad (110)$$

Widmo powyższej funkcji jest w ogólnym przypadku bardzo złożone. Można jednak zauważyć, że widmo sygnału modulowanego amplitudowo lub częstotliwościowo jest znacznie mniejsze od ω_0 , co pozwala na rozłożenie stałej propagacji w szereg potęgowy ω_0 . Uwzględniając pierwsze trzy wyrazy otrzymuje się:

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \beta_2(\omega - \omega_0)^2 \quad (111)$$

Dla tak określonej stałej propagacji można obliczyć całkę (110). Zdefiniujemy współczynnik kompresji sygnału impulsowego modulowanego częstotliwościowo:

$$K_k = t_{we} / t_{wy} \quad (112)$$

Maksymalny współczynnik kompresji, możliwy do otrzymania przy optymalnym wyborze parametrów w (110), przy założeniu $\Delta \omega t_{we} \gg 1$

$$K_k = t_{we}^2 \omega / 2 \quad (113)$$

gdzie $\Delta \omega$ dewiacja częstotliwościowa sygnału wejściowego. Optymalna długość światłowodu, dla której wyprowadzono wzór (113) jest:

$$L_{opt} = \frac{1}{2 \beta_2 \omega} = \frac{t_{we}^2}{4 \beta_2 K_k} \quad (114)$$

Część IV

ANALIZA DYSPERSJI ZA POMOCĄ RÓWNAŃ MODOWEJ MOCY SPRZEŻONEJ MARCUSE' A.

Część I-III dotyczyły światłowodu idealnego modowo /założenie c. część I/. W niniejszej części rezygnuje się z tego założenia i zakłada występowanie zjawiska mieszania modów.

1. TEORIA MIESZANIA MODÓW

W falowodzie rzeczywistym z niedoskonałościami występuje zjawisko przemiany modów. Niedoskonałości można sklasyfikować w następujący sposób: straty w materiale dielektryka, zakrzywienie osi światłowodu, niejednorodność materiału dielektrycznego, nieidealność powierzchni odbijającej rdzeń-płaszcz. Niniejsza część dotyczy analizy rodzajów nieidealności powierzchni rdzeń-płaszcz i jej wpływu na zjawisko mieszania modów oraz dyspersję międzymodową.

Na zjawisko mieszania modów również duży wpływ wywierają straty w materiale światłowodu. Jeżeli materiał dielektryczny jest stratny, to stała propagacji modowej jest wielkością zespoloną. Jednakże, dla małych strat materiału, straty poszczególnych modów włókna słabo propagującego są równe stratom fali płaskiej w materiale nieograniczonym przy założeniu, że straty materiału rdzenia i płaszcza są takie same. W innych przypadkach każdy mod wykazuje inne straty i zjawisko mieszania modów znacznie się komplikuje.

Istnieją dwie podstawowe metody analizy wpływu niejednorodności powierzchni rdzeń-płaszcz na strukturę modową falowodu. Pierwsza metoda /modów idealnych/ polega na przedstawieniu modów falowodu zaburzonego poprzez mody odpowiedniego falowodu idealnego /współczynniki rozwinięcia są funkcjami z / . Drugi sposób, nazwany metodą modów lokalnie normalnych, polega na znalezieniu lokalnej struktury modowej falowodu o zaburzonej wielkości promienia rdzenia. Same mody normalne nie są rozwiązaniami równań Maxwella, a dopiero jest ich superpozycja.

Dla prostego przypadku sinusoidalnego zniekształcenia ścian falowodu, mody falowodowe są sprzężone ze sobą jeśli częstotliwość mechaniczna zniekształcenia Θ_z jest związana ze stałymi propagacji modów jak $\Theta_z = \beta_i - \beta_j$. Wzajemnie sprzężone mogą być mody falowodowe oraz mody falowodowe z radiacyjnymi. Transfer mocy do modu falowodowego powoduje zmianę kształtu impulsu propagowanego w światłowodzie. Transfer mocy do modów radiacyjnych dodaje się do innych strat i nie powoduje zmiany kształtu impulsu. Ważne jest aby znać ilościowo

sprzężanie między modami dla różnych typów niedoskonałości falowodu. Znajomość współczynników sprzężenia pozwala określić wymagania na tolerancję wykonania włókna, jeśli narzucone są warunki np. na całkowite jego straty lub na zmniejszenie dyspersji międzymodowej za pomocą mieszania modów. Z tego punktu widzenia mieszanie modów może być efektem pożądanym: np. gdy odcinek włókna jest anteną dielektryczną lub sprzęgaczem.

We włóknie idealnym mody pozostają spolaryzowane liniowo. We włóknie rzeczywistym polaryzacja zmienia się szybko. Zmiana polaryzacji może być przypisana deformacjom rdzenia /eliptyczność/, a strata polaryzacji liniowej może być opisana jako mieszanie między modami spolaryzowanymi ortogonalnie. Deformacje rdzenia w materiale izotropowym mogą powodować mieszanie między modami spolaryzowanymi prostopadle wyłącznie poprzez ich składowe wzdluzne pola. Zwykle wpływ składowych E_z na proces mieszania pomija się, gdyż jest on znacznie mniejszy niż wpływ składowych poprzecznych. W przypadku jednak nieobecności mieszania składowych poprzecznych należy uwzględnić mieszanie składowych E_z .

Jak już zauważono, wyłącznie eliptyczne deformacje rdzenia powodują mieszanie ze sobą modów spolaryzowanych prostopadle. Nawet dla bardzo słabej deformacji eliptycznej i niewielkich składowych pola E_z całkowita wymiana mocy / a więc zmiana polaryzacji o 90° / występuje w światłowodzie na drodze kilku centymetrów. Odległość ta maleje dla modów wyższego rzędu. W rzeczywistym falowodzie, w którym występują przypadkowe zniekształcenia rdzenia, eliptyczność jest wol-

no zmienna co do wartości i kierunku, a to powoduje przypadkowe zmiany polaryzacji. Oprócz tego w falowodzie eliptycznym [1] dwa odpowiadające sobie mody spolaryzowane ortogonalnie /parzysty i nieparzysty/ posiadają nieco różne wartości stałej propagacji. Skutkiem tego dwa prostopadłe spolaryzowane mody przesuwają się nieco względem siebie i polaryzacja z liniowej staje się eliptyczna. W falowodzie wielomodowym obraz jest jeszcze bardziej skomplikowany, bo wszystkie mody mieszają się ze swoimi prostopadłymi polaryzantami i polaryzacja fali wypadkowej staje się przypadkowa przypominając polaryzację światła niekoherentnego. Ta tendencja fali do depolaryzacji silnie wzrasta przy słabej anizotropii, która może być spowodowana przez naprężenia w rdzeniu.

W przypadku włókna rzeczywistego nie znamy funkcji zniekształcenia powierzchni rdzeń-płaszcz. Wygodnie jest rozpatrywać problem mieszania modów i strat radiacyjnych włókna metodami statystycznymi. Każda składowa Fouriera funkcji zniekształcenia odpowiedzialna jest za mieszanie pomiędzy wybranymi modami falowodowymi, ewentualnie za ucieczkę mocy ze światłowodu w określonym kierunku.

Dla fali ciąglej propagowanej w światłowodzie zjawisko mieszania modów można opisać za pomocą zmian średniej mocy modowej wzdłuż osi falowodu. Zmiany te opisują równania Marcouse'a. W przypadku słabego mieszania między modami /moc modowa zmienia się niewiele na drodze λ /

$$dP_m/dz = -2\alpha_m P_m + \sum_{m=1}^M h_{ml} (P_l - P_m) \quad (1)$$

$$h_{ml} = |K_{ml}|^2 |F(\beta_m - \beta_l)|$$

$P_m = |E_m|^2$ - średnia moc m-tego modu, K_{ml} - stała zależna od geometrii zniekształcenia powierzchni rdzeń-płaszcz, F-przekształcenie Fouriera funkcji zniekształceń.

2. PROPAGACJA IMPULSU W ŚWIATŁOWODZIE WIELOMODOWYM Z MIESZANIEM MODÓW

Teoria mieszania modów nie zawiera zmiennej czasowej, więc odnosi się tylko do przypadku fali ciągłej. Z punktu widzenia telekomunikacji optycznej istotne jest, aby znać własności światłowodu wielomodowego propagującego impuls, na podstawie średniej mocy modowej, która jest teraz funkcją czasu.

Propagacja impulsu o dowolnym kształcie opisana jest funkcją o następującej postaci:

$$P_m(z, t) = P_m(z - v_m \cdot t) \quad (2)$$

gdzie: v_m - jest prędkością grupową m-tego modu.

Moc impulsu niesiona w m-tym modzie wynosi:

$$dP_m/dz = \partial P_m / \partial z + \partial P_m / v_m \partial t \quad (3)$$

Równania (1) i (3) opisują moc modową impulsu. Jeśli warunek początkowy przyjmujemy w postaci:

$$P_m(0, z) = P_0 \exp(-2t/\tau)^2 \quad (4)$$

to dla braku sprzężenia międzymodowego rozwiązanie jest:

$$P_m(z, t) = c_m \exp(-2 \alpha_m z) \exp \left\{ - [t - z/v_m]^2 / (\tau/2)^2 \right\} ; \quad (5)$$

$$c_m = \text{const}$$

Każdy mod niezależnie propaguje impuls Gaussa. Gdy pojedyncze impulsy modowe zachodzą na siebie, impuls wyjściowy jest rozszerzony. Gdy światłowód jest wystarczająco długi impuls wyjściowy może mieć zniekształcony grzbiet lub nawet możemy otrzymać serię impulsów.

Dla włókna słabo propagującego szerokość impulsu wynosi:

$$\Delta \tau_o = L(n_1 - n_2)(1 - \pi/v) c \approx \frac{L}{c} (n_1 - n_2) = L \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) \quad (6)$$

gdzie dokonane przybliżenie jest dla włókna propagującego bardzo dużą liczbą modów. Szerokość ta jest proporcjonalna do długości światłowodu L.

W przypadku występowania mieszania modów odpowiedź włókna na dowolne pobudzenie jest również funkcją Gaussa, jeśli szerokość impulsu wyjściowego jest znacznie większa od szerokości impulsu pobudzającego. Jeśli światłowód propaguje tylko dwa mody, to szerokość impulsu wyjściowego

$$\text{jest: } \Delta \tau_b = \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) h (2L)^{1/2} [(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + h^2]^{-3/4} \quad (7)$$

Szerokość ta jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z L. Separację między dwoma impulsami niesionymi przez dwa wymienione mody określa wzór (6), więc stosunek długości impulsu wyjściowego, dla dwumodowego przypadku z mieszaniem i bez, można zapisać:

$$R = \sqrt{2} h / \left\{ [(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + h^2]^{3/4} \sqrt{L} \right\} \quad (8)$$

Wielkość R określa względne zmniejszenia zniekształcenia

impulsu spowodowane przez mieszanie modów. Widać, że R maleje ze wzrostem długości światłowodu. Gdy mieszanie modów jest słabe w porównaniu z różnicą strat modowych $h \ll |\alpha_1 - \alpha_2|$, to (8) można napisać:

$$R = \sqrt{2} h / (\alpha_1 - \alpha_2)^{3/2} \sqrt{L} \quad (9)$$

a więc szerokość impulsu wzrasta ze wzrostem siły mieszania. W przypadku dużych strat różnicowych stacjonarny rozkład mocy jest taki, że jej całość jest w modzie mniej stratnym. Mieszanie modów powoduje przepływ mocy do modu bardziej stratnego, więc szerokość impulsu wyjściowego będzie wzrastać wraz ze współczynnikiem sprzężenia.

$$\text{Dla silnego mieszania } h \gg |\alpha_1 - \alpha_2| \quad (10)$$

$$R = (2/hL)^{1/2}$$

a więc szerokość impulsu zmniejsza się wraz ze wzrostem siły sprzężenia /odwrotnie niż w przypadku słabego mieszania/. W przypadku silnego mieszania stacjonarny rozkład mocy jest taki, że jest ona podzielona równo pomiędzy mody. Wzrost współczynnika mieszania ułatwia przepływ mocy pomiędzy modami i nie zachodzi rozdzielanie na osobne impulsy modowe.

W światłowodzie wielomodowym straty modowe α_m na ogół wzrastają ze wzrostem liczby modowej. W przypadku dostatecznie słabego mieszania /mieszaniu podlegają jedynie sąsiadujące mody/ jedynie mod najwyższego rzędu jest wysoko stratny, podczas gdy pozostałe mody mają straty równe i stosunkowo niewielkie. Straty te rosną jednak wraz ze wzrostem siły sprzężenia między modami. Można więc powiedzieć, że redukcję szerokości impulsu poprzez efekt mieszania modów

opłacamy zwiększonymi stratami falowodu. Można temu zjawisku przeciwdziałać w taki sposób, że projektujemy widmo funkcji zniekształcenia tak, aby współczynniki mieszania modów najwyższego rzędu były jak najmniejsze.

3. DYSPERSJA W ŚWIATŁOWODZIE Z BARDZO DUŻĄ LICZBĄ MODÓW FALOWODOWYCH

W telekomunikacji światłowodowej często korzysta się ze źródeł optycznych niekoherentnych /DEL/, w związku z czym, aby uzyskać duży współczynnik akceptacji mocy przez włókno stosuje się światłowody propagujące bardzo dużą liczbę modów.

Gdy światłowód wielomodowy pobudzany jest impulsem w taki sposób, że cała moc znajduje się w jednym modzie, to na skutek mieszania międzymodowego moc rozdzieli się pomiędzy mody. W przypadku istnienia w światłowodzie wielkiej ilości modów i przyjęciu, że najsilniejsze mieszanie zachodzi pomiędzy sąsiednimi modami, proces ten przypomina zjawisko dyfuzji. Dla dużej ilości modów charakterystyczne parametry modowe zmieniają się pomiędzy sąsiednimi modami tak nieznacznie, że ich wartości dyskretne mogą być zastąpione przez zmienne ciągłe.

Rozważmy /dla warunku $\partial/\partial y=0$ / modowy kąt propagacji θ w przybliżeniu przyosiowym, $\sin\theta=\text{tg}\theta=\theta$, $\cos\theta=1$

$$\beta = (k_1^2 - u^2/a^2)^{1/2} ; \quad u = ak_1 \sin \theta \approx ak_1 \theta \quad (11) \quad (12)$$

$$\beta = k (n_1^2 - \theta^2)^{1/2} \quad (13)$$

Opóźnienie grupowe wynosi:

$$\tilde{\tau} = 1/V_g(\theta) = d\beta/cdk = \frac{n_1}{c} - \frac{\theta^2}{2cn_1} - \frac{\theta k}{cn_1} \frac{d\theta}{dk} ; \quad (14) \quad (15)$$

$$\frac{d\theta}{dk} = - \frac{\theta}{k}$$

$$1/V_g(\theta) - 1/V_1 = \theta^2/2cn_1$$

Przybliżenie przyosiowe we włóknie z dużą ilością modów jest równoważne stwierdzeniu, że rozpatrywany mod jest daleki od swego odcięcia. Można więc założyć, że argument falowy u spełnia warunek:

$$u \approx M \cdot \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

gdzie: M - złożona liczba modowa, $M=m+2$

W takim przybliżeniu modowy kąt propagacji wynosi ze wzorów (12) i (16) [2]:

$$\theta = M \lambda / 4 a n_1 \quad (17)$$

Dla sąsiednich modów kierunki propagacji różnią się o kąt:

$$\Delta\theta = \lambda / 4 a n_1 = \pi / 2 a k_1 \quad (18)$$

lub o kąt $\lambda / 4a$ na zewnątrz włókna.

Przekształćmy dyskretny problem własny w zagadnienie opisane ciągłą zmienną θ . Zakładając mieszanie jedynie między sąsiednimi modami, równanie (1) można zapisać:

$$dP_m/dz = - \alpha_m P_m + h_m (P_{m+1} - P_m) + h_{m-1} (P_{m-1} - P_m) \quad (19)$$

Translacja w problem ciągły wymaga zastąpienia różnic mocy w sąsiednich modach przez odpowiednie różniczki. Wyprowa-

dając oznaczenie:

$$(P_{m+1} - P_m) / (\theta_{m+1} - \theta_m) = dP_m / d\theta \quad (20)$$

gdzie: $\theta = \theta_m - \theta_{m-1}$ - jest wg wzoru (18).

Wzór (19) można zapisać, powracając do geometrii cylindrycznej, w postaci [2]:

$$\partial P / \partial z + \partial P / V_g(\theta) \partial t = -2\alpha P (\Delta 0)^2 \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\theta h \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \quad (21)$$

Ze względu na symetrię osiową włókna można założyć, że spełnione jest:

$$2\alpha(\theta) = \alpha_0 + A\theta^2 + \dots \quad (22)$$

$$h(\theta) = h_0 \quad (23)$$

Ostatecznie równanie (21) można zapisać:

$$\frac{dP}{dz} = -A\theta^2 P + \frac{\bar{n}^2}{2k_1^2 a^2} \frac{h_0}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \quad (24)$$

Podziękowanie

Autor wyraża głęboką wdzięczność Panu docentowi Janowi Petykiewiczowi z Instytutu Fizyki Politechniki Warszawskiej na cenne uwagi i istotne poprawki, które wpłynęły na postać niniejszej pracy.

LITERATURA

- [1] Woliński W., Kaźmirowski A.: Źródła promieniowania w optoelektronice zintegrowanej, EKON.76; Woliński W. Postęp w zakresie źródeł promieniowania i sposobów ich sprzężenia z układami zintegrowanymi, II Krajowe Symp. Światłowodowy i ich zastosowania, Jabłonna 79 Tom.1.

- [2] Paszkowski B.: Włókna światłowodowe, własności, technologia, kierunki rozwojowe. Ossolineum 1978
- [3] Smoliński A.: Telekomunikacja światłowodowa, Rozprawy Elektrotechniczne tom 22, 1976, z.1.; Smoliński A.: Postępy w dziedzinie telekomunikacji światłowodowej. Przegląd Telekomunikacyjny 1978. nr 7
- [4] Mroziewicz B., Lipiński T.: Półprzewodnikowe źródła sygnałów optycznych, I. Krajowe Symp., Światłowody i ich zastosowania, PWN Warszawa 1977

LITERATURA DO CZĘŚCI I

- [1] Bouillie R.: Ray delay in gradient waveguides with arbitrary symmetric refractive profile, Appl. Opt., vol. 13, No.5, May 1974.
- [2] Case K.M.: On wave propagation in inhomogeneous media. J.Math. Phys., vol.13, No.3, March 1972
- [3] Daikoku K., Sugimura A.: Direct measurement of wavelength dispersion in optical fibres - difference method. Electron. Lett., vol. 14, No.5. March 1978.
- [4] Felsen L.B.: Rays and modes in optical fibres. Electron.Lett. vol.10, No.7, 1974
- [5] Gloge D. et. al.: Direct measurement of the /baseband/ frequency response of multimode fibres. Appl. Opt., vol.11, July 1972
- [6] Halme S. ; Helsinki University of Technology, private inform.

- [7] Heinlein W.; Equivalent circuit and transfer function of the multimode glass fiber with random mode conversions. Siemens For.u. Entwickl. Ber., Bd.2, Nr 4, 1973
- [8] Kapron F.P., Keck D.B.; Pulse transmission through a dielectric optical waveguide. Appl. Opt., vol. 10, No.7, July 1971
- [9] Kawakami S., Nishizawa J.; Kinetics of an optical wave packet in a lens-like medium. JAP, vol. 38, No.12, Nov. 1967
- [10] Keck D.B., Maurer R.D.; Optical pulse broadening in long fibre waveguides. Optics and Laser Technology, Oct. 1975
- [11] Kobayashi I., Koyama M.; Measurement of optical fiber transfer functions based upon the swept frequency technique for baseband signals. Trans. IECE Japan vol. E59, No.4, April 1976
- [12] Kobayashi S. et al.; Refractive index dispersion of doped fused silica. IOOC 77, paper B8.3
- [13] Marcuse D.; Light transmission optics. Van Nostrand RC New York 1972 and Theory of dielectric optical waveguides AP New York 1974.
- [14] Nemoto S., Yip G.L.; Impulse response of a self-focusing optical fibre. Appl. Opt., vol. 16, Nr.3, March 1977
- [15] Olschansky R., Keck D.B.; Pulse broadening in graded index optical fibres. Appl. Opt., vol. 15, No.2, Feb. 1976

- [16] Sodha M.S.: Propagation of optical pulses through cladded fibers: modified theory. Appl. Opt., vol. 12, No.10, Oct. 1973

LITERATURA DO CZĘŚCI II

- [1] Dyott R.B., Stern J.R.: Group delay in glass-fibre waveguide. Electron. Lett., vol.7, Feb.11, 1971
- [2] Gambling W.A., Payne D.N., Matsumura H.: Effect of loss on propagation in multimode fibres. The Radio and El. Eng., vol. 43, No.11, Nov. 1973
- [3] Gloge D.: Weakly guiding fibres Appl. Opt., vol. 10, Oct. 1971 and Dispersion in weakly guiding fibres. Appl. Opt., vol. 10, No.11, Nov. 1971
- [4] Marcuse D.: Theory of dielectric optical waveguides. Academic Press, New York, 1974

LITERATURA DO CZĘŚCI III

- [1] Kawakami S., Nishisawa J.: An optical waveguide with the optimum distribution of the refractive index with reference to waveform distortion. IEEE Trans. on MTT, vol. 16, No.10, Oct 1968
- [2] Ikeda M.: Minimum total dispersion in multimode graded-index fibres. Optical and quant. Electron., No.10, 1978
- [3] Personick S.D.: Receiver design for digital fiber optic communication systems. BSTJ, vol. 52, 1973
- [4] Olschansky R., Keck D.: Pulse broadening in graded-

- index optical fibres. Appl. Opt., vol. 15, No.2, Feb. 1976**
- [5] **Marcotilli E.A.;** Modal dispersion in fibers with any NA and any profile dispersion. Optical Fiber Transmission II, Williamsburg 1977, paper TuD2
- [6] **Treheux M., Bouillie R.;** Influence of baseband frequency responses of optical components on the transmission system design. Optical Fiber Transmission II, Williamsburg USA 1977, paper ThA1
- [7] **Romaniuk R.;** Metody badania dyspersji w światłowodzie wielomodowym. II Krajowe Symp. Światłowody i ich zastosowania, Jabłonna 1979 T. 1.
- [8] **Smoliński A.;** Postępy w dziedzinie telekomunikacji światłowodowej. II Sympozjum URSI, Gdańsk 1978
- [9] **Tanaka T. Suematsu Y.;** An exact analysis of cylindrical fiber with index distribution by matrix method. Proc. of IECE 1976
- [10] **Collin R.;** Foundations for microwave engineering. McGraw Hill New York 1964
- [11] **Kapany N., Burke J.;** Optical waveguides. Academic Press, New York 1971
- [12] **Okamoto K., Okoshi T.;** Analysis of wave propagation in inhomogeneous optical fibers using a variational method. IEEE Trans on MTT, vol. 23, Nov. 1974; Computer-aided synthesis of the optimum refractive-index profile for a multimode fiber. IEEE Trans. on

MTT, vol. 25, No.3, March 1977

- [13] Landau L., Lifszyc E.: Elektrodynamika ośrodków ciągłych. PWN Warszawa 1960, Dawydow A.; Mechanika kwantowa. PWN Warszawa 1966

LITERATURA DO CZĘŚCI IV

- [1] Checcacci P.F., Scheggi A.M.; Evaluation of transmission characteristics of elliptical fiber by ray method. III Kraj. Symp. "Światłowody i ich zastosowania" Jabłonna luty 1979, Tom III
- [2] Gloge D.; Optical power flow in multimode fibres. BSTJ, vol. 51, 1972, pp.1767-1783
- [3] Petrov M.P., Kuzin E.A.; Information transmission by optical fibres. Holograficzne metody badań; Prace X Szkoły Holografii, IV, 1978 Mińsk