O fundamentach pomiaru ryzyka

Eliza Buszkowska*

Streszczenie: Autorka zaproponuje inne alternatywne definicje porządku stochastycznego. Sprawdzi ponadto własności koherentnej miary ryzyka dla *Oczekiwanego Niedoboru, Mediany, Bezwzględnego Odchylenia Medianowego* i funkcji *Max Loss,* przy różnych definicjach porządku stochastycznego pierwszego rzędu. Celem pracy jest też wzbogacenie aksjomatów Arznera i innych , definiujących koherentną miarę ryzyka o pewną dodatkową własność funkcji miary. Badanie będzie wykonane metodą dowodzenia matematycznego. Tylko niektóre dowody własności miary przedstawione w tym artykule są znane z literatury. Zastosowanie mediany jako miary ryzyka, badanie monotoniczności miar ryzyka przy różnych definicjach porządku stochastycznego, w tym propozycje innego definiowania porządku na zmiennych losowych oraz wzbogacenie aksjomatyki Arznera i innych o dodatkowy aksjomat to propozycje autorki.

Słowa kluczowe: VaR, ES, ML, MAD, Aksjomaty miary ryzyka, koherentność, miara ryzyka

Wprowadzenie

Jednym z etapów w procesie zarządzania ryzykiem jest oparty na modelach matematycznych pomiar ryzyka, który pozwala między innymi na kontrolę i monitorowanie ryzyka. Jego znaczenie wynika z narażenia podmiotu gospodarczego, a także innych podmiotów na skutki pozytywne bądź negatywne zdarzeń losowych. W tym artykule skoncentrujemy się na znanych, najczęściej stosowanych przez praktyków i badanych przez naukowców, a zatem najważniejszych miarach ryzyka. Uwzględnimy też te znane lecz rzadziej wykorzystywane. Pierwszą rozważaną przez autorkę funkcją będzie wartość zagrożona, którą definiuje się jako pewien kwantyl rozkładu prawdopodobieństwa. Jak wiadomo jest to standardowa miara za pomocą której określa się ryzyko w bankach, ryzyko portfeli i kwantyfikuje się je w wielu innych sytuacjach. Przypomnijmy, że ma ona wiele zalet gdyż uwzględnia prawdopodobieństwo i pozwala określić ryzyko w dokładnym horyzoncie czasowym. Ponadto jest popularna, uniwersalna i łatwa do interpretacji. Wiadomo też, że nie jest pozbawiona wad, gdyż podaje wartość szacunkową, opartą na estymatorach a nie dokładną. Co więcej zakłada normalność rozkładu zmiennej ryzyka, a jej wartość jest wrażliwa na metodę estymacji. W tym artykule sprawdzimy czy przy nowej definicji porządku stochastycznego, który ma lepszą interpretację

* dr Eliza Buszkowska Wydział Prawa i Administracji UAM, e-mail eliza_b2@O2.pl

VaR pozostaje miarą ryzyka. Autorka zaproponuje też inna alternatywną definicję porządku stochastycznego. Sprawdzi ponadto własności koherentnej miary ryzyka dla *Oczekiwanego Niedoboru, Mediany, Bezwzględnego Odchylenia Medianowego* i funkcji *Max Loss,* przy dwóch różnych definicjach porządku stochastycznego pierwszego rzędu. Celem pracy jest też wzbogacenie aksjomatów *Arznera*, definiujących koherentną miarę ryzyka o pewną dodatkową własność funkcji miary.

1. Metody

Na początku zaprezentujemy i zinterpretujemy definicję miary ryzyka.

Definicja (Miary Ryzyka)
Miara ryzyka jest funkcją, która odwzorowuje elementy pewnej liniowej podprzestrzeni *V* pewnej przestrzeni zmiennych losowych na przestrzeń (Ω, *F, P*), która zawiera stałe w zbiór zmiennych rzeczywistych.

$$\rho : V \to R,$$

Spełnia ona następujące aksjomaty:

1) monotoniczność

dla każdego $X, Y \in V$, jeśli $X \le Y$ wtedy, $\rho(X) \le \rho(Y)$

Oznacza to, że jeśli portfel X generuje straty z mniejszym prawdopodobieństwem to ryzyko związane w tym portfelem jest mniejsze.

2) niezmienniczość ze względu na przesunięcia : dla każdego $a \in R$ i dla każdego $X \in V$

$$\rho(X + a) = \rho(X) + a.$$

Aksjomat ten może być interpretowany w taki sposób, że kiedy dodamy pewne pieniądze do portfela ryzyko związane z tym portfelem wzrośnie, jeśli rozumie się ryzyko neutralnie jako możliwy zysk związany z tym portfelem. Ponieważ wartości przyjmowane przez miary ryzyka są rzeczywiste możemy je porządkować i porównywać, jeśli spełniają powyższe aksjomaty (Arzner i inni, 1998)

Def. (miara koherentna)
Miara ryzyka jest koherentna, jeśli spełnia warunki.

3) dodatnia jednorodność

Dla każdego $\lambda \geq 0$ i dla każdego $X \in V$ prawdą jest, że

$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X).$$

Ten aksjomat może oznaczać, że zwielokrotnienie wielkości inwestycji powoduje, że ryzyko zwiększa się proporcjonalnie.

4) subaddytywność:

dla każdego $X, Y \in Y$ istnieje zależność:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

W dobrze zdywersyfikowanym portfelu całkowite ryzyko straty nie jest większe niż ryzyko jego poszczególnych składników. Warunki koherentności pozwalają na konsekwencję w ocenie ryzyka (Artzner i inni, 1997) , (Uniejewski, 2004). Przypomnijmy wiadomości na temat miar ryzyka badanych w tej pracy. Wartość narażona na ryzyko jest to największa kwota, jaką można stracić w wyniku inwestycji w portfel w określonym horyzoncie czasowym i przy założonym poziomie tolerancji (Best, 2000). *VaR* definiuje się jako stratę, która z pewnym prawdopodobieństwem w określonym czasie nie zostanie osiągnięta bądź przekroczona. Inaczej *VaR* jest stratą, która z prawdopodobieństwem *p* w okresie *T* dni nie zostanie przekroczona. W celach interpretacyjnych przyjmuje się pewne założenia przede wszystkim dotyczące prawdopodobieństwa z jakim podaje się wyniki oraz długość czasu przez jaki będziemy utrzymywany portfel. Metoda *Value at Risk* jest jedną z najnowocześniejszych koncepcji pomiaru ryzyka używaną przez większość instytucji na świecie - funduszy inwestycyjnych, emerytalnych, banków i domów inwestycyjnych. Istnieją pewne jej modyfikacje i inne miary bazujące na koncepcji *VaR*. Są to zysk narażony na ryzyko i przepływy pieniężne narażone na ryzyko. Znane są też miary które zostały zdefiniowane w oparciu o *VaR*. Są to *ES* i *TVAR*. Przypomnijmy, że przez wartość narażoną na ryzyko rozumiemy liczbę zdefiniowaną następująco (Jajuga, 2000).

$$P(W > W_0 - VaR) = 1 - \alpha$$

W - wartość rynkowa na końcu rozpatrywanego okresu, W_0 - wartość rynkowa w danym momencie α - poziom tolerancji. W tej pracy nawiążemy do inaczej zapisanej definicji wartości zagrożonej:

$$\inf\{x \in R : F(x) \geq \alpha\}.$$

Na podstawie *VaR* opracowano *Expected Shortfall*, który jest także nazywany warunkową wartością zagrożoną, a także *CVaR* i *TVAR*. *ES* ocenia wartość ryzyka inwestycji w sposób klasyczny skupiając się na skrajnych wynikach. Jest rozumiany jako oczekiwana strata na portfelu równa lub wyższa od pewnego kwantyla. Zazwyczaj przyjmuje się do jego obliczeń - 5% poziom ufności. Formalnie *Expected Shortfall* można zdefiniować następująco

$$ES_\alpha = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_\gamma(X)d\gamma,$$

a w przypadku dyskretnym następująco:

$$ES_\alpha = -\frac{1}{\alpha}\left(E\left[X1_{\{X \le x_\alpha\}}\right] + x_\alpha\left(\alpha - P\left[X \le x_\alpha\right]\right)\right).$$

Oczekiwany niedobór – (patrz Trzpiot G., 2004 i Acerbi C., Tasche D., 2002), może być interpretowany jako średnia najgorszych $(1-\alpha)$% strat pod warunkiem, że te straty są większe niż wartość zagrożona. Inne miary rozważane w tej pracy to proste, nie wymagające komentarza miary takie jak ML, kwanty, mediana i wartość oczekiwana w przypadkach ciągłym i dyskretnym. W pracy uwzględniamy trzy definicje porządku na zmiennych losowych. Zdefiniujemy stochastyczny porządek pierwszego rzędu w sposób klasyczny.

Definicja (standardowa stochastycznej dominacji pierwszego rzędu)

Jeśli zmienna *X* dominuje stochastycznie nad zmienną *Y*, co można napisać $X \le Y$, to

$$F_1(y) \le F_2(x)$$

Można powyższą nierówność rozumieć tak, że dystrybuanta zmiennej ryzyka *Y* jest mniejsza niż dystrybuanta zmiennej ryzyka *X*. Oznacza to że ze zmienną Y związane jest większe ryzyko niż ze zmienną X. Można mieć wątpliwość czy ta definicja jest odpowiednia do wyrażenia dominacja stochastyczna, gdyż słowo dominacja oznacza prym czy uprzywilejowaną pozycję.

Definicja (stochastycznej dominacji pierwszego rzędu)

Jeśli zmienna *Y* dominuje stochastycznie nad zmienną *X*, co można napisać

$$X \le Y \text{, to } F_1(x) \le F_2(y).$$

Można tę definicję rozumieć tak, że prawdopodobieństwo wyższej straty jest mniejsze dla portfela *Y* niż dla portfela *X*.

Dla obu tych definicji wszystkie własności miary ryzyka będą równocześnie spełnione lub nie. W drugim przypadku jednak warunek monotoniczności musi być następujący:

$$X \le Y \Rightarrow \rho(Y) \le \rho(X)$$

czyli funkcja miary ryzyka musi być malejąca.

Ponieważ niektóre miary ryzyka nie uwzględniają prawdopodobieństwa można zdefiniować relację porządkującą bez uwzględnienia prawdopodobieństwa.

Słabymi porządkami częściowymi nazywane są relacje zwrotne, przechodnie i antysymetryczne i tak zdefiniujemy relację porządku na zmiennych losowych.

Definicja (częściowego porządku na zmiennych losowych)

$$X \le Y \Leftrightarrow \underset{x_i, y_i}{\forall} x_i \le y_i .$$

.

Dodatkowo wzbogacimy aksjomaty miary ryzyka o nowy aksjomat ([1]) i sformułujemy jego interpretację.

Aksjomat 1

Dla dowolnych zmiennych ryzyka X i Y

$$X \subset Y \Rightarrow \mu(Y / X) = \mu(Y) - \mu(X).$$

Aksjomat ten może oznaczać że jeśli kwota *X* jest częścią większej kwoty *Y* to ryzyko związane z inwestycją w portfel zawierający gotówkę *Y* po odjęciu gotówki *X* jest równe wartości ryzyka związanego z portfelem zawierającym *Y* zmniejszonego o ryzyko związane z portfelem zawierającym gotówkę *X*. Zakłada się że ryzyko jest rozumiane pozytywnie, jako szansa. Zauważamy, że powyższy aksjomat nie jest konsekwencją wcześniej przyjętych aksjomatów miary i koherentności. Jest jedną z podstawowych własności miary, wynikających z aksjomatów miary.

[1] http://math.uni.lodz.pl/~kowalcr/TeoriaMiary/wyklad2.pdf

2. Rozważania teoretyczne

Autorka przypomni, że *VaR* jest miarą ryzyka. Załóżmy z definicji porządku na zmiennych losowych że:

$$X \le Y \Leftrightarrow F_1(x) \ge F_2(y).$$

Dla wszystkich *x* i *y* prawdą jest, że:

$$F_1(x) = P(X \le x) \ge P(Y \le y) = F_2(y).$$

Wynika stąd, że

$$\inf\{x \in R : F(x) \ge \alpha\} \le \inf\{y \in R : F(y) \ge \alpha\},$$

czyli

$$VaR_x \le VaR_{Y.}$$

Jeżeli przyjmie się przeciwną definicję porządku stochastycznego to VaR oczywiście dla nowego aksjomatu monotoniczności będzie również miarą ryzyka.
Załóżmy, że $X \le Y$. Wtedy symetrycznie

$$X \le Y \Leftrightarrow F_2(y) \ge F_1(x).$$

Dla wszystkich *x* i *y*

$$F_1(x) = P(X \le x) \le P(Y \le y) = F_2(y).$$

Wynika stąd, że

$$\inf\{x \in R : F(x) \ge \alpha\} \ge \inf\{y \in R : F(y) \ge \alpha\},$$

czyli

$$VaR_x \ge VaR_{Y.}$$

Wartość oczekiwana i jej szczególny przypadek *Expected Shortfall (ES)* w przypadku dyskretnym są miarami ryzyka w sensie Arznera, gdyż przyjmując klasyczną definicję porządku stochastycznego spełniają wszystkie aksjomaty koherentnej miary ryzyka.

- monotoniczność

Załóżmy, że $X \le Y$. Zatem z definicji porządku na zmiennych losowych (Unijawski, 2004)

$$P(X \le x) \ge P(Y \le y).$$
$$\sum_{x_i < x} p_i \ge \sum_{y_i < y} p_i.$$

Załóżmy, że $x > VaR$ $y > VaR$ oraz

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \le \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = \rho(Y).$$
$$E(X / x > VaR) \le E(Y / y > VaR),$$
$$\rho(X) \le \rho(Y).$$

Również w tym przypadku dowód dla drugiej definicji porządku polegałby na odwróceniu nierówności w dowodzie.

- niezmienniczość ze względu na przesunięcia

$$\rho(\alpha + X) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha + x_i)p_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha \cdot p_i + \sum_{i=1}^{n}x_i p_i = \alpha\sum_{i=1}^{n}p_i + \sum_{i=1}^{n}x_i p_i = \alpha + \rho(X).$$

Suma prawdopodobieństw rozkładu zmiennej losowej z definicji równa się jeden.

- pozytywna jednorodność dla każdego $\lambda \geq 0$

$$\rho(\lambda X) = \sum_{i=1}^{n}\lambda \cdot x_i p_i = \lambda\sum_{i=1}^{n}x_i p_i = \lambda\rho(X).$$

Poniższe kroki wynikają z własności szeregu liczbowego.

- addytywność

$$\rho(X + Y) = \sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i)\cdot p_{ii} = \sum_{i=1}^{n}x_i p_i + \sum_{i=1}^{n}y_i p_i = \rho(X) + \rho(Y).$$

Korzystamy z prawa rozdzielności dla szeregu liczbowego.

Przeprowadzimy matematyczne dowody w przypadku gdy zmienna losowa jest ciągła.

- monotoniczność

Autorka udowodni, że w szczególnym przypadku prawdziwa jest nierówność przeciwna niż nierówność w aksjomacie monotoniczności.

Załóżmy, że $X \leq Y$

$$F_1(y) \leq F_2(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{y} f(y)dy \leq \int_{-\infty}^{x} g(x)dx.$$

Załóżmy, że y<x

$$F_1(y) \leq F_2(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{y} f(y)dy \leq \int_{-\infty}^{x} g(x)dx.$$

Wobec powyższego

$$\int_{-\infty}^{y} yf(y)dy \leq \int_{-\infty}^{x} xg(x)dx.$$

Zatem z definicji wartości oczekiwanej

$$E(Y) \leq E(X) \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X).$$

- niezmienniczość ze względu na przesunięcia

$$\rho(X+\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}(x+\alpha)f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx+\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx+\alpha=\rho(X).+\alpha$$

Wykorzystaliśmy definicję wartości oczekiwanej i własności całek.

- dodatnia jednorodność: dla każdego $\lambda \geq 0$

$$\rho(\lambda X)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda xf(x)dx=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\lambda\rho(X)$$

.

Stała może być wyłączona przed całkę, co wynika z własności całek.

$$\rho(X+Y)=E(X+Y)=\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x+y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}yf_1(y)dx=E(X)+E(Y)=\rho(X)+\rho(Y).$$

gdzie $f_1(x)$ i $f_2(y)$ oznaczają gęstości brzegowe. Dowody wynikają z własności wartości oczekiwanej.

Przeanalizujemy *ES* w przypadku ciągłym. Przeprowadzimy dowód monotoniczności dla *ES*.

Załóżmy, że $X \leq Y$. W tym przypadku dowód wynika z dowodu dotyczącego *VaR*. Jeśli przyjąć klasyczną definicję porządku stochastycznego to $VaR_X \leq VaR_Y$

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}VaR_\gamma(X)d\gamma \leq \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}VaR_\gamma(Y)d\gamma\ .$$

W drugiej sytuacji, gdy porządek jest zdefiniowany przeciwnie, to $VaR_X \geq VaR_Y$

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}VaR_\gamma(X)d\gamma \geq \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}VaR_\gamma(Y)d\gamma.$$

Zatem funkcja *ES* jest monotoniczna w drugim sensie.

Wykonamy dowody dla innych funkcji ryzyka znanych z literatury. Inną znaną funkcją ryzyka jest dyskretny $\rho(X)=\max x_i p_i$. Jest to *Maximum Loss* która uwzględnienia prawdopodobieństwo (Czerniak, 2003). Dowody własności koherentnej miary ryzyka dla *ML* zostały przypomniane poniżej.

- monotoniczność

Załóżmy, że $X \leq Y$. Zatem z definicji klasycznej $F_1(y) \leq F_2(x)$. $P_1(-\infty, y) \leq P_2(-\infty, x)$, lecz $\max_i x_i p_i \leq \max_i y_i p_i$. Otrzymano $\rho(X) \leq \rho(Y)$.

- niezmienniczość ze względu na przesunięcia

$$\rho(X+\alpha)=\max(x_i p_i+\alpha)=\max x_i p_i+\alpha=\rho(X)+\alpha$$

- pozytywna jednorodność $\lambda \geq 0$

$$\rho(\lambda X)=\max \lambda x_i p_i=\lambda \max x_i p_i=\lambda\rho(X)$$

- silna subaddytywność

$$\rho(X+Y)=\max(x_i p_{xi}+yp_{y_i})=\max x_i p_i+\max y_i p_i=\rho(X)+\rho(Y)$$

Kolejne dowody matematyczne dotyczą zaproponowanej *Mediany* jako miary ryzyka. Zakładamy, że *Y* dominuje nad *X* w sensie dominacji pierwszego rządu

$$F(y)\leq F(x).$$

Zatem

$$Mediana(X)\leq Mediana(Y).$$

Stąd $\rho(X)\leq\rho(Y).$

- jednorodność $\lambda \geq 0$

Jeśli ponumeruje się obserwacje od *1* do *n* i posortuje się je od najmniejszej do największej, należy uwzględnić różne przypadki

- liczba naturalna *n* jest nieparzysta

$$\rho(\lambda X)=mediana(\lambda X)=\lambda x_{(n+1)/2}=\lambda mediana(X)=\lambda\rho(X).$$

- liczba naturalna *n* jest parzysta

$$\rho(\lambda X)=mediana(\lambda x)=\lambda\cdot(x_{n/2}+x_{(n/2+1)})/2=\lambda mediana(X)=\lambda\rho(X)$$

- subaddytywność

Przez medianę sumy zmiennych będziemy rozumieli medianę szeregu wartości pochodzących z obu szeregów

- liczba naturalna *n* jest nieparzysta

$$\rho(X+Y)=mediana(X+Y)=(X+Y)_{(n+1)/2}\leq X_{(n+1)/2}+Y_{(n+1)/2}=mediana(X)+mediana(Y)=\rho(X)+\rho(Y).$$

- liczba naturalna *n* jest parzysta

$$\rho(X+Y)=mediana(X+Y)\leq X_{(n/2+(n/2+1))/2}+Y_{(n/2+(n/2+1))/2}=mediana(X)+mediana(Y)=\rho(X)+\rho(Y).$$

- szeregi są różnej długości *n* parzyste, *m* nieparzyste

$$\rho(X+Y)=mediana(X+Y)\le X_{(n/2+(n/2+1))/2}+Y_{(m+1)/2}=mediana(X)+mediana(Y)=\rho(X)+\rho(Y).$$

- szeregi są różnej długości *m* parzyste, *n* nieparzyste

$$\rho(X+Y)=mediana(X+Y)\le X_{(n+1)/2}+Y_{(m/2+(m/2+1))/2}=mediana(X)+mediana(Y)=\rho(X)+\rho(Y).$$

- niezmienniczość ze względu na przesunięcia: $\rho(X+a)=\rho(X)+a.$

$$\rho(X)=mediana(X+a)=mediana(X)+a.$$

Zatem mediana jest miarą ryzyka przy standardowym rozumieniu porządku stochastycznego. Autorka sprawdzi warunki miary ryzyka dla klasycznego kwantyla

- monotoniczność
  Załóżmy, że $X,Y\in V$, $X\le Y$, $F_1(y)\le F_2(x)$, $P_1(-\infty,y)\le P_2(-\infty,x).$

Zatem

$$\rho(X)=P_2(X\le R_\alpha)\ge P_1(Y\le R_\alpha)=\rho(Y).$$

Wnioskuje się o barku monotoniczności.
Zmiana kierunku nierówności w definicji porządku stochastycznego nie zmieni tego wniosku.

- niezmienniczość ze względu na przesunięcia

Kontrprzykład

$P(X=x_i)=1,\ a=4,\ R_\alpha=2\ X=\{3\}$

$$0=P(3\le 2)=P(3\le 6-4)\ne P(3\le 6)-4=1-4=-3$$

Dowody pozostałych własności znajdują się w innej, jeszcze nieopublikowanej pracy autorki pt. ”About Coherent Measures of Risk” .
Dalsze dowody dotyczą *Bezwzględnego Odchylenia Medianowego* dla klasycznej definicji porządku standardowego.

- monotoniczność. Dla $X,Y\in V$. Jeśli $X\le Y$ to $\rho(X)\le\rho(Y)$

Załóżmy, że $X\le Y$

$$F_1(y)\le F_2(x).$$

Zatem dla wszystkich *x* i *y*

$$\rho(Y) = MEDIANA|Y - MEDIANA(Y)| \leq MEDIANA|X - MEDIANA(X)| = \rho(X)$$

Zatem $\rho(Y) > \rho(X)$. Oznacza to, że istnieje monotoniczność.

2. Niezmienniczość ze względu na przesunięcia: $\rho(X + a) = \rho(X) + a$

Kontrprzykład

$X = \{1,2,3,4\}, \quad P(X = x_i) = 1/4$

$$\rho(X + 1) = MEDIANA|X + 1 - MEDIANA(X + 1)| = 1$$
$$\rho(X) + 1 = MEDIANA|X - MEDIANA(X)| + 1 = 2{,}5$$

Dla tej miary istnieje brak niezmienniczości ze względu na przesunięcia.

3. Wnioski

W artykule zaproponowano trzy sposoby definiowania porządku stochastycznego. Jeżeli przyjąć standardową definicję tego porządku to *VaR*, *ES* i *EX* w przypadku dyskretnym są miarami ryzyka, a *ES*, *Max Loss* i zaproponowana przez autorkę *Mediana* jako miara ryzyka są koherentnymi miarami ryzyka. Nie jest zaś miarą ryzyka kwantyl i wartość średnia. Ostatnia w przypadku ciągłym, gdyż nie spełnia niektórych warunków miary ryzyka, a także *Bezwzględne Odchylenie Medianowe* gdyż nie jest dla niego prawdziwy warunek niezmienniczości na przesunięcia. Jeżeli przyjmie się zaproponowaną przez autorkę przeciwną definicję porządku stochastycznego, która ma bardziej naturalną interpretację to przy nowym aksjomacie monotoniczności wszystkie własności udowodnione wcześniej są zachowane. Autorka proponuje też inny sposób definiowania porządku na zmiennych losowych, który nie ujmuje prawdopodobieństwa i jest klasyczną definicją porządku częściowego. Ponieważ nie wszystkie miary ryzyka uwzględniają prawdopodobieństwo, taki sposób definiowania porządku w dowodach własności monotoniczności wydaje się konkurencyjny. Autorka wprowadza też dodatkowy aksjomat do zbioru aksjomatów koherentnej miary ryzyka Arznera i innych i podaje jego interpretację na gruncie teorii pomiaru ryzyka. Sens praktyczny tego zabiegu oraz sprawdzenie które znane funkcje ryzyka spełniają aksjomaty Arznera i innych po przyjęciu definicji porządku częściowego na zmiennych losowych mogą być tematem dalszego badania.

Literatura

Acerbi C. , Tasche D., *On the coherence of expected shortfall*, Journal of Banking & Finance, Volume 26, Issue 7, July 2002, Pages 1487–1503.
Aparna, Gupta (2013), *Risk Management and simulations*, CRC PRESS, 2013.
Artzner, Ph., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath (1997), Thinking Coherently, RISK, 10, November, 68-71
Czerniak T. (2003) , *Maksymalna strata jako miara ryzyka,* Prace naukowe akademii ekonomicznej w Katowicach
Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem,* Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 2007.
Uniejewski P, (2004), *Koherentne miary ryzyka*, , Wrocław
http://www.ioz.pwr.wroc.pl/pracownicy/weron/prace/Uniejewski04.pdf.
Krawczyk E. (2006), *Zastosowanie modelu ryzyka Value at Risk (VaR) opartego na metodzie Monte Carlo do rynku nieruchomości* EIOGZ, s 117.
Kubińska E., Markiewicz J. (2012), *Pomiar ryzyka jako wyzwanie dla współczesnych finansów*, Oeconomia, Vol 46, 1.
Kuziak K., (2003), *Koncepcja wartości zagrożonej VaR (Value at Risk)*, StatSoft Polska.
Włodarczyk A. (2011), *Koncepcja koherentnych miar ryzyka a ocena ryzyka inwestycyjnego OFE,* Prace i Materiały Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego nr 4/5/2011, s. 213-225

FUNDAMENTALS OF RISK MEASUREMENT

Abstract: In this article the author will propose other alternative definitions of stochastic order. She will check moreover the properties of coherent measures of risk for *ES, Median, Median Absolut Deviation and Maximum Loss,* with different definitions of the first order stochastic orders. The purpose of the paper is also enrichment of Arzner' s et al. axioms , which define coherent measure of risk of some additional property of measure of risk. This survey will be performed with the method of mathematical proof. Only some of measure properties presented in this article are known from the literature. Application of Median as a measure of risk, research of monotonicity of risk measure with different definitions of stochastic order and enrichment Arzner's et al. axioms with additional axiom are the proposals of the author.

Keywords: VaR, ES, ML, MAD, Axioms of Risk Measure, coherence, risk measure