Rozdział 3

Weryfikacja hipotez statystycznych

3.1. Informacje wprowadzające

W poprzednim rozdziale poznaliśmy metody szacowania (estymacji) parametrów populacji generalnej. Interesującymi nas parametrami były: średnia, wariancja i odchylenie standardowe oraz wskaźnik struktury. Odmiennym postępowaniem mającym na celu zdobycie informacji o populacji na podstawie znajomości jej części (próby) jest weryfikacja hipotez. Pozwala ona uzyskać więcej informacji o populacji niż estymacja, gdyż hipotezy, jakie się formułuje, a następnie sprawdza, mogą dotyczyć nie tylko wartości parametrów populacji, ale również innych własności populacji, np. kształtu rozkładu populacji. Można więc na przykład sprawdzić, czy rozkład analizowanej populacji jest normalny.

Hipoteza statystyczna to każdy sąd o populacji generalnej sformułowany bez pełnej znajomości tej populacji.

Wyróżniamy:

- **hipotezy parametryczne**, czyli dotyczące *parametrów* populacji. Na przykład stwierdzenie, że frakcja osób posiadających telefon komórkowy równa jest 0,9, to hipoteza parametryczna;
- **hipotezy nieparametryczne**, czyli wszystkie pozostałe. Są wśród nich m.in. hipotezy dotyczące kształtu rozkładu populacji (np. stwierdzenie, że czas obsługi klienta podlega rozkładowi normalnemu) czy hipotezy o niezależności (np. że koszty produkcji pewnego wyroby nie zależą od technologii jego wytwarzania).

Po sformułowaniu hipotezy następuje proces **weryfikacji**, czyli sprawdzenia jej prawdziwości. Tak więc celem weryfikacji hipotezy jest podjęcie decyzji o przyjęciu postawionej hipotezy (czyli uznanie sformułowanego sądu za sąd prawdziwy) lub decyzji o odrzuceniu tej hipotezy (czyli uznanie sformułowanego sądu za nieprawdziwy). Oczywiste jest zatem, że formułując sąd o zbiorowości generalnej przy niepełnej znajomości tej zbiorowości, należy liczyć się **z ryzykiem błędu** polegającego na podjęciu decyzji niesłusznej. Bowiem konkretna, formułowana przez nas hipoteza na temat populacji, może być w rzeczywistości albo prawdziwa, albo fałszywa.

Weryfikacja hipotez odbywa się za pomocą **testów statystycznych**. Do weryfikacji hipotez parametrycznych służą **testy parametryczne**, natomiast do weryfikacji hipotez nieparametrycznych – **testy nieparametryczne**. Procedura testowania hipotez za pomocą testów statystycznych wymaga sformułowania, obok hipotezy bezpośrednio weryfikowanej, drugiej hipotezy, tzw. hipotezy alternatywnej. I tak:

- **Hipoteza zerowa** (oznaczana przez H_0) to hipoteza bezpośrednio weryfikowana.
- **Hipoteza alternatywna** (oznaczana przez H_1) to hipoteza będąca odpowiednim zaprzeczeniem hipotezy zerowej i którą uznaje się za prawdziwą w przypadku odrzucenia hipotezy zerowej[1].

Test statystyczny pozwala rozstrzygnąć, czy postawioną *hipotezę zerową* możemy **przyjąć**, czyli uznać za prawdziwą, czy też należy ją **odrzucić**, czyli uznać za fałszywą.

Należy w tym miejscu podkreślić, iż „przyjęcie" hipotezy zerowej (*nieodrzucenie* hipotezy zerowej) *nie jest jednoznaczne* z tym, że udowodniliśmy jej *prawdziwość*, a tylko iż *brak jest dostatecznych podstaw do jej odrzucenia*. Z terminem „przyjąć" lub „akceptować" w odniesieniu do hipotezy zerowej nie należy wiązać zwykłego, codziennego znaczenia. Sytuację tę można porównać do sytuacji w sądach, które uniewinniają oskarżonych z powodu *braku dostatecznych dowodów*[2].

Wyobraźmy sobie, że sąd ma rozstrzygnąć, czy osoba siedząca na ławie oskarżonych jest winna zarzucanego jej czynu, czy też nie. Znaczy to, że postawiono hipotezy:

Hipoteza zerowa (H_0):	*oskarżony jest niewinny* (*zwolnić*)
Hipoteza alternatywna (H_1):	*oskarżony jest winny* (*ukarać*)

---

[1] Hipoteza alternatywna jest niekiedy oznaczana przez H_A.

[2] A. Aczel, *Statystyka w zarządzaniu*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.

Decyzję, czy oskarżonego uznać za niewinnego czy też za winnego, sąd podejmuje na podstawie zeznań świadków i przedstawionych dowodów. Zasada „domniemanej niewinności" oznacza, iż oskarżonego uważa się za niewinnego tak długo, dopóki nie przedstawi się „wystarczających dowodów" winy. Wielokrotnie więc zdarza się, iż osoba oskarżona zostaje zwolniona tylko dlatego, że „brak jest wystarczających dowodów" winy. Podobnie jest w statystyce: hipotezę zerową utrzymuje się tak długo, dopóki nie znajdzie się „wystarczających podstaw", aby ją odrzucić. A zatem:

Przyjęcie hipotezy zerowej nie oznacza, iż udowodniliśmy jej *prawdziwość*, a jedynie, **iż brak jest wystarczających podstaw do jej odrzucenia**.

Jeśli „znajdziemy podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej", to ją odrzucimy i przyjmiemy hipotezę alternatywną (oskarżonego uznamy za winnego). Niestety, istnieje ryzyko, iż podjęta decyzja jest błędna i ukarana zostanie osoba, która jest niewinna. Z kolei podejmując decyzję o przyjęciu hipotezy zerowej, ryzykujemy błędem, iż zwolniona zostanie osoba winna.

Podejmując w wyniku *weryfikacji* decyzję o przyjęciu lub odrzuceniu hipotezy zerowej, musimy mieć na uwadze, iż zawsze istnieje **ryzyko podjęcia błędnej decyzji**. Możemy bowiem *przyjąć* hipotezę, która w rzeczywistości jest *fałszywa* albo *odrzucić* hipotezę, która w rzeczywistości jest *prawdziwa*. Tak więc w wyniku testowania konkretnej hipotezy możemy popełnić jeden z dwóch rodzajów błędów, tzw. *błąd pierwszego rodzaju* lub *błąd drugiego rodzaju*.

- **błąd I rodzaju** – popełniamy w sytuacji, gdy uznamy za fałszywą i *odrzucimy* hipotezę zerową (H_0), która w rzeczywistości jest *prawdziwa*,
- **błąd II rodzaju** – popełniamy wówczas, gdy uznamy za prawdziwą i *nie odrzucimy* hipotezy zerowej (H_0), która w rzeczywistości jest *fałszywa*.

Możliwe sytuacje przy testowaniu hipotez przedstawione są w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Decyzje i rodzaje błędów przy testowaniu hipotez statystycznych

Decyzja co do hipotezy H_0	Hipoteza H_0 w rzeczywistości	
	Prawdziwa	Fałszywa
Przyjąć (brak podstaw do odrzucenia)	Słuszna decyzja	Błąd II rodzaju
Odrzucić	Błąd I rodzaju	Słuszna decyzja

Wprowadźmy oznaczenia:

α – **prawdopodobieństwo** popełnienia błędu I rodzaju (odrzucenia prawdziwej H_0), jakie badacz jest w stanie zaakceptować,

β – **prawdopodobieństwo** popełnienia błędu II rodzaju (przyjęcia fałszywej H_0).

Jasne jest, iż idealną sytuacją byłaby taka, w której zarówno α, jak i β byłyby jak najmniejsze. Niestety nie jest możliwe minimalizowanie obu tych prawdopodobieństw jednocześnie. Mniejszy poziom α oznacza jednocześnie większy poziom β i na odwrót. Innymi słowy, **nie jest możliwe jednoczesne kontrolowanie ryzyka obu błędów**. Nasuwa się więc pytanie, który błąd „bezpieczniej" jest popełnić, pierwszego czy drugiego rodzaju? Czy lepiej minimalizować α czy β? Nawiązując do procesu sądowego, łatwo odpowiedzieć, iż „mniejszym złem" jest zwolnienie osoby winnej (błąd II rodzaju), niż ukaranie niewinnej (błąd I rodzaju). Znaczy to, iż należałoby skupić uwagę na zminimalizowaniu ryzyka ukarania osoby niewinnej, czyli zminimalizowaniu α. Tak samo jest w statystyce. Skoro nie możemy kontrolować obu prawdopodobieństw α i β jednocześnie, to skupiamy się jedynie na prawdopodobieństwie popełnienia błędu I rodzaju (α) i ustalamy je z góry. Najczęściej przyjmuje się $\alpha = 0{,}05$, niekiedy $\alpha = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}01$ lub mniej – w zależności od tego, jakie ryzyko odrzucenia prawdziwej hipotezy zerowej jesteśmy skłonni zaakceptować. Na przykład w badaniach medycznych poziom α ustala się bardzo rygorystycznie. Tzn. dopuszcza się znikome prawdopodobieństwo popełnienia błędu pierwszego rodzaju, np. $\alpha = 0{,}001$. Chodzi o to, aby np. w przypadku testowania skuteczności nowego leku, ustrzec się przed wprowadzeniem do stosowania leku, który w istocie jest nieskuteczny.

Należy podkreślić, iż **poziom α przyjmowany jest przed badacza z góry.** Nie wynika on z żadnych obliczeń i nie ma żadnego związku z danymi z próby. Jest jedynie informacją, jakie ryzyko odrzucenia prawdziwej hipotezy zerowej badacz jest skłonny ponieść. Mniejszy poziom α oznacza, iż mniejsze jest ryzyko odrzucenia hipotezy prawdziwej, ale jednocześnie większe ryzyko przyjęcia hipotezy fałszywej.

> Akceptowalne przez badacza prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju (α), czyli prawdopodobieństwo odrzucenia prawdziwej hipotezy zerowej, nazywa się **poziomem istotności testu**.

Testy, które poznamy, to tzw. **testy istotności**. W testach tych kontrolowany jest poziom istotności (α), czyli prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju.

Jak już wiemy, prawdopodobieństwo *przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej* (tj. popełnienia błędu II rodzaju) równe jest β. Znaczy to, iż prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, czyli *odrzucenia fałszywej hipotezy zerowej* równe jest $1 - \beta$. Prawdopodobieństwo to nazywa się **mocą testu** i oznaczane jest przez M.

Moc testu to prawdopodobieństwo odrzucenia fałszywej hipotezy zerowej (niepopełnienia błędu II rodzaju):

$$M = 1 - \beta \tag{3.1}$$

gdzie β – prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju.

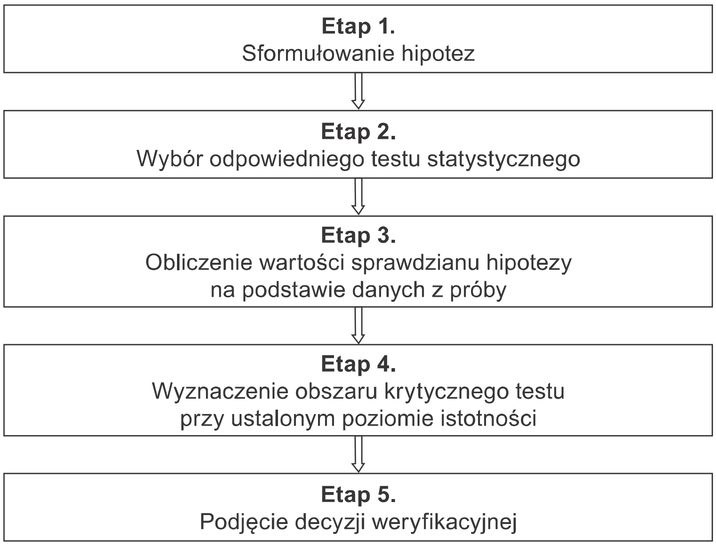
Tak więc moc testu jest *miarą skuteczności testu* do wykrywania fałszywej hipotezy zerowej. Im większa jest moc testu, tym lepszy, *mocniejszy* jest zastosowany test. Większa moc oznacza bowiem, że test z większą skutecznością wykrywa fałszywą hipotezę zerową (jest „bardziej czuły" na fałszywość H_0). **Test mocny** w większości przypadków jest w stanie odrzucić fałszywą hipotezę zerową. Gdy test jest **słaby**, wówczas istnieje duże prawdopodobieństwo przyjęcia hipotezy zerowej, pomimo jej fałszywości.

3.2. Etapy weryfikacji hipotez

Celem **weryfikacji hipotez** jest podjęcie decyzji, czy postawioną hipotezę zerową należy przyjąć (stwierdzić brak podstaw do jej odrzucenia), czy też odrzucić na korzyść hipotezy alternatywnej. Podstawową kwestią jest wybór odpowiedniego **testu statystycznego**. Wiele testów swoje przeznaczenie ma określone w nazwie testu, np. *test dla wartości średniej populacji, test dla wariancji populacji*. Przy wyborze testu ważne jest określenie założeń jego stosowalności (np. zastosowanie testu wymaga, aby populacja miała rozkład normalny).

Decyzję weryfikacyjną podejmuje się na podstawie wartości **statystyki testowej** (zwanej **sprawdzianem hipotezy**), którą obliczamy na podstawie danych z próby. Konkretna wartość *statystyki testowej* albo wskazuje na konieczność odrzucenia hipotezy zerowej, albo przemawia za jej przyjęciem.

Poszczególne etapy procesu weryfikacji hipotez zawsze są takie same, niezależne od rodzaju testu i postawionej hipotezy. Przedstawione są one na rysunku 3.1.



Rysunek 3.1. Etapy testowania hipotez

Etap 1.
Sformułowanie hipotez

Po analizie problemu merytorycznego formułujemy hipotezy zerową (H_0) i alternatywną (H_1). Bezpośredniej weryfikacji podlega *hipoteza zerowa*. Wyrażony w niej jest określony sąd o populacji generalnej w postaci zdania twierdzącego. Może to być np. zdanie precyzujące wartość parametru populacji, typ rozkładu populacji, stwierdzenie o równości parametrów dwóch lub więcej populacji, zgodność rozkładów dwu lub więcej populacji. Sąd ten zapisywany jest najczęściej w postaci wzoru. Na przykład, hipoteza zerowa precyzująca wartość średniej populacji może mieć postać:

H_0: $m = 50$ (jest stwierdzeniem, iż średnia populacji równa się 50).

Podkreślmy, że w *parametrycznej* hipotezie zerowej zawsze występuje **znak równości**. W przypadku hipotez *nieparametrycznych*, np. o typie rozkładu, w hipotezie zerowej zawsze orzeka się, że populacja **ma dany typ rozkładu** (tzn. że rozkład populacji *jest zgodny z zakładanym*).

Hipoteza alternatywna jest odpowiednim zaprzeczeniem zerowej. Jest ona konkurencyjna w stosunku do zerowej w tym sensie, że jeśli w wyniku testowania odrzucimy hipotezę zerową, to przyjmiemy alternatywną. W przypadku hipotez *parametrycznych*, hipotezę alternatywną formułuje się bądź przecząc bezpośrednio zerowej, czyli używając znaku „≠”, bądź też formułuje się ją *jednostronnie*, czyli używa znaków „<” lub „>”.

Jeśli na przykład parametryczna hipoteza zerowa ma postać:

$$H_0\colon m = 50,$$

to hipoteza alternatywna może być sformułowana trojako:

$$H_1\colon m \neq 50 \quad \text{lub} \quad H_1\colon m < 50 \quad \text{lub} \quad H_1\colon m > 50.$$

Konkretna postać parametrycznej hipotezy alternatywnej zależy od celu badania i przypuszczeń na temat populacji. Wybór należy do badacza.

W przypadku hipotez *nieparametrycznych*, np. o typie rozkładu, w hipotezie alternatywnej wyraża się sąd, że populacja *nie ma danego typu rozkładu* (tj. że rozkład populacji *nie jest zgodny z zakładanym*).

Etap 2.
Wybór odpowiedniego testu statystycznego

Do rozwiązania określonego problemu merytorycznego mamy na ogół do dyspozycji kilka testów statystycznych. Należy nadmienić, że testy parametryczne mają wyższą moc (M) niż alternatywne wobec nich odpowiednie testy nieparametryczne. Wybór odpowiedniego testu jest zadaniem badacza. Niekiedy wybór ten jest oczywisty, gdyż w nazwie testu zawarta jest informacja o jego przeznaczeniu. Na przykład nazwa „test dla wartości średniej" jednoznacznie informuje, iż służy on do weryfikacji hipotezy dotyczącej wartości średniej populacji.

Dokonując wyboru testu, istotne jest, aby uwzględnić założenia stosowalności testu. Na przykład hipoteza o wartości średniej populacji może być testowana dwoma różnymi testami (t-Studenta i Z) w zależności od tego, czy mamy do czynienia z małą, czy dużą próbą i czy rozkład badanej populacji jest normalny, czy też jest nieznany. Spełnienie założeń stosowalności testu (np. założenia o normalności rozkładu populacji) sprawdza się także odpowiednimi testami.

Etap 3.
Obliczenie wartości sprawdzianu hipotezy

Sprawdzian hipotezy to pewna statystyka (**statystyka testowa)**, której wartość empiryczna obliczana jest na podstawie danych z próby w oparciu o konkretny wzór. Jak już wiemy, każda statystyka jest zmienną losową. Tak więc statystyka testowa, jako zmienna losowa, posiada określony rozkład (przy założeniu prawdziwości weryfikowanej hipotezy).

Znając rozkład statystyki testowej możemy określić, które wartości tej statystyki są bardzo mało prawdopodobne (co oznacza, że przeczą weryfikowanej hipotezie zerowej), a które wartości są wielce prawdopodobne (co oznacza, że przemawiają „na korzyść" hipotezy zerowej). Zasadniczą kwestią jest zatem umiejętność odpowiedzi na pytanie, które wartości statystyki testowej przeczą weryfikowanej hipotezie, a które nie. I tak:

Wartości *statystyki testowej*, przeczące hipotezie zerowej, tworzą tzw. **obszar krytyczny testu** (inaczej **zbiór krytyczny** lub **obszar odrzucenia hipotezy zerowej**).

Wartości *statystyki testowej*, przemawiające „na korzyść" hipotezy zerowej, tworzą tzw. **obszar akceptacji hipotezy zerowej** (inaczej **obszar przyjęcia hipotezy zerowej** lub **obszar nieodrzucenia hipotezy zerowej**).

Zauważmy, że *obszar krytyczny testu* łącznie z *obszarem akceptacji hipotezy zerowej* tworzą zbiór wszystkich możliwych wartości statystyki testowej (rys. 3.2–3.4). Tak więc konkretna wartość statystyki testowej albo należy do obszaru krytycznego, albo do obszaru akceptacji hipotezy zerowej.

Obszar krytyczny testu wyznaczają tzw. **wartości krytyczne** (inaczej **punkty krytyczne**). Na rysunkach 3.2–3.4 wartościami krytycznymi są K_1, K_2, K_3, K_4. Zauważmy, że wartości krytyczne są jednocześnie punktami „wyznaczającymi granice" między obszarem krytycznym a obszarem akceptacji hipotezy zerowej.

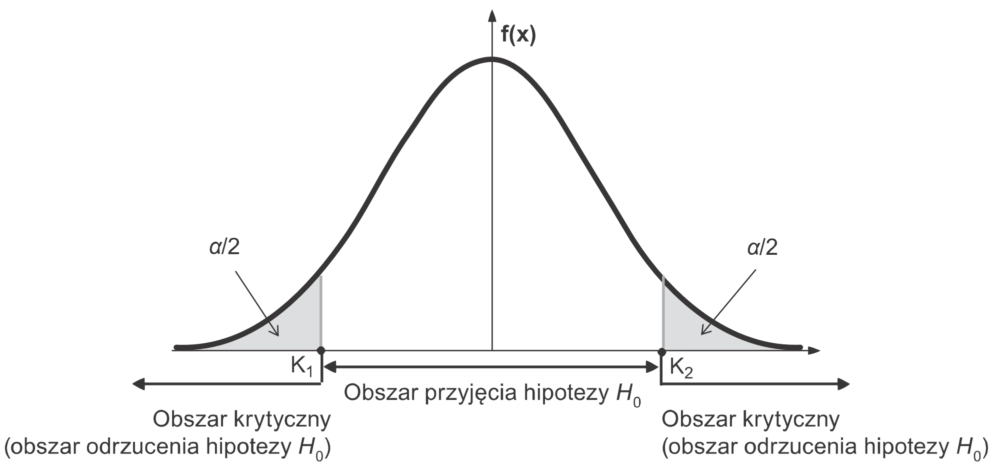
Etap 4.
Wyznaczenie obszaru krytycznego testu przy ustalonym poziomie istotności

Wyznaczenie *obszaru krytycznego* (*obszaru odrzucenia hipotezy zerowej*) sprowadza się do znalezienia *wartości krytycznych*. Wartości krytyczne określa się na podstawie rozkładu statystyki testowej, w zależności od przyjętego poziomu istotności (α) oraz rodzaju testu. W praktyce bardzo łatwo jest rozpoznać, jaki rozkład ma statystyka testowa. Przyjęło się bowiem, że oznaczenia literowe statystyk testowych (np. t, χ^2, Z), odpowiadają nazwie rozkładu, jaki ma dana statystyka. I tak na przykład, statystyka t ma rozkład t-Studenta, statystyka χ^2 ma rozkład chi-kwadrat, statystyka Z ma rozkład normalny standaryzowany itd.

Wyznaczenie obszaru krytycznego musi być poprzedzone ustaleniem *poziomu istotności testu* (α). Poziom istotności, jak już wiemy, przyjmowany jest z góry. Wybór zależy od tego, jak „rygorystycznie" chcemy weryfikować hipotezę.

W zależności od rodzaju testu (*test dwustronny* lub *test jednostronny*[3]) obszar krytyczny może być:
– **dwustronny**, czyli być sumą dwóch przedziałów liczbowych (rys. 3.2),
– **jednostronny**, czyli być przedziałem liczbowym (rys. 3.3 i 3.4).

Obszar krytyczny dwustronny buduje się w przypadku testu dwustronnego, natomiast obszar krytyczny jednostronny – w przypadku testu jednostronnego. Obszar krytyczny oznaczać będziemy literą K.



Rysunek 3.2. Schemat dwustronnego obszaru krytycznego

Dwustronny obszar krytyczny jest sumą dwóch przedziałów:

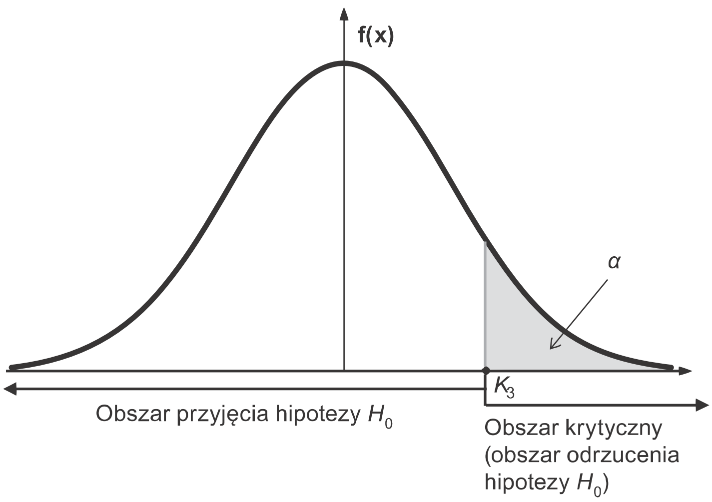
$$K = (-\infty; K_1] \cup [K_2; +\infty) \tag{3.2}$$

gdzie K_1, K_2 to wartości krytyczne testu.

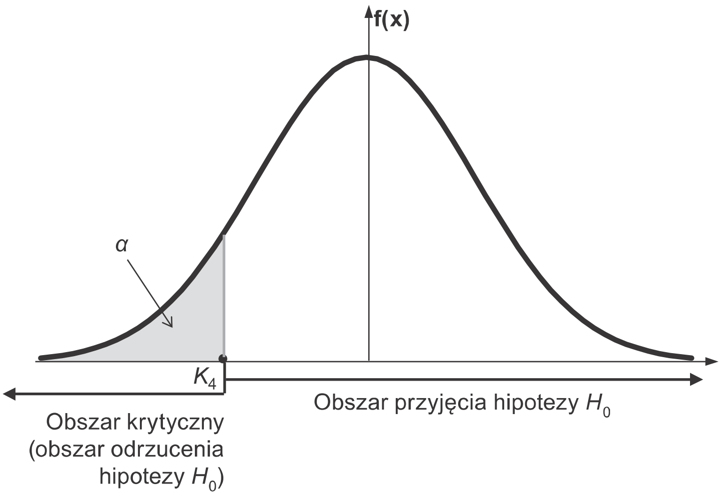
Tak więc w przypadku dwustronnego obszaru krytycznego wyznacza się dwie wartości krytyczne (K_1 i K_2). Zauważmy, że przy niektórych typach rozkładów statystyki testowej (t-Studenta, normalny standaryzowany) wartości K_1 i K_2 są liczbami przeciwnymi.

[3] Pojęcie testu dwustronnego i jednostronnego związane jest z postacią hipotezy alternatywnej. Gdy hipoteza alternatywna jest typu „≠", mówimy o teście dwustronnym, jeśli typu „>" lub „<" – o teście jednostronnym. Zagadnienie przybliżamy w dalszej części książki.

Zauważmy ponadto, że w przypadku dwustronnego obszaru krytycznego, wartości krytyczne odpowiadają dokładnie tym wartościom zmiennej (o odpowiednim rozkładzie), które znajdowaliśmy dla potrzeb estymacji przedziałowej (por. np. rys. 2.2).



Rysunek 3.3. Schemat prawostronnego obszaru krytycznego



Rysunek 3.4. Schemat lewostronnego obszaru krytycznego

Prawostronny obszar krytyczny jest przedziałem liczbowym:

$$K = [K_3; +\infty] \tag{3.3}$$

Lewostronny obszar krytyczny ma w zależności od rozkładu statystyki testowej postać:

$$K = (-\infty; K_4] \text{ lub } K = [0; K_4] \tag{3.4}$$

gdzie K_3, K_4 to wartości krytyczne testu.

W przypadku jednostronnych obszarów krytycznych wyznacza się jedną wartość krytyczną: K_3 lub K_4.

Etap 5.
Podjęcie decyzji weryfikacyjnej

Podjęcie decyzji weryfikacyjnej sprowadza się do odpowiedzi na pytanie, czy weryfikowaną hipotezę zerową należy odrzucić, czy też nie. Decyzję tę podejmujemy na podstawie obliczonej w etapie 3. wartości statystyki testowej. Po wyznaczeniu obszaru krytycznego sprawdzamy, czy obliczona wartość statystyki testowej należy do obszaru krytycznego, czy też do obszaru akceptacji (przyjęcia) hipotezy zerowej. Jeśli wartość ta należy do obszaru krytycznego to weryfikowaną hipotezę zerową odrzucamy. W przeciwnym przypadku hipotezę zerową pozostawiamy w mocy, stwierdzając, że nie ma podstaw do jej odrzucenia.

Decyzję weryfikacyjnej podejmujemy według następującej reguły:

- jeśli obliczona wartość statystyki testowej **należy** do obszaru krytycznego, to hipotezę H_0 **odrzucamy** i przyjmujemy H_1,
- jeśli obliczona wartość statystyki testowej **nie należy** do obszaru krytycznego, to hipotezę H_0 **pozostawiamy w mocy**, tzn. stwierdzamy, iż brak jest podstaw do jej odrzucenia.

Należy podkreślić, że przyjmując hipotezę zerową (H_0), ryzykujemy popełnieniem błędu II rodzaju. Prawdopodobieństwo popełnienia tego błędu (β) jest nieznane[4].

Obecnie przedstawimy metody testowania wybranych hipotez statystycznych za pomocą testów istotności. **Statystyczny test istotności** jest procedurą, w wyniku zastosowania której podejmuje się decyzję, czy weryfikowaną hipo-

---

[4] Znane są metody obliczania (bądź szacowania) prawdopodobieństwa popełnienia błędu II rodzaju.

tezę (H_0) należy odrzucić, czy też pozostawić w mocy (stwierdzić, iż brak jest podstaw do jej odrzucenia), przy znanym ryzyku popełnienia błędu I rodzaju (α).

W wyniku przeprowadzenia testów istotności często formułuje się wnioski, używając pojęcia **istotności statystycznej**. Mówimy na przykład: „różnica między starą i nową metodą produkcji jest *statystycznie istotne*”, „zależność zysku przedsiębiorstwa od wydatków poniesionych na reklamę jest *statystycznie istotna*”. Tego typu wnioski formułujemy oczywiście na podstawie badania próby. Warto podkreślić, że hipoteza zerowa zawsze orzeka o braku różnic (czy braku zależności). Jeśli wyniki uzyskane z próby „znacznie” odbiegają od tezy sformułowanej w hipotezie zerowej, powiemy, że różnica (lub związek) **są statystycznie istotne**, czyli nieprzypadkowe. Jeśli natomiast wyniki z próby odbiegają od tej tezy „nieznacznie”, wówczas powiemy, że różnica (lub związek) **nie są statystycznie istotne**, innymi słowy, zaobserwowane różnice (lub związek) można uznać za dzieło przypadku.

3.3. Parametryczne testy istotności dla jednej populacji

W kolejnych podrozdziałach omówimy testy pozwalające weryfikować hipotezy o wartości parametrów analizowanej populacji. Interesującymi nas parametrami będą: średnia, wariancja, odchylenie standardowe oraz wskaźnik struktury populacji.

3.3.1. Testy dla wartości średniej populacji

Bardzo często interesuje nas zweryfikowanie hipotezy, która precyzuje wartość średniej (m) populacji. Na przykład, chcemy sprawdzić przypuszczenie, iż średnia płaca w przemyśle wynosi 3800 zł. Hipotezę taką zapiszemy następująco: H_0: $m = 3800$.

Hipoteza zerowa o średniej populacji ma postać:

H_0: $m = m_0$

Hipoteza alternatywna może być sformułowana trojako:

(a) H_1: $m \neq m_0$ – hipoteza dwustronna,

(b) H_1: $m > m_0$ – hipoteza prawostronna,

(c) H_1: $m < m_0$ – hipoteza lewostronna,

gdzie m_0 jest zakładaną, hipotetyczną wartością średniej populacji.

Wybór konkretnej postaci (a), (b) lub (c) zależy od celu badania i naszych przypuszczeń czynionych na podstawie wcześniejszych przesłanek. Teoretycznie, postać typu (a) jest zawsze uzasadniona. Średnia populacji bowiem może równać się m_0, bądź nie równać się m_0 – innej możliwości nie ma. Decydując się natomiast na hipotezę alternatywną typu (b) lub (c) należy wybrać tę, która zgodnie z naszymi przypuszczeniami jest bardziej prawdopodobna.

Od postaci hipotezy alternatywnej zależy postać obszaru krytycznego, jaki skonstruujemy przy testowaniu (obszar krytyczny *dwustronny* lub *jednostronny*). Zasada jest następująca:

(a) dla hipotezy alternatywnej dwustronnej (typu „≠”) – konstruujemy **obszar krytyczny dwustronny,**
(b) dla hipotezy alternatywnej prawostronnej (typu „>”) – konstruujemy **obszar krytyczny prawostronny,**
(c) dla hipotezy alternatywnej lewostronnej (typu „<”) – konstruujemy **obszar krytyczny lewostronny**.

Powyższa zasada dotyczy hipotez parametrycznych. Sposób budowania obszaru krytycznego w przypadku hipotez nieparametrycznych omówimy w dalszej części książki.

Przypadek 1.
Test dla wartości średniej populacji o rozkładzie normalnym, mała próba

Etap 1.

Naszym celem jest zweryfikowanie hipotezy, że średnia populacji (m) przyjmuje pewną konkretną wartość m_0. Hipoteza alternatywna może mieć jedną z postaci (a), (b) lub (c):

H_0: $m = m_0$
(a) H_1: $m \neq m_0$
(b) H_1: $m > m_0$
(c) H_1: $m < m_0$

gdzie:
m – nieznana wartość średniej populacji,
m_0 – hipotetyczna (zakładana) wartość średniej populacji.

Etap 2.
Warunki stosowalności testu:

- populacja ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, przy czym nie jest znane odchylenie standardowe σ populacji,
- elementy do próby losowane są niezależnie,
- próba jest mała, tj. $n < 30$ (liczy mniej niż 30 elementów).

Jeśli spełnione są powyższe założenia, do weryfikacji sformułowanej hipotezy stosuje się **test *t*-Studenta** ze statystyką testową postaci 3.5.

Etap 3.
Obliczenie wartości statystyki testowej[5].

Statystyka testowa:

$$t_{emp} = \frac{\overline{x} - m_0}{\hat{s}} \sqrt{n} \tag{3.5}$$

gdzie:
$\overline{x}$ – średnia arytmetyczna próby,
m_0 – hipotetyczna wartość średniej populacji,
$\hat{s}$ – odchylenie standardowe próby obliczane zgodnie ze wzorem 2.19,
n – liczebność próby.

Statystyka testowa (przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0) ma rozkład *t*-Studenta z liczbą stopni swobody:

$$v = n - 1 \tag{3.6}$$

Wartości krytyczne testu wyznacza się więc na podstawie tego właśnie rozkładu.

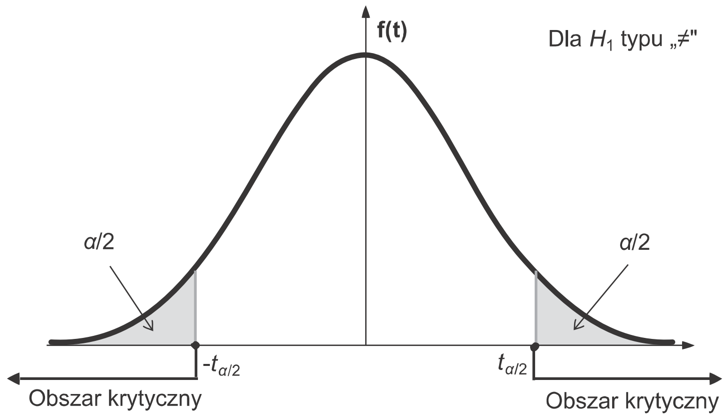
Etap 4.
Wyznaczenie obszaru krytycznego testu przy ustalonym poziomie istotności α.
Obszar krytyczny będzie miał jedną z poniższych postaci w zależności od typu hipotezy alternatywnej. I tak:

---

[5] Z uwagi na fakt, że między odchyleniem standardowym próby $\hat{s}$ a s (obliczanym zgodnie ze wzorem 2.20) zachodzi relacja: $\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1} s^2$, statystykę testową określoną wzorem 3.5 można przedstawić w następującej postaci równoważnej: $t_{emp} = \frac{\overline{x} - m_0}{s} \sqrt{n-1}$.

(a) dla hipotezy alternatywnej dwustronnej (typu „≠”) stosujemy *dwustronny obszar krytyczny* postaci:

$$K = (-\infty; -t_{\alpha/2}] \cup [t_{\alpha/2}; +\infty) \tag{3.7}$$



Rysunek 3.5. Schemat dwustronnego obszaru krytycznego przy stosowaniu testu *t*-Studenta, przypadek (a)

Wartość krytyczną $t_{\alpha/2}$ wyznaczamy, korzystając z funkcji Excela, przyjmując liczbę stopni swobody $v = n - 1$ i założony z góry poziom istotności α.

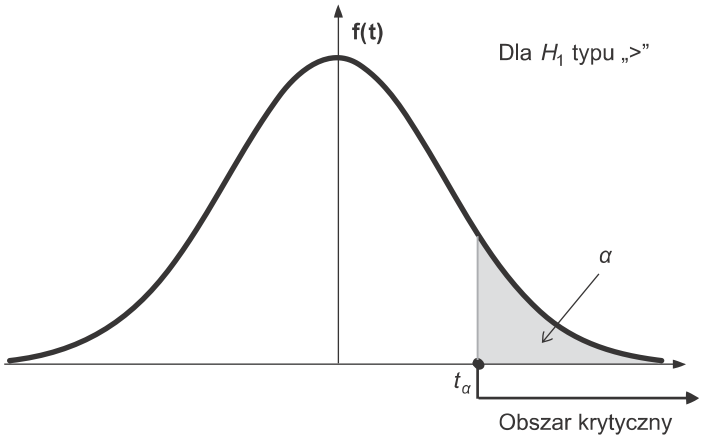
Składnia funkcji do wyznaczenia wartości krytycznej $t_{\alpha/2}$ (przy H_1 typu „≠”):
= ROZKŁ.T.ODWR.DS (α; n – 1) (*Excel 2010*)
= ROZKŁAD.T.ODW (α; n – 1) (*Excel 2007*)

Na przykład, dla α = 0,05 i n = 21, wartość krytyczna $t_{\alpha/2}$ = 2,09, bo jest to wartość funkcji:

= ROZKŁ.T.ODWR.DS (0,05; 20) (*Excel 2010*)
= ROZKŁAD.T.ODW (0,05; 20) (*Excel 2007*)

(b) dla hipotezy alternatywnej prawostronnej (typu „>”) stosujemy *prawostronny obszar krytyczny* postaci:

$$K = [t_{\alpha/2}; +\infty) \tag{3.8}$$



Rysunek 3.6. Schemat prawostronnego obszaru krytycznego przy stosowaniu testu *t*-Studenta, przypadek (b) – hipoteza alternatywna typu „<"

Wartość krytyczną t_α wyznaczamy z funkcji Excela, przyjmując liczbę stopni swobody $v = n - 1$. W przypadku zastosowania funkcji ROZKŁ.T.ODWR (dostępnej w *Excelu 2010*) jako argument *prawdopodobieństwo* należy podać $1 - \alpha$. Natomiast w przypadku funkcji ROZKŁAD.T.ODW (*Excel 2007*) argumentem *prawdopodobieństwo* jest podwojony poziom istotności, tj. 2α.

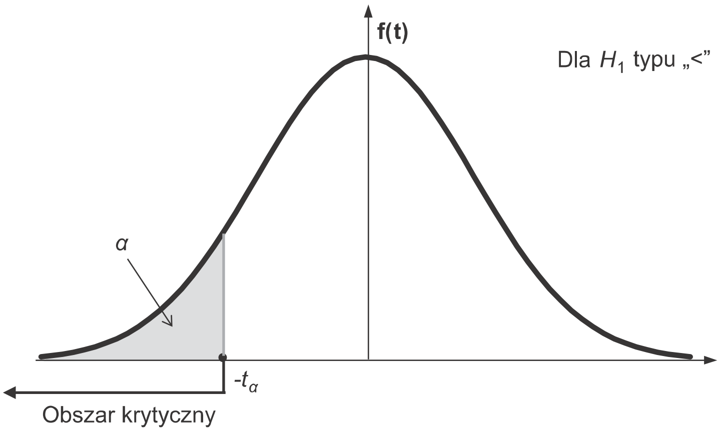
Składnia funkcji do wyznaczenia wartości krytycznej $t_{\alpha/2}$ (przy H_1 typu „>"):
= ROZKŁ.T.ODWR ($1 - \alpha$; $n - 1$) (*Excel 2010*)
= ROZKŁAD.T.ODW (2α; $n - 1$) (*Excel 2007*)

Na przykład, dla $\alpha = 0{,}05$ i $n = 21$, wartość krytyczna $t_\alpha = 1{,}72$, bo jest to wartość funkcji:

= ROZKŁ.T.ODWR (0,95; 20) (*Excel 2010*)
= ROZKŁAD.T.ODW (0,1; 20) (*Excel 2007*)

(c) dla hipotezy alternatywnej lewostronnej (typu „<") stosujemy *lewostronny obszar krytyczny* postaci:

$$K = (-\infty; -t_\alpha] \tag{3.9}$$



Rysunek 3.7. Schemat lewostronnego obszaru krytycznego przy stosowaniu testu *t*-Studenta, przypadek (c) – hipoteza alternatywna typu „>”

Wartość krytyczną $-t_\alpha$ można wyznaczyć za pomocą funkcji Excela w ten sposób, że wyznacza się najpierw wartość dodatnią t_α (tak jak w przypadku (b), gdy H_1 jest typu „>”) i uzyskany wynik poprzedza znakiem minus. Bezpośrednio, ujemną wartość krytyczną $-t_\alpha$ można wyznaczyć za pomocą funkcji ROZKŁ.T.ODWR dostępnej w *Excelu 2010*. Przy tym jako argument *prawdopodobieństwo* podajemy α. Tak więc:

> **Składnia funkcji** do wyznaczenia wartości krytycznej $-t_\alpha$ (przy H_1 typu „<”):
> = ROZKŁ.T.ODWR (α; $n - 1$) (*Excel 2010*)
> = – ROZKŁAD.T.ODW (2α; $n - 1$) (*Excel 2007*)

Na przykład, dla $\alpha = 0{,}05$ i $n = 21$, wartość krytyczna $-t_\alpha = -1{,}72$, bo jest to wartość funkcji:

= ROZKŁ.T.ODWR (0,05; 20) (*Excel 2010*)
= − ROZKŁAD.T.ODW (0,1; 20) (*Excel 2007*)

Etap 5.

Podejmujemy decyzję weryfikacyjną zgodnie z regułą:

- jeśli wartość statystyki testowej t_{emp} **należy** do obszaru krytycznego, to hipotezę H_0 **odrzucamy** i przyjmujemy H_1,
- jeśli wartość statystyki testowej **nie należy** do obszaru krytycznego, to hipotezę H_0 **pozostawiamy w mocy** (tzn. stwierdzamy, że brak jest podstaw do jej odrzucenia).

Przy tym **obszarem krytycznym** jest:
dla typu (a), H_1: $m \neq m_0$: $K = (-\infty; -t_{\alpha/2}] \cup [t_{\alpha/2}; +\infty)$,
dla typu (b), H_1: $m > m_0$: $K = [t_\alpha; +\infty)$,
dla typu (c), H_1: $m < m_0$: $K = (-\infty; -t_\alpha]$.

Regułę decyzyjną można również zapisać następująco:

Dla typu (a):
- jeśli $|t_{emp}| \geq t_{\alpha/2}$ to hipotezę H_0 odrzucamy i przyjmujemy H_1,
- jeśli $|t_{emp}| < t_{\alpha/2}$ to hipotezę H_0 pozostawiamy w mocy.

Dla typu (b):
- jeśli $t_{emp} \geq t_\alpha$ to hipotezę H_0 odrzucamy i przyjmujemy H_1,
- jeśli $t_{emp} < t_\alpha$ to hipotezę H_0 pozostawiamy w mocy.

Dla typu (c):
- jeśli $t_{emp} \leq -t_\alpha$ to hipotezę H_0 odrzucamy i przyjmujemy H_1,
- jeśli $t_{emp} > -t_\alpha$ to hipotezę H_0 pozostawiamy w mocy.

Przykład 3.1

Według norm producenta średnie zużycie benzyny w samochodach marki Toyota, model Corolla 1,6, produkowanych w latach 2007–2013 powinno wynosić 7,5 l/100 km. Użytkownicy uważają, że zużycie to jest wyższe niż 7,5 l/100 km. W celu sprawdzenia podejrzeń użytkowników pobrano losową próbę 24 samochodów, która dała następujące wyniki:

Tabela 3.2. Zużycie benzyny w losowej próbie samochodów marki Toyota

Lp..	Zużycie benzyny [l/100 km]	Lp.	Zużycie benzyny [l/100 km]
1.	6,75	13.	7,75
2.	7,75	14.	7,85
3.	7,6	15.	8,3
4.	7,05	16.	8,25
5.	8,9	17.	7,3
6.	8,25	18.	6,5
7.	7,25	19.	8,25
8.	8,25	20.	8,45

Lp..	Zużycie benzyny [l/100 km]	Lp.	Zużycie benzyny [l/100 km]
9.	7,3	21.	7,75
10.	7,2	22.	8,8
11.	7,5	23.	8,75
12.	7,45	24.	7,1

Źródło: www.autocentrum.pl.

Czy informacje pochodzące z próby upoważniają do twierdzenia, że norma podana przez producenta jest błędna i w rzeczywistości średnie zużycie benzyny przekracza 7,5 l/100 km? Należy przyjąć poziom istotności 0,02 i założenie, że zużycie benzyny jest zmienną o rozkładzie normalnym.

Rozwiązanie

1. Sformułowanie hipotez.

W przypadku analizowanego problemu, hipoteza zerowa powinna orzekać, że średnie zużycie benzyny w całej populacji tego modelu samochodów równe jest 7,5 l/100 km, natomiast hipoteza alternatywna – że przekracza 7,5 l/100 km, czyli że jest niezgodne z zapewnieniem producenta. Tak więc hipotezy sformułujemy następująco:

$$H_0\colon m = 7{,}5$$
$$H_1\colon m > 7{,}5.$$

2. Wybór odpowiedniego testu.

Ze względu na to, że pobrano małą próbę, a rozkład zużycia benzyny można uznać za normalny, do weryfikacji postawionej hipotezy zastosujemy test *t*-Studenta. Wartość statystyki testowej obliczymy więc zgodnie ze wzorem 3.5.

3. Obliczenie wartości statystyki testowej.

Posiadając dane surowe, średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe próby możemy obliczyć wykorzystując funkcje Excela:

= ŚREDNIA (A1:A24) (*Excel 2010* i *2007*)
= ODCH.STANDARD.PRÓBKI (A1:A24) (*Excel 2010*)
= ODCH.STANDARDOWE (A1:A24) (*Excel 2007*)

podając jako argument funkcji zakres danych surowych, tu: A1:A24.

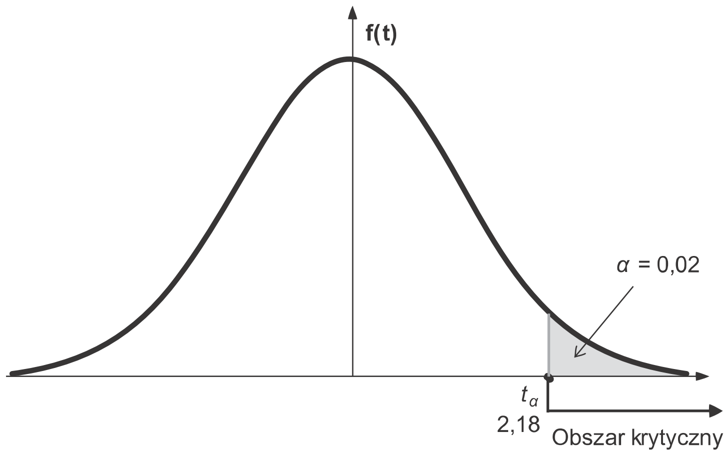
Otrzymujemy:
średnia arytmetyczna próby: $\bar{x} = 7{,}76$ [l/100 km],
odchylenie standardowe próby: $\hat{s} = 0{,}65$ [l/100 km].

Tak więc empiryczna wartość statystyki testowej (wzór 3.5) równa jest:

$$t_{emp} = \frac{\overline{x} - m_0}{\hat{s}}\sqrt{n} = \frac{7{,}76 - 7{,}5}{0{,}65}\sqrt{24} = 1{,}96.$$

4. Wyznaczenie obszaru krytycznego.

Hipoteza alternatywna jest typu „>", więc należy wyznaczyć prawostronny obszar krytyczny, który ma postać: $K = [t_\alpha; +\infty)$. Wartość krytyczną t_α wyznaczamy na podstawie rozkładu *t*-Studenta z liczbą stopni swobody $v = n - 1 = 23$. Przyjęty poziom istotności $\alpha = 0{,}02$, oznacza, że punkt t_α „odcina" pod *prawym ogonem* krzywej gęstości pole o mierze $\alpha = 0{,}02$.



Rysunek 3.8. Prawostronny obszar krytyczny $K = [2{,}18; +\infty)$ przy testowaniu hipotezy o średnim zużyciu benzyny, przykład 3.1

Wartość t_α wyznaczamy za pomocą funkcji Excela następująco:

= ROZKŁ.T.ODWR (1 – 0,02; 23) = ROZKŁ.T.ODWR (0,98; 23)

(*Excel 2010*)

= ROZKŁAD.T.ODW (2 · 0,02; 23) = ROZKŁAD.T.ODW (0,04; 23)

(*Excel 2007*)

Otrzymujemy $t_\alpha = 2{,}18$. Obszar krytyczny ma więc postać: $K = [2{,}18; +\infty)$.

5. Podjęcie decyzji weryfikacyjnej.

Wyznaczona (w punkcie 3.) empiryczna wartość statystyki testowej t_{emp} nie należy do obszaru krytycznego:

$$t_{emp} = 1{,}96 \notin [2{,}18; +\infty).$$

Oznacza to, iż nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej orzekającej, że średnie zużycie benzyny w samochodach badanej marki równe jest 7,5 l/100 km. Tak więc wyniki badania próby nie upoważniają nas do twierdzenia, że norma podana przez producenta jest błędna.

koniec przykładu

Przypadek 2.
Test dla wartości średniej populacji o nieznanym rozkładzie, duża próba

Etap 1.

Celem jest zweryfikowanie hipotezy, że średnia populacji przyjmuje konkretną wartość m_0. Hipotezę alternatywną, tak jak poprzednio, możemy sformułować trojako:

H_0: $m = m_0$
(a) H_1: $m \neq m_0$
(b) H_1: $m > m_0$
(c) H_1: $m < m_0$

gdzie:
m – nieznana wartość średniej populacji,
m_0 – hipotetyczna wartość średniej populacji.

Etap 2.

Warunki stosowalności testu:

- rozkład populacji jest nieznany (może być dowolny),
- elementy do próby losowane są niezależnie,
- próba jest duża (liczy nie mniej niż 30 elementów), tzn. $n \geq 30$.

Jeśli spełnione są powyższe założenia, do weryfikacji sformułowanej hipotezy stosuje się **test *Z***.

Etap 3.

Obliczenie wartości statystyki testowej[6].

[6] Statystykę testową postaci 3.10 w przypadku dużej próby proponuje m.in. A.D. Aczel, *Statystyka w zarządzaniu*, op. cit., s. 276. Wielu autorów, zamiast wzoru 3.10, podaje formułę: $z_{emp} = \frac{\bar{x} - m_0}{\hat{s}}\sqrt{n}$, w której w miejscu odchylenia standardowego próby $\hat{s}$ występuje s (obliczane zgodnie ze wzorem 2.20). Należy zaznaczyć, że dla dużych prób praktycznie nie ma różnicy między ocenami $\hat{s}$ oraz s (por. A. Zeliaś, *Metody statystyczne*, PWE, Warszawa 2000, s. 239), więc w zastosowaniach praktycznych wykorzystuje się obie postaci statystyki testowej.

Statystyka testowa:

$$z_{emp} = \frac{\overline{x} - m_0}{\hat{s}} \sqrt{n} \tag{3.10}$$

gdzie:
$\overline{x}$ – średnia arytmetyczna próby,
m_0 – hipotetyczna wartość średniej populacji,
$\hat{s}$ – odchylenie standardowe próby obliczane zgodnie ze wzorem 2.19,
n – liczebność próby.

Statystyka testowa (przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0) ma rozkład Z, tj. rozkład normalny standaryzowany. Tak więc wartości krytyczne znajdujemy na podstawie tego właśnie rozkładu.

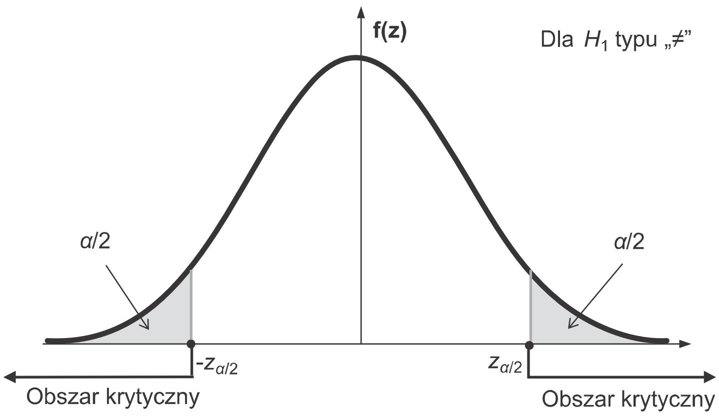
Etap 4.

Wyznaczenie obszaru krytycznego testu przy ustalonym poziomie istotności α.

Obszar krytyczny będzie miał jedną z poniższych postaci w zależności od typu hipotezy alternatywnej. I tak:

(a) **dla hipotezy alternatywnej dwustronnej** (typu „≠”) budujemy *dwustronny obszar krytyczny* postaci:

$$K = (-\infty; -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}; +\infty) \tag{3.11}$$



Rysunek 3.9. Schemat dwustronnego obszaru krytycznego przy stosowaniu testu Z, przypadek (a) – hipoteza alternatywna typu „≠”

Wartość krytyczną $z_{\alpha/2}$ wyznaczamy z funkcji Excela w taki sam sposób jak dla potrzeb estymacji przedziałowej:

Składnia funkcji do wyznaczenia wartości krytycznej $z_{\alpha/2}$ (przy H_1 typu „≠"):
= ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR (1 – α/2) (*Excel 2010*)
= ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW (1 – α/2) (*Excel 2007*)

Uwaga. Jako argument funkcji *prawdopodobieństwo* podajemy wartość dystrybuanty w punkcie $z_{\alpha/2}$, czyli miarę pola pod krzywą gęstości *na lewo* od $z_{\alpha/2}$, która w tym przypadku równa jest $1 - \alpha/2$ (p. rys. 3.9), tzn.:

$$F(z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

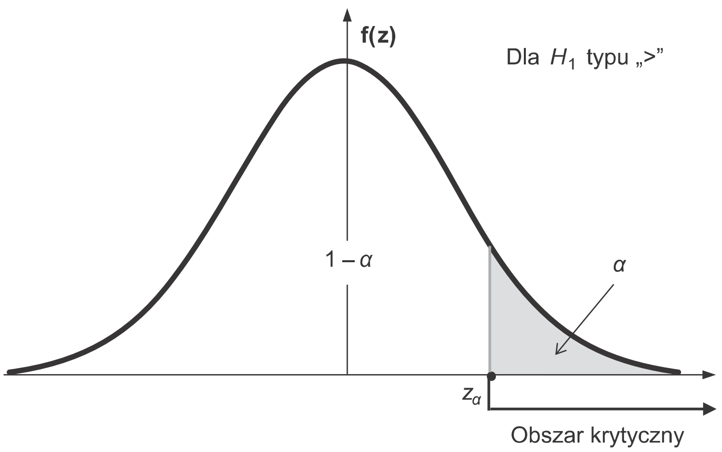
Na przykład, dla α = 0,01 (co oznacza, że $1 - \alpha/2 = 0{,}995$), wartość krytyczna $z_{\alpha/2} = 2{,}58$, bo funkcje:

= ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR (0,995) (*Excel 2010*)
= ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW (0,995) (*Excel 2007*)

dają wartość 2,58. Tak więc zbiór krytyczny ma postać:
$K = (-\infty;\ -2{,}58] \cup [2{,}58;\ +\infty)$.

(b) dla hipotezy alternatywnej prawostronnej (typu „>") budujemy *prawostronny obszar krytyczny* postaci:

$$K = [z_{\alpha};\ +\infty) \tag{3.12}$$



Rysunek 3.10. Schemat prawostronnego obszaru krytycznego przy stosowaniu testu *Z*, przypadek (b) – hipoteza alternatywna typu „>"

Wartość krytyczną z_{α} wyznaczamy z funkcji Excela:

Składnia funkcji do wyznaczenia wartości krytycznej z_α (przy H_1 typu „>"):
= ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR (1 – α) (*Excel 2010*)
= ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW (1 – α) (*Excel 2007*)

Uwaga. Argumentem funkcji *prawdopodobieństwo* jest tu $1 - \alpha$, gdyż tyle jest równa miara pola *na lewo* od punktu z_α (p. rys. 3.10), czyli dystrybuanta w punkcie z_α:

$$F(z_\alpha) = 1 - \alpha$$

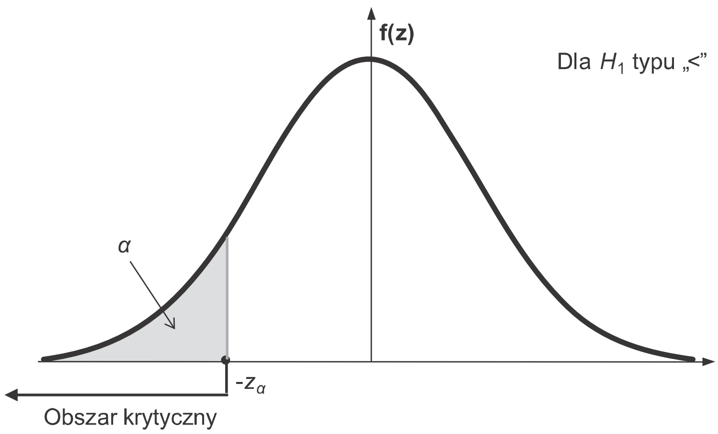
Na przykład, dla $\alpha = 0{,}01$ (co oznacza, że $1 - \alpha = 0{,}99$), wartość krytyczna $z_\alpha = 2{,}33$, bo taka jest wartość funkcji:

= ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR (0,99) (*Excel 2010*)
= ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW (0,99) (*Excel 2007*)

Obszar krytyczny ma więc postać: $K = [2{,}33; +\infty)$.

(c) **dla hipotezy alternatywnej lewostronnej** (typu „<") budujemy *lewostronny obszar krytyczny* postaci:

$$K = (-\infty; -z_\alpha] \tag{3.13}$$



Rysunek 3.11. Schemat lewostronnego obszaru krytycznego przy stosowaniu testu *Z*, przypadek (c) – hipoteza alternatywna typu „<"

W tym przypadku wyznaczamy ujemną wartość krytyczną $-z_\alpha$. Wykorzystujemy w tym celu funkcje Excela następująco:

Składnia funkcji do wyznaczenia wartości krytycznej $-z_\alpha$ (przy H_1 typu „<"):
= ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR (α) (*Excel 2010*)
= ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW (α) (*Excel 2007*)

Uwaga. Argumentem funkcji *prawdopodobieństwo* jest w tym przypadku α. Spełniona jest bowiem relacja:

$$F(-z_\alpha) = \alpha$$

która oznacza, że wartość dystrybuanty w punkcie $-z_\alpha$ równa jest α, innymi słowy pole pod *lewym ogonem* krzywej „odcięte" przez $-z_\alpha$ ma miarę α.

Na przykład, dla $\alpha = 0{,}01$ wartość krytyczna $-z_\alpha = -2{,}33$, bo jest to wartość funkcji:

= ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR (0,01) (*Excel 2010*)
= ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW (0,01) (*Excel 2007*)

Tak więc zbiór krytyczny ma postać: $K = (-\infty; -2{,}33]$.

Etap 5.

Podjęcie decyzji weryfikacyjnej zgodnie z regułą:

- jeśli wartość statystyki testowej z_{emp} **należy** do obszaru krytycznego, to hipotezę H_0 **odrzucamy** i przyjmujemy H_1,
- jeśli wartość statystyki testowej **nie należy** do obszaru krytycznego, to hipotezę H_0 **pozostawiamy w mocy** (stwierdzamy, iż brak jest podstaw do jej odrzucenia).

Przy tym **obszarem krytycznym** jest:
dla typu (a), H_1: $m \neq m_0$: $K = (-\infty; -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}; +\infty)$,
dla typu (b), H_1: $m > m_0$: $K = [z_\alpha; +\infty)$,
dla typu (c), H_1: $m < m_0$: $K = (-\infty; -z_\alpha]$.

Regułę decyzyjną można zapisać następująco:

Dla typu (a):

- jeśli $|z_{emp}| \geq z_{\alpha/2}$ to hipotezę H_0 odrzucamy i przyjmujemy H_1,
- jeśli $|z_{emp}| < z_{\alpha/2}$ to hipotezę H_0 pozostawiamy w mocy.

Dla typu (b):

- jeśli $z_{emp} \geq z_\alpha$ to hipotezę H_0 odrzucamy i przyjmujemy H_1,
- jeśli $z_{emp} < z_\alpha$ to hipotezę H_0 pozostawiamy w mocy.

Dla typu (c):

- jeśli $z_{emp} \leq -z_\alpha$ to hipotezę H_0 odrzucamy i przyjmujemy H_1,
- jeśli $z_{emp} > -z_\alpha$ to hipotezę H_0 pozostawiamy w mocy.

Przydatne funkcje Excela

W Excelu dostępne są funkcje, które pozwalają wyznaczyć tzw**. prawdopodobieństwo testowe (*p*)** odpowiadające statystyce *Z*, używanej do zweryfikowania hipotezy o średniej populacji (tj. statystyce obliczonej według wzoru 3.10). Pojęcie to wyjaśniamy obszerniej w podrozdziale 3.5. W tym miejscu przedstawmy tylko regułę decyzyjną, która dzięki wykorzystaniu *prawdopodobieństwa testowego p* znacznie się upraszcza. Oto ona:

- gdy $p \leq \alpha$ – to hipotezę H_0 odrzucamy i przyjmujemy H_1,
- gdy $p > \alpha$ – to hipotezę H_0 pozostawiamy w mocy (stwierdzamy, iż brak jest podstaw do jej odrzucenia)

gdzie α jest przyjętym poziomem istotności testu.

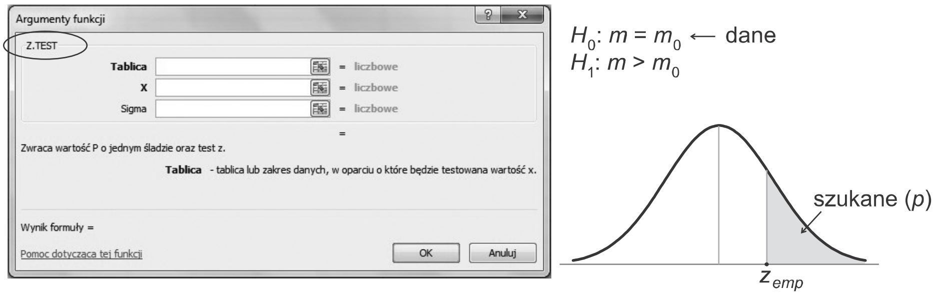
Z podanej reguły wynika, iż po wyznaczeniu *prawdopodobieństwa testowego p*, wystarczy porównać jego wartość z przyjętym poziomem istotności α i na tej podstawie podjąć decyzję weryfikacyjną o odrzuceniu bądź nieodrzuceniu hipotezy zerowej. Tak więc znając wartość *prawdopodobieństwa testowego* można bardzo szybko przeprowadzić weryfikację postawionej hipotezy.

Jak obliczyć prawdopodobieństwo testowe *p* w teście *Z* dla średniej?

Wystarczy zastosować jedną z funkcji:

Wstaw funkcję (ikona) → *kategoria: statystyczne* → **Z.TEST** (*Excel 2010*)
Wstaw funkcję (ikona) → *kategoria: statystyczne* → **TEST.Z** (*Excel 2007*)

Wybór zatwierdzamy przyciskiem **OK**.



Rysunek 3.12. Zasada obliczania prawdopodobieństwa testowego *p* w prawostronnym teście *Z* dla średniej, *Excel 2010*

Pola okna dialogowego *Argumenty funkcji* wypełniamy następująco:

Tablica – zakres danych wejściowych, tj. zakres komórek, do których wprowadzono dane surowe, np. A1:A30,

x – hipotetyczna, czyli testowana wartość średniej populacji, tj. m_0,

Sigma – odchylenie standardowe populacji (σ), jeśli jest znane. Jeśli nie jest znane, pola tego nie wypełniamy (wówczas Excel użyje odchylenia standardowego próby $\hat{s}$).

Uwaga. Za pomocą przedstawionych tu funkcji wyznaczane jest *p* dla testu *prawostronnego*, tzn. w przypadku hipotezy alternatywnej typu „>”[7].

Składnia funkcji do obliczenia prawdopodobieństwa testowego *p* w prawostronnym teście *Z* dla średniej:

= Z.TEST (*zakres danych*; m_0; σ lub pomijamy) (*Excel 2010*)

= TEST.Z (*zakres danych*; m_0; σ lub pomijamy) (*Excel 2007*)

Przykład 3.2

Dzienne zużycie wody [w m³] w 40 wylosowanych gospodarstwach domowych pewnego miasta przedstawiało się następująco:

0,112	0,124	0,108	0,127	0,131	0,142	0,083	0,079	0,125	0,131
0,113	0,111	0,093	0,125	0,136	0,134	0,094	0,082	0,123	0,199
0,062	0,146	0,135	0,119	0,115	0,142	0,128	0,114	0,129	0,118
0,181	0,136	0,104	0,123	0,118	0,059	0,082	0,147	0,144	0,126

[7] Chcąc wyznaczyć prawdopodobieństwo testowe dla testu *lewostronnego* należy wartość uzyskaną dla testu *prawostronnego* odjąć od jedynki. Natomiast prawdopodobieństwo testowe dla testu *dwustronnego* uzyskuje się mnożąc przez 2 wartość otrzymaną dla testu *jednostronnego* (*prawo-* lub *lewostronnego* wybierając mniejszą z nich).

Na poziomie istotności 0,05 należy zweryfikować hipotezę, że rzeczywiste średnie dzienne zużycie wody w gospodarstwach domowych tego miasta jest wyższe niż 0,1 m^3.

Rozwiązanie

Analizowaną zmienną losową jest dzienne zużycie wody w gospodarstwach domowych. Formułujemy hipotezy zerową i alternatywną:

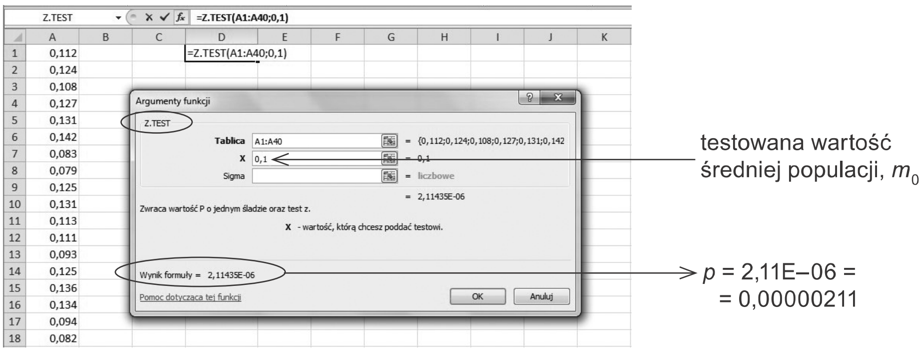
$$H_0\colon m = 0{,}1$$
$$H_1\colon m > 0{,}1$$

gdzie *m* jest średnią populacji, czyli rzeczywistym średnim dziennym zużyciem wody we wszystkich gospodarstwach domowych miasta.

Rozkład populacji nie jest znany, przy czym została wylosowana duża próba. Oznacza to, że do zweryfikowania postawionej hipotezy odpowiednie będzie zastosowanie testu *Z*. Ponieważ dysponujemy danymi surowymi, możemy przeprowadzić weryfikację w sposób uproszczony, tj. wykorzystując **prawdopodobieństwo testowe *p***. Tak więc zamiast obliczać wartość statystyki testowej z_{emp} według wzoru 3.10, a następnie porównywać ją z wartością krytyczną z_α, wystarczy wyznaczyć prawdopodobieństwo testowe *p* i porównać je z poziomem istotności *α*. Do obliczenia prawdopodobieństwa testowego *p* wykorzystujemy jedną z funkcji Excela:

= Z.TEST (A1:A40; 0,1) (*Excel 2010*)
= TEST.Z (A1:A40; 0,1) (*Excel 2007*)

gdzie A1:A40 jest zakresem danych surowych.



Rysunek 3.13. Obliczenie prawdopodobieństwa testowego *p* w teście *Z* dla średniej (przykład 3.2), *Excel 2010*

Wartość prawdopodobieństwa testowego $p = 0{,}00000211$. Przyjęty został poziom istotności $\alpha = 0{,}05$, tak więc:

$$p < \alpha$$

co oznacza, że hipotezę zerową należy odrzucić i przyjąć hipotezę alternatywną. Średnie dzienne zużycie wody w gospodarstwach domowych tego miasta jest wyższe niż 0,1 m^3. Ryzyko pomyłki jest bardzo małe i wynosi 0,00000211.

koniec przykładu

3.3.2. Testy dla wariancji populacji

Test dla wariancji populacji jest testem dla hipotezy, że wariancja populacji σ^2 przyjmuje pewną konkretną wartość σ_0^2. Oczywiste jest, że w wyniku testowania hipotezy o wariancji, zdobywamy wiedzę również o odchyleniu standardowym[8]. Jeśli na przykład uznamy za słuszną hipotezę zerową orzekającą, że wariancja populacji $\sigma^2 = 400$, to jednocześnie mamy prawo twierdzić, iż odchylenie standardowe populacji $\sigma = 20$.

Przypadek 1.
Test dla wariancji populacji o rozkładzie normalnym, mała próba

Etap 1.
Celem jest zweryfikowanie hipotezy orzekającej, że wariancja populacji przyjmuje konkretną wartość.

Hipoteza zerowa o wariancji populacji ma postać:

H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$

Hipoteza alternatywna może mieć jedną z postaci:

(a) H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ – hipoteza dwustronna,
(b) H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$ – hipoteza prawostronna,
(c) H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$ – hipoteza lewostronna.

gdzie:
σ^2 – nieznana wartość wariancji populacji,
σ_0^2 – hipotetyczna (zakładana) wartość wariancji populacji.

[8] Mimo że test dla wariancji może być stosowany również do testowania hipotez sformułowanych w odniesieniu do odchylenia standardowego, tak postawioną hipotezę należy przekształcić na hipotezę dotyczącą wariancji, S.M. Kot, J. Jakubowski, A. Sokołowski, *Statystyka*, Difin, Warszawa 2007, s. 256.