

## ROZDZIAŁ 16

### Grafowe reprezentacje obiektów technicznych

Mirosław HAJDER\*, Mariusz NYCZ\*, Janusz KOLBUSZ\*

\*Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania z siedzibą w Rzeszowie

\*Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza,

Miroslaw.Hajder@gmail.com, MNycz@prz.edu.pl, JKolbusz@wsiz.rzeszow.pl

#### Streszczenie

*Tematem rozdziału są metody opisu obiektów technicznych, bazujące na wykorzystaniu teorii grafów. Autorzy koncentrują się na dostosowaniu rodzaju wykorzystywanego modelu do charakterystyk obiektu oraz procesu modelowania. Dla obiektów z niezależną strukturą, oprócz klasycznego przedstawienia grafu, zaproponowano zastosowanie krawędziowego i wierzchołkowo-krawędziowego sposobu ich zapisu. Dla obiektów ze współdzielonymi elementami, zasugerowano wykorzystanie pochodnych grafów PBL. Dla każdego typu reprezentacji określono obszar jego wykorzystania. Rozdział jest adresowany do osób zajmujących się bezpieczeństwem obiektów technicznych.*

#### 1. Wprowadzenie

Bezpieczeństwo to jeden z najistotniejszych problemów dotyczących praktycznie wszystkich aspektów działalności współczesnego człowieka. Dla znacznej części społeczeństwa, kojarzy się ono, przede wszystkim, z przestępczością popolitą, terroryzmem oraz działaniami wojennymi. Jednak zagrożenia dla zdrowia i życia człowieka, a także gromadzonych przez niego wartości materialnych znacznie częściej są skutkiem katastrof technologicznych i naturalnych. W wyniku charakterystycznego dla drugiej połowy XX wieku gwałtownego, społeczno-gospodarczego rozwoju świata, pojawiły się wielkoskalowe systemy techniczne, wymagające niespotykanej dotąd politycznej, gospodarczej, a nawet wojskowej aktywności podmiotów biznesowych, nierzadko obejmującej swym zasięgiem całe kontynenty.

---

Badania w ramach projektu: „*Neuronowe i immunologiczne wspomaganie analizy i syntezy modeli obiektów technicznych na bazie struktur wykorzystujących grafy rzadkie w warunkach niekompletności informacji*”.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej z Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu Państwa w ramach Regionalnego Programu Operacyjnego Województwa Podkarpackiego na lata 2007 – 2013. Inwestujemy w rozwój województwa podkarpackiego.

Budowane systemy techniczne, często funkcjonujące autonomicznie, wyposaża się w rozbudowane sieci zasilające, własną strukturę transportową, sterującą i zarządzającą. Wykorzystują one szeroko, zaawansowane metody pozyskiwania zasobów ludzkich, technologicznych i surowcowych. Niestety, ich często niekontrolowanemu rozwojowi, towarzyszy wzrost wrażliwości środowiska na działanie czynników zewnętrznych o charakterze katastroficznym, takich jak gwałtowne zjawiska pogodowe, powódzie, trzęsienia ziemi, celowe lub losowe szkodliwe działania techniczne [1], [2], [3], [4], [5]. Opisane zjawiska nasilają się z upływem czasu.

Jednym z najważniejszych kierunków badań w obszarze bezpieczeństwa obiektów technicznych (OT) jest analiza żywotności, która obok niezawodności i odporności na uszkodzenia jest podstawową charakterystyką określającą bezpieczeństwo eksploatacji OT. Szeroko wykorzystywanym, efektywnym sposobem badania żywotności obiektu jest przedstawienie go w postaci modelu grafowego. W takim przypadku, wskaźnikiem żywotności badanego OT będą pochodne wierzchołkowej lub krawędziowej spójność grafu modelu [6], [7], [8], [9], [10].

Metody teorii grafów odgrywają szczególną rolę przy analizie złożonych obiektów technicznych, takich jak sieci teleinformatyczne. W szczególności, stanowią one podstawę: analizy żywotności sieci; oceny poziomu dostępności informacji; projektowania sieci połączeniowych; optymalizacji administrowania sieciami korporacyjnymi; podwyższenia ich przepustowości; ulepszania routingu; zapewniania i poprawy bezpieczeństwa; analizy rozprzestrzeniania się złośliwego oprogramowania.

## 2. Reprezentacje grafu

### 2.1. Podstawowe definicje teorii grafów

Teoria grafów jest dyscypliną naukową będącą częścią matematyki dyskretnej, zajmująca się analizą właściwości skończonych zbiorów z ściśle określonymi relacjami pomiędzy ich elementami. Jest ona szeroko wykorzystywana do opisu i badania różnorodnych systemów technicznych, biologicznych, ekonomicznych i społecznych. Podstawową definicją teorii jest określenie grafu, które może mieć poniższą postać.

#### Definicja 1

*Grafem nieskierowanym  $G=(V_G, E_G)$  nazywamy parę dwóch niepustych skończonych, rozłącznych zbiorów: zbioru  $V_G$ , nazywanego zbiorem wierzchołków grafu ( $V_G = \{v_{G_1}, v_{G_2}, \dots, v_{G_n}\}, n > 0$ ) oraz zbioru  $E_G$ , będącego zbiorem jego krawędzi ( $E_G = \{e_{G_1}, e_{G_2}, \dots, e_{G_m}\}, m > 0$ ), przy czym dla każdego  $i$ ,  $e_{G_i}$  jest parą elementów ze zbioru wierzchołków  $V_G$ .*

Powyższa definicja nie jest jedyną, w literaturze można znaleźć alternatywne określenia grafu [6], [7], [8], [9]. Pomiedzy elementami grafu, a komponentami modelowanego obiektu istnieje pewne przyporządkowanie. Dla przykładu, rozważmy połączenia sieci teleinformatycznej. Najczęściej, zbiór wierzchołków grafu reprezentuje sobą zbiór jej węzłów, a zbiór krawędzi – zbiór kanałów komunikacyjnych modelowanej sieci. Do przedstawienia sieci teleinformatycznych szeroko wykorzystuje się opisane definicją 1 grafy nieskierowane. Jednak w wielu przypadkach model może pokazywać: ukierunkowanie działania sił, przepływu informacji, przemieszczania się mas, do czego lepiej jest wykorzystywać grafy skierowane. Przedstawione poniżej określenie grafu skierowanego jest rozwinięciem definicji grafu nieskierowanego. W dalszej części rozdziału rozważać będziemy grafy nieskierowane, a graf  $G$  będziemy nazywać grafem źródłowym.

### Definicja 2

*Grafem skierowanym  $G = (V_G, E_G)$  będziemy nazywać graf, którego każda krawędź  $e_G \in E_G$  jest uporządkowanym zbiorem wierzchołków.*

Podstawowym parametrem dowolnego grafu jest stopień, który możemy przypisać zarówno samej sieci, jak i dowolnemu z jej wierzchołków. Stopniem  $s_i^G$   $i$ -tego wierzchołka grafu  $G$ , będziemy nazywać liczbę krawędzi grafu, incydentnych do danego wierzchołka, stopniem  $s^G$  sieci będziemy nazywać maksymalny stopień jego wierzchołków.

## 2.2. Grafowa reprezentacja struktur niezależnych

Istnieje kilka alternatywnych sposobów zapisu grafu. Do najszerzej wykorzystywanych możemy zaliczyć zapis macierzowy oraz graficzny. *Zapis macierzowy* bazuje na przedstawieniu relacji pomiędzy wierzchołkami i krawędziami za pomocą macierzy (incydencji lub sąsiedztwa). Jest on wykorzystywany przez większość programów komputerowych, jednak okazuje się mało czytelny dla użytkownika. Do użytkowników, adresowany jest *zapis graficzny*, w którym zbiór  $V_G$  skojarzony jest z wierzchołkami grafu, a zbiór  $E_G$  z jego krawędziami. Graf  $G = (V_G, E_G)$ , oprócz zapisu tradycyjnego może zostać przedstawiony w dwóch innych postaciach: krawędziowej  $L(G)$  oraz wierzchołkowo-krawędziowej  $T(G)$ , nazywanej również grafem totalnym. Rozważmy krawędziowe  $L(G)$  przedstawienie grafu  $G$ , znajdujące szerokie wykorzystanie w badaniach żywotności OT.

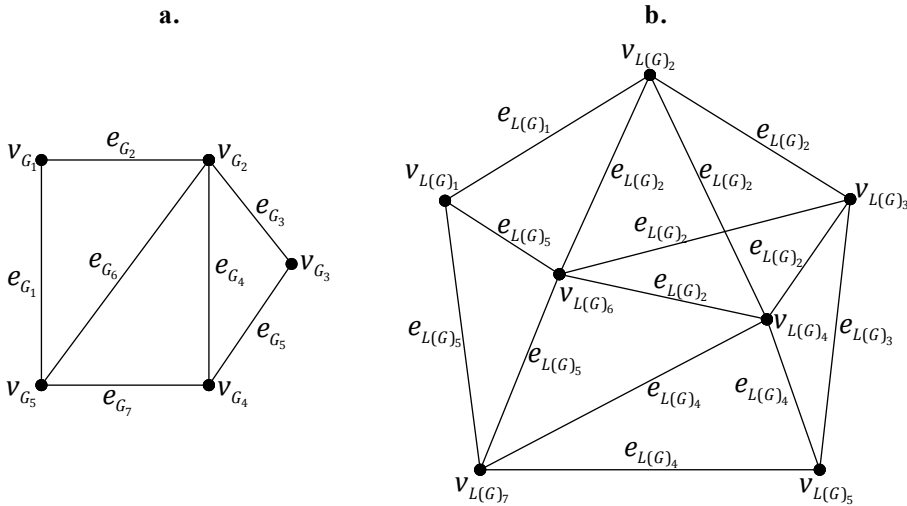
Niech  $V_{L(G)} = \{v_{L(G)_1}, v_{L(G)_2}, \dots, v_{L(G)_n}\}$  będzie zbiorem wierzchołków grafu krawędziowego  $L(G)$ , a  $E_G = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  zbiorem krawędzi grafu  $G$ . Wtedy graf krawędziowy  $L(G)$  można zdefiniować w poniższy sposób.

### Definicja 3

*Dla dowolnego grafu  $G$  graf krawędziowy  $L(G)$  to graf utworzony na podstawie  $G$ , spełniający następujące dwa warunki:*

1.  $V_{L(G)} = E_G$ ;
2. Wierzchołki  $v_{L(G)_i}$  i  $v_{L(G)_j}$  są sąsiednie w  $L(G)$  wtedy i tylko wtedy, kiedy krawędzie  $e_{G_i}$  i  $e_{G_j}$  dla dowolnego  $i, j$  są sąsiednie w grafie  $G$ .

Na rys. 1a. przedstawiono graf źródłowy  $G$ , a na rys. 1b. jego reprezentację krawędziową  $L(G)$ .



Rys. 1. Graf źródłowy (a.) i jego reprezentacja krawędziowa (b.)

Postać krawędziowa jest szeroko wykorzystywana do analizy obiektów technicznych, o których sprawności decydują komponenty węzłowe a nie liniowe. Przykładem takiego obiektu są sieci komputerowe, wykorzystujące media przewodowe, o których dostępności decydują węzły, a nie kanały komunikacyjne.

Kolejnym przydatnym sposobem graficznego przedstawienia modelu OT jest *graf wierzchołkowo-krawędziowy* (totalny)  $T(G)$ . Wyróżniamy w nim dwa typy wierzchołków: wierzchołki-wierzchołki oraz wierzchołki-krawędzie. Może on zostać zdefiniowany w poniższy sposób.

#### Definicja 4

Dla dowolnego grafu  $G$ , graf totalny  $T(G)$  to graf spełniający następujące warunki:

1.
  - a. Wierzchołki-wierzchołki grafu  $T(G)$  to wierzchołki będące również wierzchołkami w grafie  $G$ ;
  - b. Wierzchołki-krawędzie grafu  $T(G)$  to wierzchołki będące krawędziami w grafie  $G$ .
2.
  - a.  $|V_{T(G)}| = |E_G| \cup |V_G|$ ;

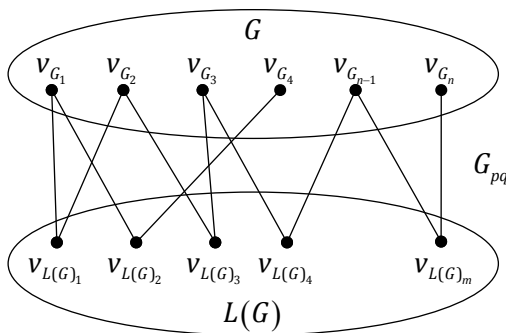
- b. Wierzchołki-krawędzie  $e_{T(G)_i}$  oraz  $e_{T(G)_j}$  są sąsiednie w  $T(G)$  wtedy i tylko wtedy, kiedy krawędzie  $e_{G_i}$  i  $e_{G_j}$  są sąsiednie w  $G$ ;
- c. Wierzchołki-wierzchołki  $v_{T(G)_i}$  oraz  $v_{T(G)_j}$  są sąsiednie w  $T(G)$  wtedy i tylko wtedy, kiedy wierzchołki  $v_{G_i}$  i  $v_{G_j}$  są sąsiednie w  $G$ ;
- d. Wierzchołki-wierzchołki  $v_{T(G)_i}$  oraz  $v_{T(G)_j}$  są sąsiadami wierzchołka-krawędzi  $e_{T(G)_j}$  w  $T(G)$  wtedy i tylko wtedy, kiedy wierzchołki  $v_{G_i}$  i  $v_{G_j}$  są przyległe do krawędzi  $e_{G_j}$  w  $G$ .

Do zrozumienia istoty grafu totalnego  $T(G)$ , przedstawimy go z wykorzystaniem grafu dwudzielnego  $G_{pq}$ , który opisuje poniższa definicja.

**Definicja 5**

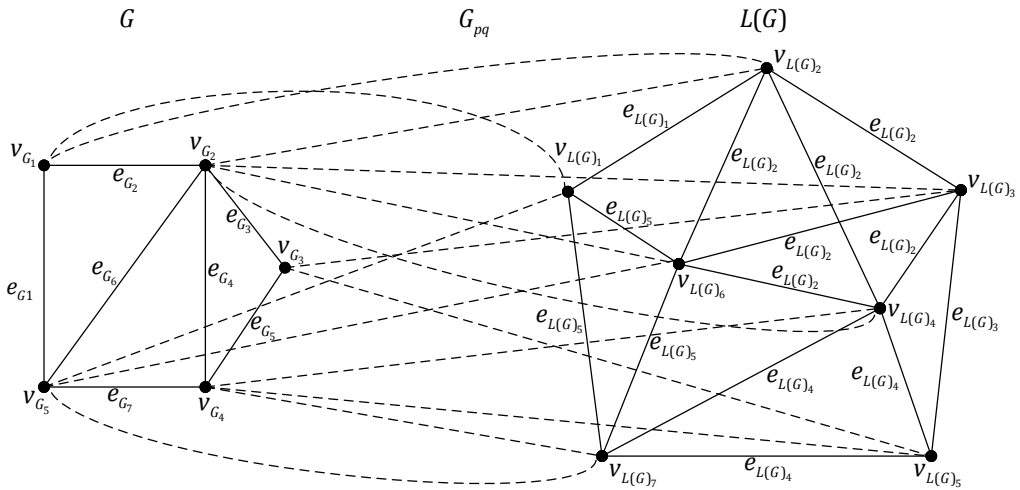
*Grafem dwudzielnym nazywamy graf, w którym istnieje podział zbioru wierzchołków na dwie klasy, a zakończenia każdej krawędzi należą do różnych klas. Jeżeli dowolne dwa wierzchołki wchodzące w różne zbiory są sąsiednie to graf taki nazywa się zupełnym grafem dwudzielnym.*

W celu zaprezentowania właściwości grafu totalnego, rozważmy graf  $G$  złożony z  $p$  wierzchołków oraz  $q$  krawędzi. Wykorzystując obie powyższe definicje można przedstawić go jako graf dwudzielny, łączący tradycyjną reprezentację grafu  $G$  z jego reprezentacją krawędziową  $L(G)$ , co pokazano schematycznie na rys. 2.  $G$  to graf źródłowy,  $L(G)$  – krawędziowy a  $G_{pq}$  – graf dwudzielny łączący oba grafy.



Rys. 2. Graf totalny jako graf dwudzielny

Graf  $G$  został przedstawiony, jako graf totalny  $T(G)$  na zamieszczonym poniżej rys. 3.



Rys. 3. Totalna reprezentacja grafu źródłowego

W celu powiązania stopni wierzchołków w tradycyjnej wierzchołkowej reprezentacji grafu  $G$  oraz zbudowanego na jego bazie grafu totalnego  $T(G)$ , wprowadzono dwa poniższe lematy.

### Lemat 1

Stopień wierzchołka-wierzchołka  $v_{T(G)_i}$  w grafie totalnym  $T(G)$  jest równy sumie stopni krawędzi  $e_{G_1}, \dots, e_{G_m}$  grafu  $G$ , przyległych do wierzchołka  $v_{G_i}$ , tj.  $\deg v_{G(T)_i} = \sum_{j=1}^k \deg e_{G_j}$ , gdzie  $e_{G_j}$  - krawędź przyległa do wierzchołka  $v_{G_i}$  w grafie  $G$ ,  $1, \dots, k$  - numery kolejnych krawędzi przyległych do wierzchołka  $v_{G_i}$  w  $G$ . Dla wierzchołka-wierzchołka  $v_{T(G)_i}$  grafu  $T(G)$  prawdziwa jest nierówność  $\deg v_{T(G)_i} \geq 2 \deg v_{G_i}$ .

**Dowód.** Prawdziwość lematu wynika bezpośrednio z definicji grafu totalnego. ■

### Lemat 2

Stopień wierzchołka-krawędzi  $e_{T(G)_i}$  w grafie totalnym  $T(G)$  jest równy sumie stopni wierzchołków  $v_{G_1}, \dots, v_{G_m}$  grafu  $G$ , przyległych do krawędzi  $e_{G_i}$ , tj.  $\deg e_{G(T)_i} = \sum_{j=1}^k \deg v_{G_j}$ , gdzie  $v_{G_j}$  - wierzchołek przyległy do krawędzi  $e_{G_i}$  w grafie  $G$ ,  $1, \dots, k$  - numery kolejnych wierzchołków przyległych do krawędzi  $e_{G_i}$  w  $G$ . Dla wierzchołka-krawędzi  $e_{T(G)_i}$  grafu  $T(G)$  prawdziwa jest nierówność  $\deg e_{T(G)_i} \geq 2 \deg e_{G_i}$ .

**Dowód.** Prawdziwość lematu wynika bezpośrednio z definicji grafu totalnego. ■

Na podstawie powyższych lematów można udowodnić poniższe twierdzenie.

### Twierdzenie 1

Jeżeli w grafie  $G$  wierzchołek  $v_{G_k}$  jest wierzchołkiem o najmniejszym stopniu to w grafie  $T(G)$ , wierzchołek-wierzchołek  $v_{T(G)_k}$  jest także wierzchołkiem o najmniejszym stopniu.

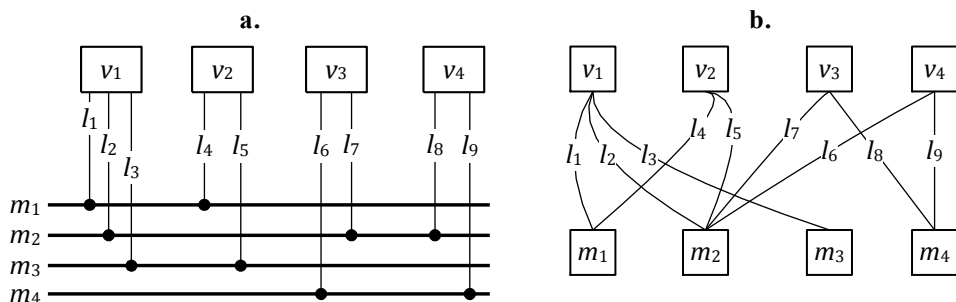
**Dowód.** Prawdziwość twierdzenia wynika bezpośrednio z obu poniższych lematów. ■

Modele obiektów technicznych wykorzystujące grafy totalne są używane do analizy dostępności sieci, w których awaryjne są ich wszystkie elementy, a także miejsca ich styku.

### 2.3. Grafowa reprezentacja struktur współdzielonych

Przykładem obiektu technicznego ze współdzielonymi elementami struktury mogą posłużyć sieci bezprzewodowe. W sieciach tych, medium transmisyjne, którym jest otaczająca przestrzeń, jest wykorzystywane przez wielu użytkowników. Graficzną reprezentację sieci bezprzewodowych można zastosować do rozwiązania większości zadań z nimi związanych, począwszy od analizy niezawodności, dostępności, odporności na uszkodzenia i żywotności, na analizie strumieni informacyjnych i ich rozplywie skończywszy. Dalej rozważać będziemy wielokanałową sieć bezprzewodową z rys. 4a., złożoną z 4 węzłów oraz 4 współdzielonych kanałów komunikacyjnych zwanych dalej magistralami.

Grafem PBL systemu magistralowego  $G$  zawierającego  $|V_G|$  węzłów,  $|E_G|$  magistral i zbiór linków  $K$  nazywamy dwudzielny graf  $G_{PBL}$ , który jest następującą parą  $(V_{G_{PBL}}, E_{G_{PBL}})$  i  $V_{G_{PBL}} = VV_{G_{PBL}} \cup VE_{G_{PBL}}$ , gdzie  $VV_{G_{PBL}} = V_G$  i  $VE_{G_{PBL}} = E_G$  oraz  $E_{G_{PBL}}$  reprezentuje połączenia w grafie  $G$  pomiędzy magistralami a węzłami. Węzły  $v_{G_{PBL}i}$  i  $v_{G_{PBL}j}$  są połączone przez krawędź  $e_{G_{PBL}m}$  wtedy i tylko wtedy, kiedy w źródłowym systemie magistralowym magistrala  $M_i$  jest połączona z węzłem  $W_j$  linkiem  $k_m$ . Graf ten został pokazany na rys. 4b.



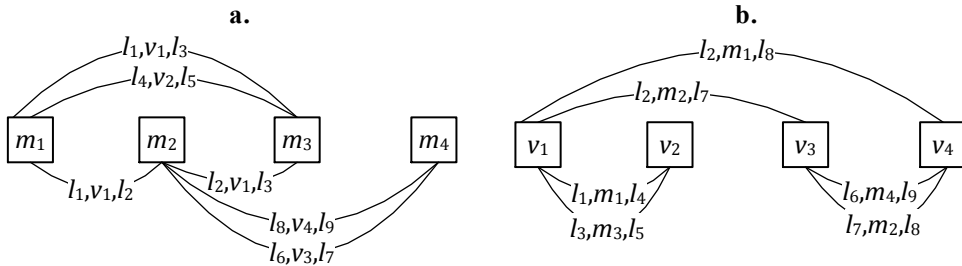
Rys. 4. Źródłowa sieć wielomagistralowa (a.) oraz jej reprezentacja PBL (b.)

Na podstawie grafu PBL można zbudować również inne formy reprezentacji współdzielonego grafu  $G$ , w szczególności postać: krawędziową, wierzchołkową, linkową, a także opisaną wcześniej wierzchołkowo-krawędziową (totalną).

Dla dowolnego grafu  $G_{PBL}$  graf krawędziowy  $L(G)$  opisywany jest za pomocą dwóch następujących warunków, będących modyfikacją poprzedniej definicji grafu krawędziowego:

1.  $V_{L(G)} = VE_{G_{PBL}}$  ;
2. Wierzchołki  $v_{L(G)_i}$  i  $v_{L(G)_j}$  są sąsiednie w  $L(G)$  wtedy i tylko wtedy, kiedy wierzchołki-wierzchołki (magistrale)  $v_{G_{PBL}i}, v_{G_{PBL}j} \in VE_{G_{PBL}}$  są sąsiednie w grafie  $G_{PBL}$ .

Graf krawędziowy, jako reprezentacja źródłowego grafu magistralowego pokazano na rys. 5a.



Rys. 5. Reprezentacje źródłowego grafu magistralowego: graf krawędziowy  $L(G)$  (a.); graf wierzchołkowy  $N(G)$  (b.)

Dla dowolnego grafu  $G_{PBL}$ , graf wierzchołkowy  $N(G)$  opisywany jest za pomocą następujących dwóch warunków:

1.  $V_{N(G)} = VV_{G_{PBL}}$  ;
2. Wierzchołki  $v_{N(G)_i}$  i  $v_{N(G)_j}$  są sąsiednie w  $N(G)$  wtedy i tylko wtedy, kiedy wierzchołki-krawędzie  $v_{G_{PBL}i}, v_{G_{PBL}j} \in VV_{G_{PBL}}$  są sąsiednie w  $G_{PBL}$ .

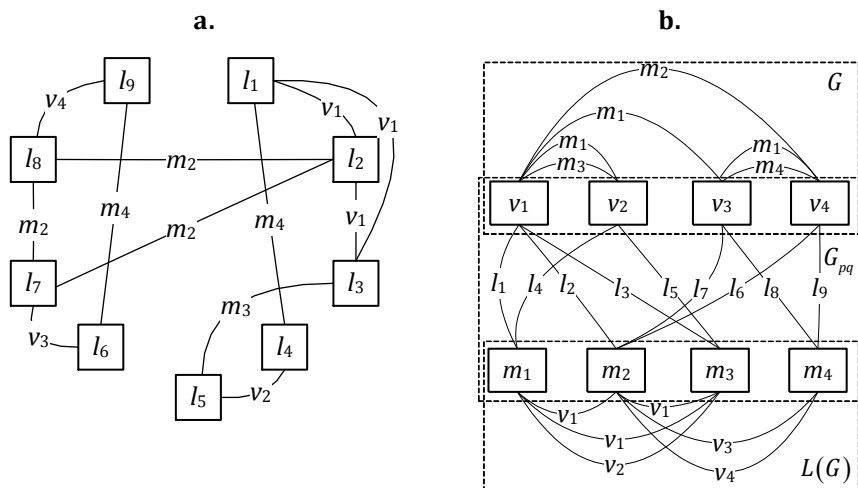
Graf krawędziowy  $N(G)$  jako reprezentację źródłowego grafu magistralowego pokazano na rys. 5b.

Dla dowolnego grafu  $G_{PBL}$ , graf linkowy  $Li(G)$  opisywany jest za pomocą dwóch następujących warunków:

1.  $V_{Li(G)} = E_{G_{PBL}}$  ;
2. Wierzchołki  $v_{Li(G)_i}$  i  $v_{Li(G)_j}$  są sąsiednie w  $Li(G)$  wtedy i tylko wtedy, kiedy krawędzie (linki)  $e_{G_{PBL}i}, v_{G_{PBL}j} \in E_{G_{PBL}}$  są sąsiednie w  $G_{PBL}$  przez wierzchołki ze zbiorów  $VE_{G_{PBL}}$  i  $VV_{G_{PBL}}$ .

Graf  $Li(G)$  linkowy jako reprezentację źródłowego grafu magistralowego  $G$  pokazano na rys. 6a.





Rys. 6. Reprezentacje magistralowego grafu źródłowego: graf linkowy  $Li(G)$  (a.); graf totalny  $T(G)$  (b.)

Graf totalny, będący alternatywną reprezentacją źródłowego grafu magistralowego pokazano na rys. 6b.

### 3. Podsumowanie i dalsze prace

Dalsze prace autorów będą skoncentrowane na następujących zagadnieniach:

1. Analizie charakterystyk obiektów technicznych, opisanych za pomocą alternatywnych sposobów ich reprezentacji;
2. Badaniu spójności grafu wierzchołkowo-krawędziowego, w oparciu o zbiory rozspajające i rozdzielające;
3. Analizie korelacji spójności grafu wierzchołkowo-krawędziowego i grafu źródłowego;
4. Badaniu relacji pomiędzy spójnością grafu a właściwościami obiektu technicznego;
5. Opracowaniu metod efektywnego zapisu w pamięci komputera każdej z zaproponowanych reprezentacji grafu;
6. Poszerzeniu praktycznego wykorzystania opisanych w rozdziale badań.

Planuje się również przygotowanie interaktywnej aplikacji komputerowej analizującej różne reprezentacje grafów o dużym rozmiarze.

### Bibliografia

- [1] A. M. Gunn, Encyclopedia of Disasters: Environmental catastrophes and human tragedies, Westport: GREENWOOD PRESS, 2008.

- 
- [2] J. F. Lancaster, *Engineering Catastrophes Causes and Effects of Major Accidents*, III ed., Boca Raton: CRC Press, 2005.
  - [3] J.-L. Briaud, *Introduction to geotechnical engineering: unsaturated and saturated soils*, Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2013.
  - [4] P. Grossi and H. Kunreuther, *Catastrophe Modeling: A New Approach to Managing Risk*, New York: Springer, 2005.
  - [5] R. W. Day, *Geotechnical Earthquake Engineering Handbook*, II ed., New York: McGraw Hill, 2012.
  - [6] B. Bollobas, *Modern Graph Theory*, New York: Springer, 1998.
  - [7] K. A. Ross i C. R. Wright, *Matematyka dyskretna*, Warszawa: PWN, 2011.
  - [8] R. Diestel, *Graph Theory*, 4 red., New York: Springer, 2010.
  - [9] R. J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, Warszawa: PWN, 2008.
  - [10] S. Dasgupta, C. Papadimitriou i U. Vazirani, *Algorytmy*, Warszawa: PWN, 2010.
  - [11] L. N. Medford-Davis i B. G. Kapur, „Preparing for effective communications during disasters lessons from a World Health Organization quality improvement project,” *International Journal of Emergency Medicine*, nr 7:15, pp. 1-7, 2014.
  - [12] N. Ghafoori, Ed., *Challenges, Opportunities and Solutions in Structural Engineering and Construction*, Leiden: CRC Press, 2010.