

## ROZDZIAŁ 17

### Jedno- i wielokryterialne minimalne ścieżki w obiektach technicznych

Mirosław HAJDER\*, Mariusz NYCZ\*, Janusz KOLBUSZ\*

\*Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania z siedzibą w Rzeszowie

♦Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza,

Miroslaw.Hajder@gmail.com, MNycz@prz.edu.pl, JKolbusz@wsiz.rzeszow.pl

#### Streszczenie

*W rozdziale opisano badania dotyczące metod efektywnego poszukiwania najkrótszych ścieżek w grafie-modelu obiektu technicznego. Na wstępie wprowadzono formalne definicje analizowanych obiektów oraz zdefiniowano kryteria oceny przydatności konkretnej metody do konkretnych zastosowań. Dalej, dokonano szczegółowej analizy większości znanych metod, wskazując jednocześnie obszary ich efektywnego wykorzystania. Następnie, wskazano na celowość wielokryterialnego wyszukiwania minimalnych ścieżek w odniesieniu do obiektów technicznych oraz przedstawiono opracowane metody ich budowy.*

#### 1. Wstęp

Jednymi z najważniejszych i najszerzej wykorzystywanych pojęć teorii grafów jest ścieżka. Znajdowanie minimalnej ścieżki było, obok budowy minimalnego drzewa rozpinającego, jednym z najwcześniej rozwiązanych zadań teorii grafów. Choć poszukiwanie minimalnej ścieżki kojarzy się zazwyczaj z analizą lub syntezą różnorodnych sieci transportowych, zakres jego praktycznego wykorzystania jest znacznie szerszy. Minimalne ścieżki można zastosować w procesie planowania działań ratunkowych, podejmowanych po wystąpieniu zjawisk o charakterze katastroficznym, organizacji produkcji, optymalizacji zatrudnienia itp. Oparta na nich formalizacja procesu decyzyjnego gwarantuje lepsze wykorzystanie posiadanego potencjału ludzkiego i sprzętowego. Wyszukiwanie minimalnych ścieżek można zastosować także do określania wskaźników żywotności obiektów technicznych (OT), logistyce, optymalizacji algorytmów i in.

---

Badania w ramach projektu: „Neuronowe i immunologiczne wspomaganie analizy i syntezy modeli obiektów technicznych na bazie struktur wykorzystujących grafy rzadkie w warunkach niekompletności informacji”.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej z Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu Państwa w ramach Regionalnego Programu Operacyjnego Województwa Podkarpackiego na lata 2007 – 2013. Inwestujemy w rozwój województwa podkarpackiego.

Pomimo szerokiego asortymentu algorytmów rozwiązujących zadania wyszukiwania minimalnej ścieżki, brakuje dogłębnej analizy określającej obszar efektywnego wykorzystania każdego z nich, szczególnie w przypadku modelowania złożonych OT. Ponadto, znane algorytmy dokonują wyszukiwania jednokryterialnego, podczas gdy w analizie OT o jej wyborze decyduje wiele różnych charakterystyk. Dlatego, w ramach prowadzonych badań, opracowano i przetestowano nowe algorytmy wielokryterialne, przeznaczone do zastosowania w analizie złożonych obiektów technicznych.

## 2. Jednokryterialne wyszukiwanie najkrótszej ścieżki w grafie-modelu

### 2.1. Podstawowe definicje i charakterystyki grafu-modelu

W niniejszym rozdziale, rozważane będą pojęcia drogi, ścieżki, cyklu oraz odległości w grafie. Poniżej przedstawiono ich definicje, wywodzące się bezpośrednio z teorii grafów [1], [2], [3], [4].

#### Definicja 1

*Droga w grafie to skończony ciąg występujących na przemian wierzchołków i krawędzi postaci  $a = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n = b$  taki, że  $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Wierzchołki  $a$  oraz  $b$  nazywamy końcami drogi.*

#### Definicja 2

*Ścieżką nazywamy drogę, której wszystkie krawędzie są różne, liczba krawędzi nazywana jest długością ścieżki. Jeżeli wszystkie wierzchołki ścieżki są różne to ścieżka nazywana jest ścieżką elementarną, w przeciwnym przypadku złożoną.*

#### Definicja 3

*Cyklem nazywamy ścieżkę, której pierwszy i ostatni wierzchołek są identyczne. Jeżeli wszystkie wierzchołki cyklu, oprócz końcowych są różne to cykl nazywany jest cyklem elementarnym, w przeciwnym przypadku mówimy, że jest to cykl złożony.*

#### Definicja 4

*Odległość  $d_{v,u}$  pomiędzy wierzchołkami  $v$  oraz  $u$  to długość najkrótszej ścieżki pomiędzy wierzchołkami  $v$  oraz  $u$ .*

Do poszukiwania najkrótszych ścieżek w grafie opracowano i zweryfikowano wiele algorytmów, różniących się zarówno przeznaczeniem, a także złożonością czasową i pamięciową. Do najszerzej wykorzystywanych można zaliczyć algorytmy: Dijkstry, Dijkstry-Gribova, Levita, Forda-Bellmana, Jena, Floyda-Warshalla oraz Johnsona [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]. Analizę ich złożoności czasowej oraz przydatności do rozwiązywania zadań z obszaru badania rozbudowanych OT przedstawiono w §2.2.

Jeżeli analizowanym obiektem będzie złożona sieć teleinformatyczna, na wybór konkretnego algorytmu wpływa nie tylko kryterium doboru krawędzi ścieżki, ale również struktura grafu-modelu opisującego sieć. Przyjmijmy, że jego wierzchołki odpowiadają będą jej węzłom, a krawędzie – kanałom komunikacyjnym. Aby ukierunkować procedurę doboru algorytmu, poniżej przedstawiono cechy szczególne grafu opisującego sieć teleinformatyczną. W szczególności, należy zauważyć że:

1. Graf zawierający węzły końcowe (komputery użytkowników) posiada znaczną liczbę wierzchołków połączonych rzadką siecią kanałów komunikacyjnych. Jeżeli  $n$  to liczba wierzchołków grafu, a  $m$  ilość jego krawędzi to ma miejsce zależność:  $m \ll n(n - 1)/2$ . Oznacza to, że liczba krawędzi grafu jest wielokrotnie mniejsza od ich ilości w grafie zupełnym. Jeżeli jednak analizowany model nie zawiera jednostek użytkownika, graf ma niewielkie rozmiary, a jego sieć połączeń jest umiarkowanie gęsta;
2. Jeżeli analizowany graf opisuje strukturę fizyczną sieci to jego dolne poziomy (sieci dostępne) są drzewami, a rdzeń jest umiarkowanie gęsty;
3. Ponieważ łączność w analizowanych systemach jest dwukierunkowa, a każdy z kanałów komunikacyjnych posiada ściśle określone, najczęściej symetryczne parametry to sieć ta może być przedstawiona za pomocą grafu nieskierowanego z wielokrotnymi wagami. Jeżeli kanały są asymetryczne to do opisu sieci należy zastosować podobne grafy skierowane;
4. Jeżeli przewiduje się długotrwałe przeciążenie kanałów, graf może posiadać krawędzie o ujemnych wagach. W przeciwnym przypadku, krawędzie takie nie powinny być stosowane;
5. W modelu sieci bezprzewodowych dla połączenia węzła końcowego ze stacją bazową, żadna z wykorzystywanych do tego celu krawędzi nie powinna być narzucona odgórnie. Dla połączeń w rdzeniu sieci, w celu zapewnienia efektywnego wykorzystania istniejącej infrastruktury, niewielka część spośród krawędzi może być określona obligatoryjnie;
6. Jeżeli do dowolnego poziomu rzeczywistej sieci, pomijając najniższy, dodany zostanie kanał komunikacyjny, to dodanie do grafu-modelu odpowiadającej mu krawędzi, wymaga ponownego określenia parametrów pozostałych krawędzi grafu. Włączenie do sieci dodatkowego węzła, zawsze implikuje dodanie do niej kanału komunikacyjnego (patrz pkt. 7);
7. Graf-model musi być spójny. Dlatego, jeżeli wykorzystywane kanały nie łączą wszystkich węzłów sieci, grafu-model może nie zawierać odpowiadających im wierzchołków;
8. W trakcie funkcjonowania sieci, określone wcześniej minimalne ścieżki mogą być modyfikowane. Dlatego, oprócz zestawu minimalnych ścieżek łączących dowolną parę wierzchołków, projektantowi niezbędna jest znajomość architektury samej sieci i zachodzących w niej zmian;
9. Ponieważ tworzone ścieżki mają różne przeznaczenie, waga krawędzi grafu powinna być opisana za pomocą kilku wybranych parametrów, opisujących ją z punktu widzenia konkretnego zadania projektowego.

Podobne, aczkolwiek nieidentyczne cechy można przypisać dowolnemu obiektowi złożonemu z części węzłowej i liniowej. Wykorzystując powyższe ustalenia, dokonamy analizy krytycznej znanych algorytmów poszukiwania najkrótszych ścieżek.

## 2.2. Algorytmy poszukiwania najkrótszych ścieżek

Po wstępnej analizie uwzględniającej wymagania przedstawione w §2.1, jako podstawę do dalszych rozważań wytypowano zaprezentowane niżej algorytmy. Ich dokładny opis można znaleźć w literaturze [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8].

*Algorytm Dijkstry* określa najkrótsze ścieżki łączące wybrany wierzchołek ze wszystkimi wierzchołkami grafu. Funkcjonuje on poprawnie wyłącznie dla grafów, w których nie występują krawędzie z ujemną wagą. W trakcie funkcjonowania wykorzystuje on trzy zbiory:  $M_0$  – zawierający wierzchołki, do których odległość została już wyznaczona lub znajduje się na etapie określenia;  $M_1$  z wierzchołkami, do których odległość jest właśnie wyznaczana oraz  $M_2$  grupujący wierzchołki, odległość do których nie została jeszcze wyliczona. W najprostszym przypadku, złożoność algorytmu dla grafu  $G$  wynosi  $O(n^2 + m)$ . Efektywność metody zależy od sposobu wyszukiwania w zbiorze  $M_1$  wierzchołka z minimalną, bieżącą odległością do węzła źródłowego [1], [2], [9], [3].

Zaproponowana przez *Gribova* modyfikacja algorytmu, polega na rozbiciu zbioru wierzchołków na podzbiory zawierające bliskie sobie elementy. Najkrótsze ścieżki łączące je z zadaniem węzłem, różnią się o odległość mniejszą niż długość minimalnego łuku grafu wykorzystywanego w danym kroku algorytmu. W każdej kolejnej iteracji algorytm wykorzystuje niepusty podzbiór, odpowiadający minimalnej wartości odległości [4], [9].

*Algorytm Levita* poszukuje zbioru najkrótszych ścieżek łączących zadany wierzchołek ze wszystkimi pozostałymi węzłami grafu. Swoim funkcjonowaniem przypomina on algorytm Dijkstry, podobnie jak on wykorzystuje trzy zbiory  $M_0, M_1, M_2$ . Wierzchołki tworzące zbiór  $M_1$  dzielone są pomiędzy dwoma kolejkami: podstawową i priorytetową. Każdemu z wierzchołków, przypisywana jest nieujemna długość najkrótszej ścieżki, określanej spośród znanych na chwilę obecną, a prowadzących z wierzchołka źródłowego do danego. Niestety, w algorytmie tym wybrane węzły przetwarzane są wielokrotnie, co zwiększa jego złożoność czasową. Z drugiej jednak strony, sposoby włączania i wyłączania wierzchołków do lub ze zbioru  $M_1$  są prostsze, co skutkuje obniżeniem tejże złożoności. Przeprowadzone badania pokazały, że dla sieci z nieregularną strukturą i realnymi odległościami pomiędzy węzłami, algorytm Levita zapewnia największą szybkość spośród wszystkich znanych algorytmów. Minimalna jest również jego złożoność pamięciowa. Ponadto, w odróżnieniu od algorytmu Dijkstry zapewnia on obsługę krawędzi z ujemnymi wagami. Złożoność czasową algorytmu szacuje wyrażenie  $O(nm)$  [8], [10], [11], [4].

Kolejny algorytm – *Bellmana-Forda* – rozwiązuje zadanie znajdowania najkrótszych ścieżek łączących wskazany węzeł z wszystkimi pozostałymi wierzchołkami grafu, dopuszczając przy tym ujemne wagi jego łuków. Podobnie jak w algorytmie Dijkstry, opiera się on na sekwencyjnej relaksacji krawędzi, prowadzonej aż do momentu określenia najkrótszej ścieżki. Algorytm sprawdza dodatkowo istnienie cykli z ujemną wagą, osiągalnych z danego wierzchołka. Jeżeli w badanym grafie cykle takie nie istnieją, algorytm znajduje najkrótsze ścieżki pomiędzy zadaniem węzłem a wszystkimi pozostałymi wierzchołkami grafu. W przeciwnym przypadku, przynajmniej dla ograniczonej grupy wierzchołków, ścieżki takie nie istnieją. Złożoność czasowa całego algorytmu wynosi  $O(nm)$ , w tym złożoność inicjalizacji jest szacowana jako  $O(n)$ , a sprawdzenia istnienia cyklu z ujemną wagą  $O(m)$  [1], [9], [12], [11].

*Algorytm Jena* przeznaczony jest do wyszukiwania w grafie z nieujemnymi wagami zbioru  $k$  ścieżek z minimalną sumaryczną długością, łączących wskazaną parę węzłów. Charakteryzuje go złożoność czasowa rzędu  $O(n^2)$ . Zakłada on, że znana jest metoda znajdowania w grafie najkrótszej ścieżki pomiędzy daną parą wierzchołków. Przez cały czas funkcjonowania algorytmu, budowana jest lista pretendentów tworzących najkrótsze ścieżki. Algorytm rozpoczyna działanie od znalezienia pierwszej najkrótszej ścieżki. Ponieważ wszystkie kolejne nie powinny pokrywać się z pierwszą, muszą się one różnić od niej przynajmniej jedną krawędzią. Dlatego, z grafu  $G$  kolejno usuwa się po jednej krawędzi wchodzącej w skład otrzymanej wcześniej ścieżki. Dla uzyskanych w ten sposób grafów ponownie poszukiwana jest najkrótsze z nich. Otrzymane ścieżki oznaczane są za pomocą usuniętej krawędzi i zostają umieszczone na liście pretendentów. Po zakończeniu powyższej procedury, z listy pretendentów wybierana jest najkrótsza ścieżka. Następna w kolejności najkrótsza ścieżka jest określana analogicznie. W rezultacie, do listy pretendentów dopisujemy  $k$  nowych ścieżek, zazwyczaj  $k \ll N$ . W celu usprawnienia funkcjonowania algorytmu, poszukiwanie ścieżki po usunięciu jednej z krawędzi prowadzone jest jednocześnie z jej obu końców, przy czym używa się do tego drzew rozpinających, otrzymanych dla grafu źródłowego [9], [13], [14], [15].

*Algorytm Johnsona* przeznaczony jest do określania najkrótszych ścieżek pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami grafu skierowanego i został oparty na idei zmiany wag jego krawędzi. Przyjmijmy, że dla krawędzi grafu  $G$  można zaproponować funkcję zmieniającą ich wagi, zapewniającą ich nieujemność i pozostawiającą niezmiennymi utworzone wcześniej najkrótsze ścieżki (tj. składają się one z tych samych krawędzi). Wtedy, zadanie poszukiwania najkrótszych ścieżek pomiędzy wszystkimi parami węzłów w grafie zawierającym krawędzie z ujemnymi wagami, w którym jednak nie istnieją ujemne cykle, można rozwiązać za pomocą algorytmu Dijkstry, wykorzystywanego niezależnie dla każdego z wierzchołków. Jeżeli do tego celu zastosujemy kopce Fibonacciego, rozwiązanie zadania charakteryzuje złożoność czasowa rzędu  $O(n^2 \log(n) + nm)$ . W algorytmie tym można wydzielić dwa elementarne działania: dodawanie wierzchołków oraz

zmiana wag krawędzi. Pierwsze z nich, dodając fikcyjny wierzchołek, jednocześnie łączy go krawędziami o zerowej wadze ze wszystkimi pozostałymi wierzchołkami grafu. Następnie, za pomocą algorytmu Bellmana-Forda, dla każdego wężła  $i$  określa się wartość funkcji  $P(i)$ , będącej długością najkrótszej ścieżki łączącej fikcyjny wierzchołek z dowolnym innym wierzchołkiem. Jako funkcję zmiany wag krawędzi najczęściej wykorzystuje się ruch w kanałach tworzonych przez krawędzie grafu [4], [16], [17], [18].

*Algorytm Floyd-Warshalla* zaliczamy do grupy dynamicznych algorytmów poszukiwania najkrótszych ścieżek pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków grafu skierowanego. Istotną zaletą algorytmu jest prostota realizacji w postaci programu komputerowego, bez względu na wykorzystywany język. Złożoność czasowa algorytmu ma postać  $O(n^3)$ . Chociaż algorytm ten efektywnie buduje ścieżki pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków to nie zachowuje on informacji o najkrótszych spośród nich [9], [15], [19], [20].

Przejdźmy obecnie do analizy przydatności wyszczególnionych wyżej algorytmów. Z dalszych rozważań, bezsprzecznie można wyłączyć algorytm Jena, który przeznaczony jest do poszukiwania ścieżek o długości równej najkrótszej z nich. W rozwiązywanym zadaniu nie mamy gwarancji, że istnieje więcej niż jedna ścieżka o minimalnej długości. Algorytm Johnsona jest efektywny wyłącznie dla grafów rzadkich. Ponieważ w dalszych rozważaniach zakładamy, że wykorzystywać będziemy zarówno grafy rzadkie jak i umiarkowanie gęste, jego przydatność jest ograniczona. Charakterystyki algorytmu Dijkstry są w znacznym stopniu zależne od sposobu wyszukiwania węzłów, które dzieli minimalna bieżąca odległość. Efektywności uważanych za optymalne algorytmów Dijkstry-Gribova oraz Levita są porównywalne. Dla zadań o charakterze geograficznym, drugi z algorytmów charakteryzują lepsze parametry. W przypadku poszukiwania ścieżek wyrównujących obciążenia, lepszymi właściwościami charakteryzuje się pierwszy z algorytmów. W odróżnieniu od metody Dijkstry w algorytmie Levita, niektóre spośród wierzchołków przetwarzane są wielokrotnie, jednak do zarządzania zbiorem wierzchołków  $V$  (dodawania i usuwania elementów) wykorzystywane są prostsze metody.

Badania pokazały, że dla tzw. grafów geograficznych, odzwierciedlających strukturę sieci transportowych z rzeczywistymi odległościami, algorytm Levita okazuje się najszybszy. W rozważanym zadaniu, graf źródłowy nie jest jednak tworzony bezpośrednio w oparciu o sieć komunikacyjną, krawędzie z ujemnymi wagami nie występują, a ich waga określana jest nie tylko na podstawie odległości pomiędzy wierzchołkami. Dlatego, algorytm ten, w stosunku do algorytmu Dijkstry nie posiada żadnych istotnych zalet. Niejednoznaczności oceny pojawiają się również przy wykorzystaniu algorytmu Dijkstry-Gribova. W rozwiązywanym zadaniu wagi krawędzi mogą być znaczne, a różnice w wagach niewielkie. W rezultacie, do jednej grupy trafia wiele, a nawet wszystkie wierzchołki, na skutek czego podział węzłów może okazać się nieefektywny.

Powyższa analiza pokazuje, że przy budowie minimalnych ścieżek grafowego modelu OT należy oprzeć się na algorytmie Dijkstry, w szczególności na jego modyfikacjach zmniejszających złożoność obliczeniową.

### 3. Wielokryterialne poszukiwanie ścieżek komunikacyjnych

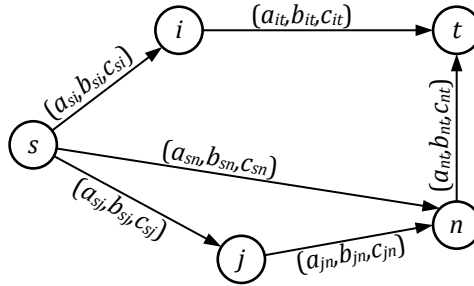
W niniejszym paragrafie, w charakterze obiektu technicznego, nadal będziemy wykorzystywać sieć teleinformatyczną, złożoną z węzłów wyposażonych w urządzenia sieciowe z własną mocą obliczeniową oraz pasywne kanały komunikacyjne. W ogólnym przypadku, zadanie poszukiwania optymalnej ścieżki w takim OT to poszukiwanie sekwencji kanałów i węzłów tworzących trasę najlepszą względem pewnego wskazanego kryterium bądź ich zestawu. Wymaga ono rozwiązania dwóch powiązanych ze sobą podzadań:

1. Określenia zbioru kryteriów doboru trasy;
2. Wyboru metody jej budowy.

Dobór elementów minimalnych ścieżek może być jedno- lub wielokryterialny. Z uwagi na konieczność minimalizacji opóźnień w budowie ścieżki oraz ograniczoną moc obliczeniową urządzeń sieciowych, najczęściej wykorzystuje się prostszą obliczeniowo metodę jednokryterialną. W tej klasie algorytmów zakłada się, że jeden z parametrów ścieżki to kryterium wyszukiwania rozwiązania, pozostałe zaś są ograniczeniami. W tradycyjnych sieciach z niezmienną topologią, kryterium tym jest zazwyczaj opóźnienie transmisji pakietów, które utożsamia się z długością ścieżki komunikacyjnej. Dla innych OT, mogą to być przemieszczane w systemie masy, objętości, energie itp. W takich przypadkach, budowa najkrótszej ścieżki może okazać się kłopotliwym w rozwiązaniu problemem NP-zupełnym.

Dla wielokomórkowych sieci bezprzewodowych, poszukiwanie najkrótszej ścieżki jest znacznie bardziej złożone. Po pierwsze, rozmiary sieci zmieniają się w dużo większym zakresie, niż miało to miejsce dla stacjonarnych sieci przewodowych. Po drugie, budowane są różne typy ścieżek, w szczególności specyficzne w wykorzystaniu ścieżki przemieszczania obciążeń. W rezultacie, liczba wykorzystywanych niezależnych kryteriów i ograniczeń znacznie rośnie. Po trzecie, jednokryterialna synteza ścieżki nie zawsze pozwala uzyskać satysfakcjonujące rozwiązanie. Dlatego, dla każdego z kryteriów lub ich zestawu, należy zagwarantować istnienie efektywnego, skalowalnego algorytmu wyszukiwania ścieżki, którego złożoność powinna rosnać wolniej niż rozmiary sieci. Zastosowane kryteria, muszą uwzględniać podstawowe charakterystyki komunikacyjne sieci, a wymagania dotyczące granicznych poziomów jakości obsługi być skorelowane z ograniczeniami wartości parametrów kanałów. Z drugiej strony, kryteria wykorzystywane przy projektowaniu ścieżek powinny uwypuklać te spośród parametrów, które stanowią przedmiot zainteresowania użytkownika i zależą od samej sieci.

Rozważmy przedstawiony na rys. 1 grafowy model OT, w którym oprócz topologii połączeń, określono charakterystyki kanałów komunikacyjnych.



Rys. 1. Grafowy model obiektu technicznego

Terminem *stan kanału połączeniowego* będziemy określać zestaw charakterystyk określających jego właściwości. Na rys. 1 określamy nim trójkę zmiennych  $(a, b, c)$ , opisujących, na przykład, przepustowość  $a$ , opóźnienie  $b$  oraz stopę błędów  $c$ . Informacja o parametrach kanałów, może być przechowywana w każdym węzle końcowym, może być również zlokalizowana w specjalnej stacji zarządzającej, dostępnej wszystkim sprzętowym komponentom sieci. Pojęciem *trasa dopuszczalna*, określać będziemy ścieżkę spełniającą wszystkie wymagania jakościowe dotyczące obsługi komunikacyjnej.

W odróżnieniu od rozpatrywanych dotąd, model z rys. 1 to skierowany graf ważony  $G = (V, E)$ , gdzie:  $V$ - zbiór jego wierzchołków odpowiadających węzłom sieci,  $|V| = m$ ;  $E$ - zbiór łuków odpowiadających kanałom połączeniowym,  $|E| = m$ . *Symetrycznym* nazywać będziemy kanał złożony z dwóch łuków o przeciwnym kierunku i identycznych parametrach komunikacyjnych. W szczególnym przypadku, kiedy wszystkie kanały są symetryczne, do projektowania możemy zastosować prostsze algorytmicznie i obliczeniowo ważne grafy nieskierowane.

Nie ulega wątpliwości, że zastosowanie metody wielokryterialnej prowadzi do uzyskania sieci o lepszych parametrach komunikacyjnych. Nie oznacza to jednak rezygnacji z metody jednokryterialnej. Jeżeli liczba kanałów wchodzących w skład ścieżki jest znaczna, a sama sieć złożona, zastosowanie wyszukiwania wielokryterialnego, w którym parametry każdej ze ścieżek będą występować jawnie, z obliczeniowego punktu widzenia jest bardzo trudne. Celem prowadzonych badań jest opracowanie szybkich i skutecznych metod walki z zagrożeniami technicznym. Wyszukiwanie wielokryterialne może być procesem długotrwałym, przez co jego przydatność do rozwiązywania stojących zadań jest ograniczona do obszaru zagrożeń wolnozmiennych. Z drugiej jednak strony, wykorzystanie wyłącznie jednego kryterium może okazać się niesatysfakcjonujące. Po pierwsze, do utworzenia akceptowalnej ścieżki, konieczne może być uwzględnienie nie jednego, a kilku parametrów kanału lub trasy komunikacyjnej. Po drugie, procedura projektowania może wymagać uwzględnienia charakterystyk kilku kanałów tworzących ścieżkę. Dlatego, pojedyncze kryterium  $W$  oceny ścieżki, powinno być utworzone na bazie kryteriów cząstkowych  $w_1, \dots, w_l$ , opisujących poszczególne parametry kanału lub ich zbioru.



Dla ilustracji metody wielokryterialnej, wykorzystamy przykład z rys. 1. Sposoby przełożenia ocen cząstkowych na ocenę końcową dzielimy na trzy typy: addytywne, multiplikatywne oraz wklęsłe. Dalej, rozważać będziemy ścieżkę postaci  $P = i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow \dots \rightarrow s \rightarrow t$ , której kryteria oceny kanałów oznaczymy odpowiednio:  $w(i, j), w(j, k), \dots, w(s, t)$ . Ocena końcowa  $W(P)$  ścieżki będzie addytywna jeżeli:

$$W(P) = w(i, j) + w(j, k) + \dots + w(s, t), \quad (1)$$

multiplikatywna w przypadku, kiedy:

$$W(P) = w(i, j) \cdot w(j, k) \cdot \dots \cdot w(s, t), \quad (2)$$

a wklęsła, jeśli:

$$W(P) = \min(w(i, j), w(j, k), \dots, w(s, t)). \quad (3)$$

Parametr  $w(i, j)$  opisujący charakterystyki  $(i, j)$ -ego kanału komunikacyjnego może być jedną z wielkości wyszczególnionych w opisie rys. 1. Może być on również addytywnym, multiplikatywnym lub wklęsłym zwnięciem kilku wielkości.

Ponieważ poszukiwanie minimalnych ścieżek jest zadaniem najczęściej rozwiązywanym w ramach opisywanych badań, opracowano metodę poszukiwania w grafie-modelu OT rozwiązań suboptymalnych, dla obiektów złożonych z homogenicznych regionów, na przykład, wielokomórkowych sieci bezprzewodowych. Rozważmy definicję zadania wielokryterialnego poszukiwania ścieżki w grafie skierowanym  $G = (V, E)$ , będącym modelem hierarchicznego OT. Przyjmijmy, że  $R^+$ , to zbiór dodatnich liczb rzeczywistych, a  $I$  jest zbiorem dodatnich liczb całkowitych. Dalej, analizować będziemy ścieżkę, której wierzchołek  $s$  będzie źródłem, a  $t$  przeznaczeniem. Trasę opisywać będą dwie funkcje kosztów:  $w_1: E \rightarrow R^+$  oraz  $w_2: E \rightarrow R^+$ , których znaczenie zostało ograniczone odpowiednio stałymi:  $B \in R^+$  dla  $w_1$  oraz  $D \in R^+$  dla  $w_2$ . Zadanie  $WKPS(G, s, t, w_1, w_2, B, D)$  wielokryterialnego poszukiwania ścieżki w grafie  $G$ , polega na określeniu możliwej do zrealizowania trasy  $P$ , łączącej wierzchołek  $s$  z  $t$ , spełniającej warunki  $w_1(P) \geq B$  oraz  $w_2(P) \leq D$ . Jeżeli taka trasa nie istnieje, zadanie  $WKPS$  nie posiada rozwiązania.

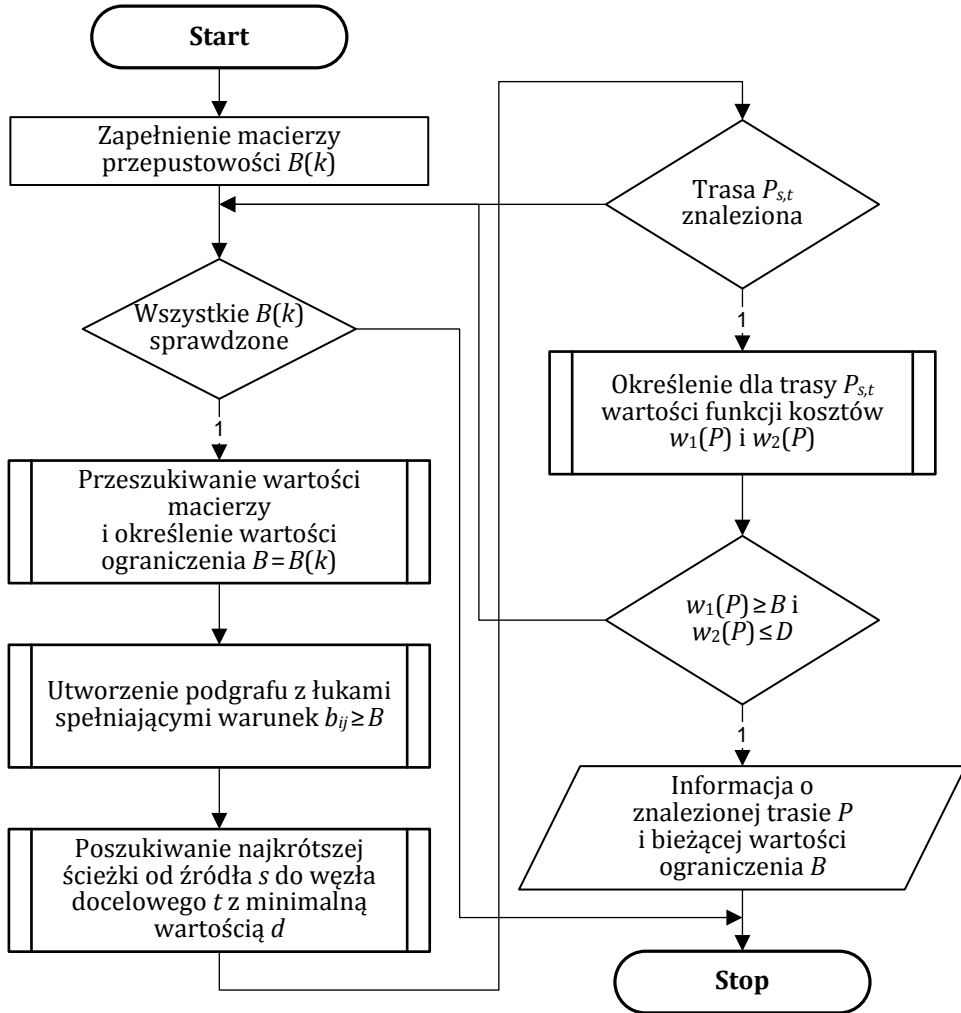
Przeanalizujmy ścieżkę  $P = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$ , dla której funkcje  $w_1(P)$  oraz  $w_2(P)$  określane są odpowiednio:

$$w_1(P) = \min(w_1(v_{i-1}, v_i)), \text{ dla } i = 0, \dots, i, \quad (4)$$

$$w_2(P) = \sum_{i=1}^k w_2(v_{i-1}, v_i). \quad (5)$$

Pierwsze z kryteriów jest wypukłe, drugie zaś addytywne. Kryteria  $w_1(P)$  oraz  $w_2(P)$  mogą odpowiednio opisywać przepustowość ścieżki  $P$ , ograniczoną wartością  $B$  oraz jej opóźnienie komunikacyjne ograniczone znaczeniem  $D$ . Trasę  $P$  spełniającą ograniczenia  $w_1(P) \geq B$  oraz  $w_2(P) \leq D$  nazywamy rozwiązaniem zadania  $WKSP(G, s, t, w_1, w_2, B, D)$ .

Procedura projektowania ścieżki została schematycznie przedstawiona na schemacie blokowym z rys. 2. Podobnie jak wcześniej, przyjęto że kryterium  $w_1$  będzie odzwierciedlać przepustowość, zaś  $w_2$  opóźnienie. Jej danymi wejściowymi są: zbiór  $V$  wierzchołków grafu-modelu  $G$ ; zbiór  $E$  jego krawędzi; wierzchołek źródłowy  $s$ ; wierzchołek docelowy  $t$ , stałe  $D$  i  $B$  występujące w roli ograniczeń projektowania oraz przepustowości dostępnych kanałów komunikacyjnych.



Rys. 2. Rozwiązanie zadania wielokryterialnego poszukiwania ścieżki

Procedura składa się z trzech podstawowych komponentów, realizujących określoną zamkniętą funkcję. Pierwszy z nich, wykorzystując wypukłość ograniczenia na przepustowość ścieżki, buduje podgraf  $H$  grafu  $G$ , zawierający wyłącznie krawędzie posiadające minimalną, wymaganą przepustowość. Dzięki temu, z procedury są eliminowane krawędzie niespełniające warunku przepustowości, anali-

zowana jest mniejsza ilość wariantów rozwiązania i poszukiwana ścieżka otrzymywana jest w krótszym czasie. W tym celu, dla grafu  $G$  określana jest dwuwymiarowa macierz  $B_{m \times 2} = (b_i, u_i)$ , gdzie:  $b_i$  – przepustowość  $i$ -tego kanału komunikacyjnego,  $i = 1, \dots, m$ ;  $m = |E|$ ,  $u_i$  – współczynnik określany w dalszej części procedury,  $u_i = \{0, 1\}$ . Następnie, iteracyjnie sprawdza możliwość budowy ścieżki: jeżeli chociażby jedna z krawędzi grafu  $G$  posiada przepustowość większą od zadanego ograniczenia, procedura budowy ścieżki jest kontynuowana. W przeciwnym przypadku jest ona przerywana i podawana jest informacja, że ścieżka o zadanych parametrach nie może być utworzona. Dalej, w macierzy  $B(k, u)$  wyszukuje się krawędzie spełniające ograniczenie przepustowości ścieżki, opisując je wartością  $u_i = 1$ , dla pozostałych  $u_i = 0$ . W oparciu o zawartość  $B(k, u)$  buduje się podgraf  $H$  grafu  $G$ , utworzony wyłącznie przez krawędzie spełniające wymagania przepustowości ścieżki.

Drugi etap procedury to budowa ścieżki o minimalnym koszcie pomiędzy źródłem  $s$  a przeznaczeniem  $t$ . Do tego celu można zastosować dowolny z przedstawionych wcześniej algorytmów, w analizowanym przypadku zastosowanie znajduje algorytm Dijkstry. Utworzenie ścieżki kończy drugi etap procedury. Jeżeli wymagana ścieżka nie zostanie utworzona, modyfikuje się ograniczenia na przepustowość, buduje nowy podgraf  $H$  i ponownie poszukuje się ścieżki.

Trzeci etap procedury, sprawdza spełnienie przez utworzoną ścieżkę warunków  $w_1$  oraz  $w_2$ . Jeżeli są one wypełnione, procedura kończy swoje działanie, w przeciwnym przypadku poszukiwanie ścieżki jest powtarzane.

W niektórych zastosowaniach, może pojawić się potrzeba projektowania ścieżki w oparciu o trzy kryteria. Rozwiązania podobnych zadań są znane, jednak charakteryzują się wysoką złożonością czasową. Dlatego zaproponowano metodę, w której rozwiązanie zadania z trzema kryteriami, sprowadza się do rozwiązania zadania dwukryterialnego. Dzięki temu, poszukiwanie ścieżki odbywa się kosztem tylko nieznacznego zwiększenia złożoności czasowej. W tym celu wykorzystuje się mieszaną funkcję wagową  $u_{(i,j)}$ .

Z uwagi na specyfikę analizowanych obiektów technicznych, jednym z najczęściej wykorzystywanych kryteriów oceny kanału komunikacyjnego jest prawdopodobieństwo utraty pakietu. Ponieważ rozpatrywana sieć powinna gwarantować dostawę informacji do odbiorcy, w protokoły komunikacyjne zostały wbudowane mechanizmy powtarzania transmisji pakietów, które nie zostały dostarczone do węzła przeznaczenia. Skutkiem powtórnej transmisji jest pojawienie się dodatkowego opóźnienia  $m_{(i,j)}$ , określanego wyrażeniem:

$$m_{(i,j)} = g d_{(i,j)}, \quad (6)$$

gdzie:  $g$  – współczynnik proporcjonalności, zależny od wykorzystywanego protokołu komunikacyjnego;  $d_{(i,j)}$  – średnie opóźnienie kanału komunikacyjnego  $(i, j)$ . Wykorzystując wyrażenie (6), funkcję wagi  $u_{(i,j)}$  możemy przedstawić jako:

$$u_{(i,j)} = d_{(i,j)} + s_{(i,j)}m_{(i,j)} = d_{(i,j)} + s_{(i,j)}gd_{(i,j)} = d_{(i,j)}(1 + s_{(i,j)}g),$$

gdzie:  $s_{(i,j)}$  – współczynnik utraty pakietów w kanale  $(i, j)$ .

Jeżeli do określenia funkcji  $u$  dla ścieżki  $P$  wykorzystamy addytywną zasadę aglomeracji, to będzie miała ona postać:

$$U(P) = \sum_{i=1}^k u(v_{i-1}, v_i). \quad (7)$$

Dzięki temu, rozwiązanie zadania projektowego z trzema kryteriami może być zrealizowane z wykorzystaniem algorytmu przedstawionego na rys. 2.

#### 4. Zmienność parametrów kanałów komunikacyjnych

Współczesne sieci rozległe są z definicji heterogeniczne komunikacyjnie. Dlatego, w ich rdzeniu mogą być szeroko stosowane dwupunktowe technologie transmisyjne. Możliwości ich zestawienia posiada wiele spośród wykorzystywanych obecnie technologii, które oferują szybką budowę bezpośrednich połączeń logicznych pomiędzy dowolną parą węzłów. W odniesieniu do rdzenia sieci dedykowane kanały dwupunktowe są bardzo atrakcyjnym rozwiązaniem, pozwalającym elastycznie dostosowywać strukturę jego połączeń do aktualnego wzorca ruchu. Jednak ich praktyczne wykorzystanie charakteryzuje się ograniczoną efektywnością. Po pierwsze, w systemach z wysoką dynamiką zmian charakterystyk ruchu, krótkotrwałe zastosowanie dedykowanej struktury połączeń może być nieopłacalne – czas ich zestawienia nierzadko jest porównywalny z czasem trwania ruchu o specyficznych charakterystykach. W takim przypadku, korzystniejszym niż rekonfiguracja okazuje się przysposobienie sieci do pracy w trybie chwilowego przeciążenia. Po drugie, kanały komunikacyjne, w szczególności w sieciach bezprzewodowych, charakteryzuje wysoka niestabilność większości parametrów. Najczęściej jest ona konsekwencją zmian charakterystyk obsługiwanego ruchu oraz właściwości otoczenia (zanieczyszczenie środowiska, niekorzystne warunki pogodowe, konkurowanie o dostęp do kanału).

Rekonfiguracja jako reakcja na zmianę wzorca ruchu ma ograniczone zastosowanie. Jest ona jednak skutecznym narzędziem rozwiązania problemów niestabilności charakterystyk kanałów komunikacyjnych. Ponieważ to właśnie kanały tworzą analizowane ścieżki, znaczącą niestabilnością parametrów charakteryzującą się również te ostatnie. Aby zapewnić stabilne funkcjonowanie ścieżek utworzonych za pomocą zaproponowanych algorytmów, w algorytmach ich projektowania zastosowano dodatkowe parametry opisujące zmienność wybranych charakterystyk. Tak więc, zmianę przepustowości  $b_{(i,j)}$  kanału komunikacyjnego oznaczamy  $\Delta b_{(i,j)}$ , zmianę opóźnienia  $d_{(i,j)}$  jako  $\Delta d_{(i,j)}$ . Parametry te, podobnie jak ich pierwowzory, określane są dla każdego z analizowanych sieciowych kanałów komunikacyjnych.

Zmienność właściwości w czasie wymaga okresowej aktualizacji ich wartości, która powinna być wykonywana jednocześnie w całej sieci. Jako aktywizujące kryterium aktualizacji wykorzystamy czas. Wartość parametru zmienności przepustowości kanału przed aktualizacją oznaczymy symbolem  $\Delta b_{(i,j)}^1$ , a po aktualizacji  $\Delta b_{(i,j)}^2$ . Identyczną zasadę oznaczania wykorzystamy również do określenia wartości przepustowości, którą przedstawimy symbolami:  $b_{(i,j)}^1$  – wartość przepustowości przed aktualizacją oraz  $b_{(i,j)}^2$  – wartość po aktualizacji. Podobnie oznaczać będziemy ewolucję opóźnień oraz ich wartości:  $\Delta d_{(i,j)}^1$  – zmiana opóźnienia w kanale  $(i, j)$  przed aktualizacją;  $\Delta d_{(i,j)}^2$  – zmiana opóźnienia po aktualizacji;  $b_{(i,j)}^1$  – wartość opóźnienia w kanale  $(i, j)$  przed aktualizacją;  $b_{(i,j)}^2$  – wartość opóźnienia po aktualizacji.

Dysponując informacjami o stanie kanału komunikacyjnego, na podstawie formuł analitycznych charakterystycznych dla każdego protokołu, można prosto oszacować wartości przepustowości  $b_{(i,j)}$  oraz opóźnień  $d_{(i,j)}$ . Z kolei współczynniki zmian parametru określamy, jako różnicę poprzedniego i obecnego znaczenia danej charakterystyki w sieci. Przypuśćmy, że w analizowanej sieci wykorzystywany będzie protokół TCP. Wtedy do określenia wartości  $\Delta b_{(i,j)}$  można skorzystać z wyrażenia otrzymanego poprzez modyfikację wzoru Jacobsona:

$$\Delta b_{(i,j)}^2 = k\Delta b_{(i,j)}^1 + (1-k)|b_{(i,j)}^2 - b_{(i,j)}^1|, \quad (8)$$

gdzie:  $k$  – współczynnik stabilności informacji historycznej, określający jak szybko z procedury usuwana jest informacja o wartości zmiennej  $\Delta b_{(i,j)}^1$ ,  $k < 1$ , wartość  $(1-k)$  opisuje jak szybko  $\Delta b_{(i,j)}^2$  zdąża do wartości  $|b_{(i,j)}^2 - b_{(i,j)}^1|$ . Bazując na analogicznych rozważaniach, otrzymujemy wyrażenie służące do określania wartości  $\Delta d_{(i,j)}^2$  zmiany opóźnienia:

$$\Delta d_{(i,j)}^2 = k\Delta d_{(i,j)}^1 + (1-k)|d_{(i,j)}^2 - d_{(i,j)}^1|. \quad (9)$$

Jak pokazały przeprowadzone badania, powyższe zasady uwzględniania zmian parametrów mogą być prosto uogólnione na inne typy obiektów technicznych.

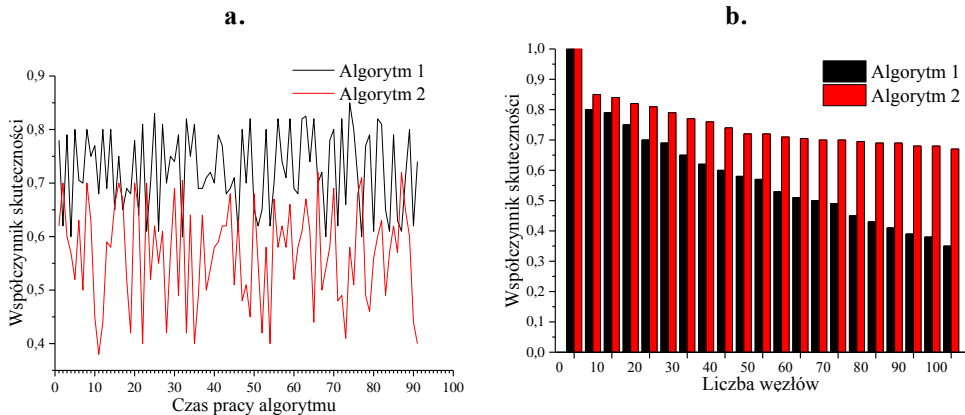
## 5. Analityczne badania algorytmów

W ramach badań analitycznych skoncentrowano się na porównaniu zaproponowanego algorytmu z klasycznymi metodami wielokryterialnego poszukiwania ścieżek. W tym celu, opracowany algorytm (dalej Algorytm 1) porównano z klasycznym podejściem (Algorytm 2), w którym ścieżka tworzona jest sekwencyjnie, kolejno dla każdego z ograniczeń, w danym przypadku – trzech. Na początku, tradycyjny algorytm określa ścieżkę charakteryzującą się minimalnym opóźnieniem, łączącą węzły źródłowy i docelowy. Następnie, jeżeli utworzono kilka ścieżek, spośród nich wybierana jest ta z maksymalną przepustowością. Jeżeli w rezulta-

cie wykonania drugiego kroku, ponownie uzyskano kilka ścieżek, wybierana jest ta charakteryzująca się minimalnym współczynnikiem błędów.

Jako kryterium oceny rozwiązania, wykorzystano współczynnik skuteczności, określający udział pakietów poprawnie przesłanych po sieci w ich ogólnej liczbie. W eksperymencie założono, że pakiety wysyłane są przez węzeł źródłowy permanentnie, a ich utrata to przede wszystkim konsekwencją czasu niezbędnego na zestawienie ścieżki. Ponadto, wpływ na współczynnik skuteczności ma niemożność zestawienia ścieżki z zadanymi parametrami. W takim przypadku, zgodnie z zaproponowaną procedurą wymagania dotyczące jakości ścieżki są rozluźniane, a procedura jej budowy powtarzana.

Wyniki przeprowadzonych eksperymentów zostały zaprezentowane na rys. 3. Pierwszy z wykresów (rys. 3a.) ilustruje zmianę współczynnika skuteczności w sieci złożonej z 1000 węzłów z losowym generowaniem parametrów kanałów oraz końcowych węzłów ścieżki. Żądania zestawiania i usuwania ścieżek są zgłaszane tak, aby obciążenia kanałów były nie mniejsze niż 60% ich przepustowości. Drugi z wykresów (rys. 3b.) pokazuje uśrednioną skuteczność dla różnych rozmiarów sieci i stałego obciążenia. Wyniki eksperymentów pokazują, że zastosowanie zaproponowanej metody poprawia współczynnik skuteczności średnio o 15-17%.



Rys. 3. Wyniki badań analitycznych

## 6. Podsumowanie i dalsze prace

W rozdziale przedstawiono dogłębną analizę metod rozwiązania zadania poszukiwania minimalnej ścieżki łączącej wskazaną parę węzłów. Z powodów praktycznych ograniczono się do badania ograniczonej grupy obiektów technicznych, w szczególności systemów teleinformatycznych złożonych z zestawu węzłów, wyposażonych w dysponujące własną mocą obliczeniową urządzenia przetwarzające oraz pasywne kanały komunikacyjne. W celu dodania ogólności rozwiązywanemu zdaniu założono, że analizowany obiekt składa się z zbioru regionów,

nazywanych komórkami. Dzięki takiemu założeniu uogólnienie wyników badań na inne obiekty infrastruktury jest stosunkowo proste.

Dalsze prace autorów będą skoncentrowane na:

1. Dostosowaniu opracowanych metod i algorytmów do wykorzystania w środowisku grafów rzadkich;
2. Uwzględnieniu nieokreśloności danych wejściowych procesu tworzenia ścieżek;
3. Uogólnieniu wyników na inne obiekty infrastrukturalne.

Planuje się również przygotowanie opracowanych algorytmów w postaci gotowych do wykorzystania programów aplikacyjnych.

## Bibliografia

- [1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson i R. Rivest, Wprowadzenie do algorytmów, Warszawa: WNT, 2004.
- [2] S. Dasgupta, C. Papadimitriou i U. Vazirani, Algorytmy, Warszawa: PWN, 2010.
- [3] K. A. Ross i C. R. Wright, Matematyka dyskretna, Warszawa: PWN, 2011.
- [4] J. Bang-Jensen i G. Z. Gutin, Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, London: Springer, 2010.
- [5] Z. Bubnicki, Teoria i algorytmy sterowania, Warszawa: PWN, 2005.
- [6] R. Bird, Pearls of Functional Algorithm Design, Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [7] E. Krok i Z. Stempnakowski, Podstawy algorytmów. Schematy blokowe, Warszawa: PWN, 2008.
- [8] M. D. Vose, The Simple Genetic Algorithm: Foundations and Theory, Boston: The MIT Press, 1999.
- [9] R. Diestel, Graph Theory, 4 red., New York: Springer, 2010.
- [10] A. V. Goldberg i T. Radzik, „A heuristic improvement of the Bellman-Ford algorithm”, *Applied Mathematics Letters*, tom 6, nr 3, pp. 3-6, 1993.
- [11] D. Blostein i Y.-B. Kwon, Graphics Recognition. Algorithms and Applications: 4th International Workshop, New York: Springer, 2002.
- [12] C. A. Oliveira i P. M. Pardalos, Mathematical Aspects of Network Routing Optimization, New York: Springer, 2011.
- [13] J. Wang, Z. Ding i C. Jiang, „An Ontology-based Public Transport Query System”, w *First International Conference on Semantics, Knowledge and Grid*, 2005.
- [14] M. Gheorghie, T. Hinze, G. Pun, G. Rozenberg i A. Salomaa, Membrane Computing: 11th International Conference, New York: Springer, 2011.
- [15] M. van Steen, Graph Theory and Complex Networks: An Introduction, Maarten van Steen, 2010.
- [16] D. S. Johnson, „Approximation algorithms for combinatorial problems”, *Journal of Computer and System Sciences*, tom 9, nr 3, pp. 256-278, 1974.

- 
- [17] C. J. Ong i E. G. Gilbert, „The Gilbert-Johnson-Keerthi distance algorithm: a fast version for incremental motions”, w *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1997.
- [18] J. Chen, D. K. Friesen i H. Zheng, „Tight bound on Johnson's algorithm for Max-SAT”, *Computational Complexity*, 1997.
- [19] B. Bollobas, *Modern Graph Theory*, New York: Springer, 1998.
- [20] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, 2 red., New Jersey: Prentice Hall, 2000.
- [21] L. N. Medford-Davis i B. G. Kapur, „Preparing for effective communications during disasters lessons from a World Health Organization quality improvement project”, *International Journal of Emergency Medicine*, nr 7:15, pp. 1-7, 2014.