
Edward Preweda*

OCENA DOKŁADNOŚCI WYZNACZANIA
PRZESTRZENNEGO POŁOŻENIA PUNKTÓW METODĄ BIEGUNOWĄ**

1. Wprowadzenie

Położenie, wymiary czy też kształt wielu obiektów przemysłowych określa się na podstawie wyników pomiarów geodezyjnych. Kontrolowane obiekty reprezentowane są przez zbiory punktów położonych na ich powierzchni, obserwowanych z punktów odniesienia. Prace terenowe, obejmujące wykonanie obserwacji, mogą być prowadzone przy zastosowaniu różnych technik pomiaru i różnej klasy sprzętem pomiarowym.

Jedną z metod określania współrzędnych przestrzennych punktów jest metoda biegunowa. Pomiaru odległości mogą być wykonywane do różnego typu reflektorów, mocowanych w punktach charakterystycznych obiektu. Wraz z pojawieniem się dalmierzy bezzwierciadlanych typu DIOR, powstała możliwość obserwacji punktów praktycznie dowolnie rozmieszczonych na powierzchni badanego obiektu, a zatem możliwość uwzględniania w szerszym stopniu uwarunkowań konstrukcyjnych obiektu. Zastosowanie dalmierzy bezzwierciadlanych do różnego typu pomiarów geodezyjnych jest wprawdzie ograniczone, ze względu na stosunkowo niewielki zasięg i niezbyt wysokie dokładności pomiaru odległości, niemniej jednak w coraz większym stopniu dalmierze te wprowadzane są do praktyki geodezyjnej. Poniżej zamieszczono charakterystyki kolejnych modeli dalmierza DIOR, wskazujące na ciągle doskonalenie konstrukcji tych dalmierzy (Tab. 1).

*Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska

**Praca jest bezpośrednio związana z badaniami własnymi nr 10.150.355, AGH Kraków

Tabela 1

Typ	Zasięg bez lustra [m]	Błąd standardowy [mm]
DIOR 3001	50	5-10
DIOR 3002	250	5-10
DIOR 3012 i DIOR 3012S	350	3-5+1 ppm

2. Sieć punktów odniesienia

Współrzędne punktów odniesienia wyznacza się w przestrzeni trójwymiarowej na podstawie wyników pomiarów kąto-długościowych i wysokościowych, przy czym model obserwacyjny sieci przestrzennej rozkłada się często na składową poziomą i wysokościową. Estymację punktową, prowadzącą do znalezienia wektora niewiadomych (współrzędnych punktów odniesienia) przeprowadza się metodą najmniejszych kwadratów, realizując warunek

$$F = v^T P v = (w - Ax)^T P (w - Ax) \rightarrow \text{minimum} \quad (1)$$

gdzie:

w – wektor wyrazów wolnych,

A – macierz współczynników,

x – wektor niewiadomych,

P – macierz współczynników wagowych w sensie Markowa dla wielkości obserwowanych, czyli $P = \text{Cov}(w)^{-1}$.

Przyjmując, że obserwacje nie są skorelowane ale o zróżnicowanych wariancjach, macierz $\text{Cov}(w)$ będzie macierzą diagonalną, stąd

$$p_i = \frac{1/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^n 1/\sigma_i^2} = \frac{1}{\sigma_i^2 \times \text{tr}\{\text{Cov}(w)^{-1}\}} \quad (2)$$

gdzie σ_i^2 – wariancja obserwacji.

Spełnienie warunku (1) prowadzi do wzoru na estymator wektora niewiadomych

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P w \quad (3)$$

oraz macierz wariancyjno-kowariancyjną tego estymatora

$$\text{Cov}(\hat{x}) = \hat{\sigma}^2 (A^T P A)^{-1} \quad (4)$$

Nieobciążony estymator wariancji $\hat{\sigma}^2$ określa się z zależności

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{v^T P v}{n - u - 1} \quad (5)$$

Dokładność położenia poszczególnych punktów odniesienia określają elipsoidy ufności na poziomie $(1 - \alpha)$ o półosiach

$$a_{i(1-\alpha)} = \sqrt{\lambda_i \times (\chi_{3,1-\alpha}^2)} \quad (6)$$

i odpowiadających im wektorach kierunkowych $\tau(\lambda)_i$.

Wartości własne λ_i i przyporządkowane im wektory własne s_i wynikają z rozkładu spektralnego podmacierzy macierzy kowariancji $\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{x}})$ dla współrzędnych wybranego punktu P_i , natomiast $(\chi_{3,1-\alpha}^2)$ jest kwantylem rzędu $(1 - \alpha)$ rozkładu chi-kwadrat o 3 stopniach swobody. W analogiczny sposób można konstruować elipsoidy ufności określające dokładność wzajemnego położenia wybranych par punktów $P - K$ sieci. W tym przypadku podmacierz, na podstawie której określać będziemy elipsoidę ufności, będzie postaci

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_P + \mathbf{C}_K - \mathbf{C}_{PK} - \mathbf{C}_{KP} \quad (7)$$

Poszczególne podmacierze wybierane są z macierzy $\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{x}})$

$$\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_P & | & \dots & | & \mathbf{C}_{PK} & | & \dots \\ \hline \dots & | & \dots & | & \dots & | & \dots \\ \hline \mathbf{C}_{KP} & | & \dots & | & \mathbf{C}_K & | & \dots \\ \hline \dots & | & \dots & | & \dots & | & \dots \end{bmatrix}$$

W przypadku wykonywania cyklicznych obserwacji obiektu, osnowa powinna być powiązana z punktami położonymi w strefie wolnej od przemieszczeń, celem przeprowadzenia kontroli stałości jej punktów.

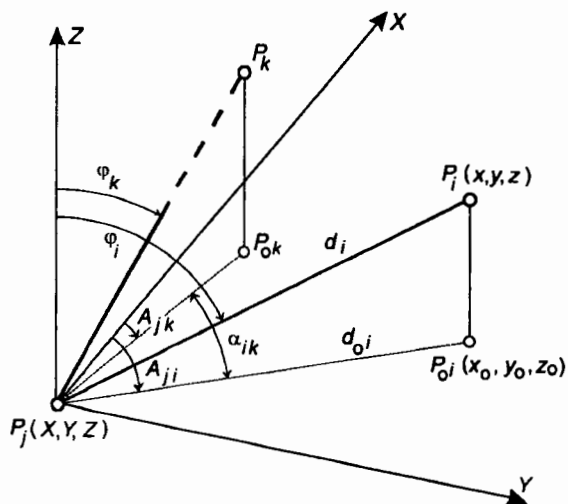
3. Estymacja macierzy kowariancji dla przestrzennych współrzędnych punktów obserwowanych metodą biegunową

Podstawę oceny dokładności wyznaczanych cech geometrycznych obiektów stanowi macierz kowariancji $\mathbf{Cov}(x, y, z)$ dla współrzędnych punktów reprezentujących dany obiekt. Współrzędne te określane są z różną dokładnością, a stopień zróżnicowania dokładności pomiędzy poszczególnymi punktami uzależniony jest od klasy sprzętu pomiarowego i stosowanej techniki pomiaru. W metodzie biegunowej zróżnicowanie to jest bardzo istotne. Przyjęcie a priori jednakowej dokładności wyznaczenia współrzędnych prowadzi nieuchronnie do zniekształcenia wartości estymowanych parametrów. Poniżej określono macierz $\mathbf{Cov}(x, y, z)$ dla metody biegunowej.

Zakładając, że współrzędne poszczególnych punktów P_i obiektu określane są w sposób jednoznaczny, ich wartości wyznaczymy z zależności (patrz rys. 1)

$$\begin{aligned} x_i &= X_j + d_i \sin \varphi_i \cos A_{ji} \\ y_i &= Y_j + d_i \sin \varphi_i \sin A_{ji} \\ z_i &= Z_j + h_j + d_i \cos \varphi_i \end{aligned} \quad (8)$$

Macierz kowariancji $\mathbf{Cov}(x, y, z)$ dla współrzędnych wyznaczanych punktów określamy zgodnie z prawem przenoszenia się kowariancji. Model stochastyczny przy-



P_i – punkt na obiekcie,
 P_j, P_k – punkty osnowy odniesienia,
 d_i – odległość ukośna do punktu P_i ,
 φ_i – kąt zenitalny do punktu P_i ,
 h_j – wysokość instrumentu,
 A_{ji} – azymut kierunku $J-I$.

Rys. 1. Schemat wyznaczania współrzędnych punktu metodą biegunową

miemy przy założeniu, że kowariancje obserwacji są równe zero oraz, że współrzędne punktów osnowy X i obserwacje L są niezależne, czyli

$$\text{Cov}(X, L) = \text{Cov} \begin{pmatrix} X \\ L \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X) & | & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & | & \text{Cov}(L) \end{bmatrix} \quad (9)$$

przy czym macierz $\text{Cov}(L)$ dla obserwacji zastąpimy macierzą diagonalną postaci

$$\text{Cov}(\hat{L}) = \text{diag}\{V(\alpha), V(\varphi), V(d), V(h)\} \quad (10)$$

Występującą w modelu stochastycznym macierz kowariancji $\text{Cov}(X, L)$ współrzędnych punktów odniesienia można aproksymować według następujących modeli:

Model 1

$$\text{Cov}(\hat{X}) = \mathbf{0} \quad (11)$$

— co oznacza przyjęcie współrzędnych punktów odniesienia za bezbłędne.

Model 2

$$\text{Cov}(\hat{X}) = \hat{\sigma}^2 \mathbf{E} \quad (12)$$

— co oznacza, że współrzędne są jednakowo dokładne i nieskorelowane ($\hat{\sigma}^2$ – estymator współczynnika wariancji, \mathbf{E} – macierz jednostkowa).

Model 3

$$\text{Cov}(\hat{X}) = \hat{\sigma}^2 \mathbf{D} \quad (13)$$

— co oznacza, że współrzędne są nieskorelowane, różnodokładne (\mathbf{D} – macierz diagonalna).

Model 4

$$\text{Cov}(\hat{X}) = \hat{\sigma}^2 \mathbf{W} \quad (14)$$

— model uwzględniający kowariancje pomiędzy współrzędnymi punktów odniesienia.

Wybór modelu stochastycznego uzależniony jest od konkretnych warunków i wymaganych dokładności.

Zgodnie z prawem przenoszenia się kowariancji zapiszemy

$$\text{Cov}(x, y, z) = \mathbf{S}^T \text{Cov}(X, L) \mathbf{S} \quad (15)$$

gdzie

\mathbf{S} – macierz utworzona z pochodnych cząstkowych funkcji (8) względem odpowiednich punktów osnowy i obserwacji.

Dla punktu P_i możemy zapisać

$$\mathbf{S}_i = [S_{x_i} \quad | \quad S_{y_i} \quad | \quad S_{z_i}]$$

przy czym

$$\mathbf{S}_{x_i} = \left[\begin{array}{l} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = 1 - d_i \sin \varphi_i \sin A_{ji} \frac{\sin A_{jk}}{d_{jk}} \\ \frac{\partial x_i}{\partial Y_j} = d_i \sin \varphi_i \sin A_{ji} \frac{\cos A_{jk}}{d_{jk}} \\ \frac{\partial x_i}{\partial Z_j} = 0 \\ \frac{\partial x_i}{\partial X_k} = d_i \sin \varphi_i \sin A_{ji} \frac{\sin A_{jk}}{d_{jk}} \\ \frac{\partial x_i}{\partial Y_k} = -d_i \sin \varphi_i \sin A_{ji} \frac{\cos A_{jk}}{d_{jk}} \\ \frac{\partial x_i}{\partial Z_k} = 0 \\ \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} = d_i \sin \varphi_i \sin A_{ji} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i} = d_i \cos \varphi_i \sin A_{ji} \\ \frac{\partial x_i}{\partial d_i} = \sin \varphi_i \cos A_{ji} \\ \frac{\partial x_i}{\partial h_j} = 0 \end{array} \right];$$

$$S_{y_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial X_j} = d_i \sin \varphi_i \cos A_{ji} \frac{\sin A_{jk}}{d_{jk}} \\ \frac{\partial y_i}{\partial Y_j} = 1 - d_i \sin \varphi_i \cos A_{ji} \frac{\cos A_{jk}}{d_{jk}} \\ \frac{\partial y_i}{\partial Z_j} = 0 \\ \frac{\partial y_i}{\partial X_k} = d_i \sin \varphi_i \cos A_{ji} \frac{\sin A_{jk}}{d_{jk}} \\ \frac{\partial y_i}{\partial Y_k} = d_i \sin \varphi_i \cos A_{ji} \frac{\cos A_{jk}}{d_{jk}} \\ \frac{\partial y_i}{\partial Z_k} = 0 \\ \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_i} = -d_i \sin \varphi_i \cos A_{ji} \\ \frac{\partial y_i}{\partial \varphi_i} = d_i \cos \varphi_i \sin A_{ji} \\ \frac{\partial y_i}{\partial d_i} = \sin \varphi_i \sin A_{ji} \\ \frac{\partial y_i}{\partial h_j} = 0 \end{bmatrix}; \quad S_{z_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_i}{\partial X_j} = 0 \\ \frac{\partial z_i}{\partial Y_j} = 0 \\ \frac{\partial z_i}{\partial Z_j} = 1 \\ \frac{\partial z_i}{\partial X_k} = 0 \\ \frac{\partial z_i}{\partial Y_k} = 0 \\ \frac{\partial z_i}{\partial Z_k} = 0 \\ \frac{\partial z_i}{\partial \alpha_i} = 0 \\ \frac{\partial z_i}{\partial \varphi_i} = -d_i \sin \varphi_i \\ \frac{\partial z_i}{\partial d_i} = \cos \varphi_i \\ \frac{\partial z_i}{\partial h_j} = 1 \end{bmatrix}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\kappa_i = \sin \varphi_i \sin A_{ji}; \quad \nu_i = \sin \varphi_i \cos A_{ji}; \quad \mu_i = \cos \varphi_i \sin A_{ji}$$

$$\omega_i = \frac{\sin A_{ji}}{d_{jk}}; \quad \psi_i = \frac{\cos A_{ji}}{d_{jk}}$$

otrzymamy:

$$S_{x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = 1 - d_i \kappa_i \omega_i \\ \frac{\partial x_i}{\partial Y_j} = d_i \kappa_i \psi_i \\ \frac{\partial x_i}{\partial Z_j} = 0 \\ \frac{\partial x_i}{\partial X_k} = d_i \kappa_i \omega_i \\ \frac{\partial x_i}{\partial Y_k} = -d_i \kappa_i \psi_i \\ \frac{\partial x_i}{\partial Z_k} = 0 \\ \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} = d_i \kappa_i \\ \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i} = d_i \mu_i \\ \frac{\partial x_i}{\partial d_i} = \nu_i \\ \frac{\partial x_i}{\partial h_j} = 0 \end{bmatrix}; \quad S_{y_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial X_j} = d_i \nu_i \omega_i \\ \frac{\partial y_i}{\partial Y_j} = 1 - d_i \nu_i \psi_i \\ \frac{\partial y_i}{\partial Z_j} = 0 \\ \frac{\partial y_i}{\partial X_k} = -d_i \nu_i \omega_i \\ \frac{\partial y_i}{\partial Y_k} = d_i \nu_i \psi_i \\ \frac{\partial y_i}{\partial Z_k} = 0 \\ \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_i} = -d_i \nu_i \\ \frac{\partial y_i}{\partial \varphi_i} = d_i \mu_i \\ \frac{\partial y_i}{\partial d_i} = \kappa_i \\ \frac{\partial y_i}{\partial h_j} = 0 \end{bmatrix};$$

$$S_{z_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_i}{\partial X_j} = 0 \\ \frac{\partial z_i}{\partial Y_j} = 0 \\ \frac{\partial z_i}{\partial Z_j} = 1 \\ \frac{\partial z_i}{\partial X_k} = 0 \\ \frac{\partial z_i}{\partial Y_k} = 0 \\ \frac{\partial z_i}{\partial Z_k} = 0 \\ \frac{\partial z_i}{\partial \alpha_i} = 0 \\ \frac{\partial z_i}{\partial \varphi_i} = -d_i \sin \varphi_i \\ \frac{\partial z_i}{\partial d_i} = \cos \varphi_i \\ \frac{\partial z_i}{\partial h_j} = 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Dla i -tego punktu macierz kowariancji przyjmuje postać

$$\mathbf{Cov}(X, L) = \mathbf{Cov}(X_j, Y_j, Z_j, X_k, Y_k, Z_k, \alpha_i, \varphi_i, d_i, h_j) =$$

$V(X_j)$	$\text{cov}(X_j, Y_j)$	$\text{cov}(X_j, Z_j)$	$\text{cov}(X_j, X_k)$	$\text{cov}(X_j, Y_k)$	$\text{cov}(X_j, Z_k)$	$\mathbf{0}$
/ - /	$V(Y_j)$	$\text{cov}(Y_j, Z_j)$	$\text{cov}(Y_j, X_k)$	$\text{cov}(Y_j, Y_k)$	$\text{cov}(Y_j, Z_k)$	$\mathbf{0}$
/ - /	/ - /	$V(Z_j)$	$\text{cov}(Z_j, X_k)$	$\text{cov}(Z_j, Y_k)$	$\text{cov}(Z_j, Z_k)$	$\mathbf{0}$
/ - /	/ - /	/ - /	$V(X_k)$	$\text{cov}(X_k, Y_k)$	$\text{cov}(X_k, Z_k)$	$\mathbf{0}$
/ - /	/ - /	/ - /	/ - /	$V(Y_k)$	$\text{cov}(Y_k, Z_k)$	$\mathbf{0}$
/ - /	/ - /	/ - /	/ - /	/ - /	$V(Z_k)$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$						$V(\alpha_i)$
$\mathbf{0}$						$V(\varphi_i)$
$\mathbf{0}$						$V(d_i)$
$\mathbf{0}$						$V(h_j)$

Dla modeli stochastycznych typu (11), (12) i (13) macierz $\mathbf{Cov}(x, y, z)$ można zapisać w formie:

$$\mathbf{Cov}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \mathbf{Cov}(x_1, y_1, z_1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Cov}(x_2, y_2, z_2) & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Cov}(x_n, y_n, z_n) \end{bmatrix}$$

Macierze $\mathbf{Cov}(x_i, y_i, z_i)$ mogą być w tym przypadku liczone niezależnie

$$\mathbf{Cov}(x_i, y_i, z_i) = S_i^T \mathbf{Cov}(X_j, Y_j, Z_j, X_k, Y_k, Z_k, \alpha_i, \varphi_i, d_i, h_j) S_i \quad (17)$$

Jeżeli występować będą obserwacje nadliczbowe, wówczas model matematyczny w części stochastycznej będzie analogiczny do przedstawionego powyżej, natomiast część funkcjonalna wyrażona będzie przez równania poprawek typu

$$\epsilon = A\hat{x} + w \quad (18)$$

Jeżeli sieć odniesienia jest niezależna sytuacyjnie i wysokościowo, co często w praktyce ma miejsce, wówczas kowariancje typu $\text{cov}(X, Z)$, $\text{cov}(Y, Z)$ będą zerowe.

Literatura

- [1] Grafarend E.: Schätzung von Varianz und Kowarianz der Beobachtungen in geodätischen Ausgleichungsmodellen. Allgemeine Vermessung-Nachrichten. Karlsruhe 1978
- [2] Praca zbiorowa pod redakcją S. Przewlockiego: Pomiary inżynierskie. Łódź, WNPL, 1993
- [3] Preweda E.: System pomiaru, obliczeń i wizualizacji zmian geometrycznych obiektów powłokowych o powierzchni stopnia drugiego. Rozprawa doktorska AGH, Kraków 1995

Recenzent:
prof. dr hab. inż. Józef Czaja

References

Grafarend E. : Schätzung von Varianz und Kowarianz der Beobachtungen in geodätischen Ausgleichungsmodellen. Allgemeine Vermessung-Nachrichten. Karlsruhe 1978

Praca zbiorowa pod redakcją S. Przewłockiego: Pomiary inżynierskie, WNPL, Łódź 1993

Preweda E.: System pomiaru, obliczeń i wizualizacji zmian geometrycznych obiektów powłokowych o powierzchni stopnia drugiego. Rozprawa doktorska, Kraków, 1995