ZESZYTY NAUKOWE
AKADEMII GÓRNICZO-HUTNICZEJ IM.STANISŁAWA STASZICA

Nr 1470 Geodezja z.115 Kraków 1993

Edward Preweda *

OCENA STANU GEOMETRYCZNEGO OBIEKTÓW POWŁOKOWYCH WZGLĘDEM DOWOLNYCH POWIERZCHNI DRUGIEGO STOPNIA

1. WPROWADZENIE

Budowle powłokowe pod wpływem odkształceń gruntu, relaksacji własnych naprężeń, wynikających na przykład z niedokładności montażu czy też działania innych czynników, mogą ulegać przemieszczeniom i deformacjom. Dla oceny stanu geometrycznego rozpatrywanych obiektów wykonywane są geodezyjne pomiary inwentaryzacyjne. W pracach zamieszczonych w wykazie literatury zakłada się, że obiekty te mają kształt brył obrotowych o osiach obrotu w przybliżeniu pionowych.

W niniejszej pracy proponuje się *algorytm obliczeń,* umożliwiający uzyskanie informacji o położeniu i kształcie badanej powłoki w odniesieniu do modelu teoretycznego, którym może być dowolna powierzchnia drugiego stopnia wpasowana w powlokę rzeczywistą, bądź w odniesieniu do kształtu zadanego przez projektowe wartości parametrów.

Dokładność wpasowania modelu w obiekt rzeczywisty zależy od dokładności wykonania powłoki, liczby i sposobu rozmieszczenia punktów obserwowanych na obiekcie oraz błędów pomiaru.

Opisane w literaturze geodezyjnej metody przyjmują za punkty reprezentujące powłokę punkty styczności celowych *(metoda otaczających stycznych* [2]) lub punkty utrwalone na

* Instytut Geodezji Górniczej i Przemysłowej AGH w Krakowie

This paper should be cited as:
Preweda, E.: Ocena stanu geometrycznego obiektów powłokowych względem dowolnych powierzchni drugiego stopnia. ZN AGH, 115, (83-96), 1993.

tejże powierzchni (*metoda wcięć przestrzennych*). Ponadto do kontroli kształtu stalowych zbiorników kulistych stosuje się *metodę biegunową* [1], [4], w której punktami obserwowanymi są kolejne położenia reflektora przesuwanego po powierzchni zbiornika. Spośród wymienionych metod pomiarowych rozważono metodę biegunową i metodę wcięć przestrzennych.

Podstawą procesu aproksymacji jest, niezależnie od metody pomiaru, *ogólne równanie powierzchni drugiego stopnia*. Rozwiązanie układu równań aproksymacyjnych, zestawionego w zależności od metody pomiaru według wzorów (8) lub (10), prowadzi do obliczenia współczynników A_{ij}, na podstawie których wyznacza się następujące wielkości charakteryzujące położenie i kształt budowli:

— współrzędne środka wyaproksymownej powłoki (3.1),
— geometryczne parametry powierzchni aproksymującej (3.2),
— położenie osi głównych względem przyjętego układu współrzędnych (3.3),
— odchyłki normalne badanej powierzchni względem powłoki modelowej (3.4).

2. WYZNACZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW RÓWNANIA POWIERZCHNI DRUGIEGO STOPNIA

Równanie ogólne powierzchni drugiego stopnia ma następującą postać:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Na podstawie znanych współrzędnych x, y, z określonej liczby punktów reprezentujących dany obiekt należy określić wartości współczynników a_{ij}. Próba jednoczesnego wyznaczenia wszystkich parametrów prowadzi do jednorodnego układu równań. (Nie jest to istotne w przypadku kuli i powierzchni obrotowych).

W celu rozwiązania takiego układu można na przykład wyeliminować jedną niewiadomą, dzieląc przez nią całe równanie. Na podstawie doświadczeń zdobytych podczas analizy badanych metod oraz obliczeń komputerowych dla poszczególnych obiektów stwierdzono, że ze względów numerycznych najkorzystniejsze jest wyeliminowanie niewiadomej a_{11} lub a_{22} ($a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$). W wyniku tej operacji wartości wszystkich współczynników zmienią się proporcjonalnie. Nie będzie to miało wpływu na ich przydatność, gdyż jak wiadomo z literatury [7], wielomiany o proporcjonalnych współczynnikach opisują tę samą powierzchnię.

Równanie (1) podzielone przez a_{11} przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} G(x,y,z) = A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz + \\ + 2A_{14}x + 2A_{24}y + 2A_{34}z + A_{44} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie

$$A_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{11}}; \qquad\qquad A_{11} = 1$$

Przy tych założeniach, obliczenie wartości niewiadomych współczynników $A_{ij} = A_{ji}$ będzie możliwe w przypadku znajomości współrzędnych przestrzennych przynajmniej dziewięciu punktów reprezentujących badaną powłokę. Ponieważ liczba punktów obserwowanych jest znacznie większa, wobec czego zamiast układu równań (2) zestawia się odpowiednie równania aproksymacyjne, w niniejszej pracy wynikające z zasad metody najmniejszych kwadratów.

2.1 Równania aproksymacyjne w metodzie biegunowej

W przypadku wykonywania pomiarów metodą biegunową, dla każdego obserwowanego punktu wyznacza się w zadanej płaszczyźnie pionowej o azymucie α kąt pionowy φ i odległość niezredukowaną l. Współrzędne punktów obserwowanych oblicza się z zależności:

$$
\begin{aligned}
x &= X + l\cos\varphi\cos\alpha = X + le_x \\
y &= Y + l\cos\varphi\sin\alpha = Y + le_y \\
z &= Z + l\sin\varphi = Z + le_z
\end{aligned}
\tag{3}
$$

gdzie

X, Y, Z - współrzędne stanowiska obserwacyjnego.

Uwzględniając zależność (3) w równaniu (2) i przyjmując, że pomiar długości odbywa się przy ustalonym azymucie α i ustalonym kącie pionowym φ, ($\alpha = const$, $\varphi = const$), warunek (2) można przedstawić w postaci:

$$
G = G(l, A_{ij}) = G_0 \bigg|_{l, \bar{A}_{ij}} + \frac{\partial G}{\partial l}\bigg|_{l = l_0} dl + \frac{\partial G}{\partial A_{ij}}\bigg|_{A_{ij} = \bar{A}_{ij}} dA_{ij}
\tag{4}
$$

gdzie

$\bar{A}_{ij}$ - przybliżone wartości współczynników równania powierzchni aproksymującej,

$$
\begin{aligned}
G_o = {} & x^2 + y^2\bar{A}_{22} + z^2\bar{A}_{33} + 2xy\bar{A}_{12} + 2xz\bar{A}_{13} + 2yz\bar{A}_{23} + \\
& + 2x\bar{A}_{14} + 2y\bar{A}_{24} + 2z\bar{A}_{34} + \bar{A}_{44}
\end{aligned}
,\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial G}{\partial l}\right]_0 dl = {} & \Big[2e_x(x + \bar{A}_{12}y + \bar{A}_{13}z + \bar{A}_{14}) + \\
& + 2e_y\left(\bar{A}_{12}x + \bar{A}_{22}y + \bar{A}_{23}z + \bar{A}_{24}\right) + \\
& + 2e_z\left(\bar{A}_{13}x + \bar{A}_{23}y + \bar{A}_{33}z + \bar{A}_{34}\right)\Big]dl = g_l dl
\end{aligned}
,\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial G}{\partial A_{ij}}\right]_o dA_{ij} = {} & y^2 dA_{22} + z^2 dA_{33} + 2xy dA_{12} + 2xz dA_{13} + 2yz dA_{23} + \\
& + 2x dA_{14} + 2y dA_{24} + 2z dA_{34} + dA_{44}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Przyjmując $dl = V_l$, uzyskuje się, po przekształceniu wzoru (4), następującą postać równań poprawek:

$$\begin{aligned} V_l = & -\frac{y^2}{g_l}dA_{22} - \frac{z^2}{g_l}dA_{33} - 2\frac{xy}{g_l}dA_{12} - 2\frac{xz}{g_l}dA_{13} - 2\frac{yz}{g_l}dA_{23} - \\ & - 2\frac{x}{g_l}dA_{14} - 2\frac{y}{g_l}dA_{24} - 2\frac{z}{g_l}dA_{34} - 2\frac{l}{g_l}dA_{44} - \frac{G_o}{g_l} \end{aligned} \tag{8}$$

2.2 Równania aproksymacyjne w metodzie wcięcia przestrzennego

W pierwszym etapie prac pomiarowych wyznaczono metodą wcięć przestrzennych współrzędne obserwowanych punktów. Po modyfikacjach równania aproksymacyjne otrzymały następującą postać:

$$\begin{aligned} V = & x^2 + y^2A_{22} + z^2A_{33} + 2xyA_{12} + 2xzA_{13} + 2yzA_{23} + \\ & + 2xA_{14} + 2yA_{24} + 2zA_{34} + A_{44} \end{aligned} \tag{9}$$

Równanie (9) jest liniowe ze względu na niewiadome, jednakże dla zwiększenia dokładności obliczeń funkcję tę rozwija się w szereg, otrzymując:

$$\begin{aligned} V = & y^2dA_{22} + z^2dA_{33} + 2xydA_{12} + 2xzdA_{13} + 2yzdA_{23} + \\ & + 2xdA_{14} + 2ydA_{24} + 2zdA_{34} + dA_{44} + G_0 \end{aligned} \tag{10}$$

3. WYZNACZENIE PARAMETRÓW OPISUJĄCYCH POŁOEŻNIE I KSZTAŁT BADANEGO OBIEKTU

Po przeprowadzeniu aproksymacji w równaniu powłoki, będącej powierzchnią drugiego stopnia, występują najbardziej prawdopodobne wartości współczynników A_{ij} uzyskane w procesie wyrównania. Współczynniki te wykorzystuje się do obliczenia niezmienników definiujących własności kwadryk niezależne od ich położenia w przestrzeni. Uwzględniając, zgodnie z poczynionymi wcześniej rozważaniami, że $A_{11} = 1$, niezmienniki będą miały następującą postać:

$$\begin{aligned} I &= 1 + A_{22} + A_{33} \\ J &= \det\begin{bmatrix} 1 & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & A_{13} \\ A_{13} & A_{33} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

$$K = \det\begin{bmatrix} 1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \qquad L = \det\begin{bmatrix} 1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

3.1 Określenie współrzędnych środka kwadryki

Zgodnie z [5], wszystkie średnice kwadryki centralnej (niezmiennik $K \neq 0$) przecinają się w jednym punkcie zwanym *środkiem kwadryki*. Korzystając ze składowych wektora normalnego do powierzchni drugiego stopnia, którego współrzędne dla punktu określającego środek symetrii będą równe zero, otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{aligned} x_o + A_{12}y_o + A_{13}z_o + A_{14} &= 0 \\ A_{12}x_o + A_{22}y_o + A_{23}z_o + A_{24} &= 0 \\ A_{13}x_o + A_{23}y_o + A_{33}z_o + A_{34} &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Rozwiązanie tego układu prowadzi do uzyskania najbardziej prawdopodobnych wartości współrzędnych środka symetrii wyaproksymowanej powierzchni. Obliczenia można przeprowadzić wzorami Cramera. Dla powierzchni niecentralnych współrzędna z_0 jest ustalona dla dowolnie wybranego przekroju i wówczas niewiadome x_0, y_0 uzyskuje się z dwóch pierwszych równań układu.

3.2 Wyznaczenie geometrycznych parametrów powierzchni aproksymującej

Aby określić wymiary półosi głównych powierzchni drugiego stopnia, należy znaleźć postać kanoniczną równania tej powierzchni.

Przekształcenie równania (2) na postać kanoniczną wymaga

— obrotu osi współrzędnych w taki sposób, aby każda nowa oś była skierowana wzdłuż jednej z osi głównych oraz

— odpowiedniego przesunięcia początku układu.

Jak wiadomo, kierunki normalnych do płaszczyzn drugiego stopnia, a tym samym kierunki osi głównych, pokrywają się z kierunkami wektorów własnych macierzy utworzonej ze współczynników charakterystycznej formy kwadratowej równania (2). W związku z tym ortogonalne przekształcenie formy (2) można wykonać korzystając z pierwiastków λ_1, λ_2, λ_3 równania charakterystycznego utworzonego ze współczynników A_{ij}:

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = 0 \tag{13}$$

Macierz $|\xi|$ jest kwadratowa i symetryczna, zgodnie więc z [7] ma trzy wartości własne λ. Wynikają one z warunku:

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & A_{234} \\ A_{31} & A_{31} & A_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

lub, po rozwinięciu wyznacznika (14) względem wartości własnych

$$\lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda - K = 0 \tag{15}$$

Obliczenie współczynników λ_i można wykonać wzorami Cardana. Korzystając z obliczonych pierwiastków charakterystycznych $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ formę kwadratową (2) można przedstawić w postaci kanonicznej:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{L}{K} = 0 \tag{16}$$

lub

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1 \tag{17}$$

gdzie

$$A^2 = -\frac{L}{\lambda_1 K}; \qquad B^2 = -\frac{L}{\lambda_2 K}; \qquad C^2 = -\frac{L}{\lambda_3 K} \tag{18}$$

Wymiary osi głównych oblicza się, porównując równanie interesującej nas powierzchni ze wzorem (17), przedstawiającym ogólną postać kanoniczną równania kwadryki. Poniżej zamieszczono równania w postaci kanonicznej oraz parametry a, b, c kwadryk właściwych ($L \neq 0$), wyrażonych przez niezmienniki I, J, K, L oraz wartości własne λ.

Kwadryki centralne ($K \neq 0$)

Elipsoida rzeczywista

$I, J, K > 0; L < 0$
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{19}$$

$$a^2 = -\frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{L}{K} \qquad b^2 = -\frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{L}{K} \qquad c^2 = -\frac{1}{\lambda_3} \cdot \frac{L}{K} \tag{20}$$

Hiperboloida jednopowłokowa

$I \geq 0$ lub $J \leq 0$
$K < 0; L > 0$
$\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 > \lambda_3$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{21}$$

$$a^2 = -\frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{L}{K} \qquad b^2 = -\frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{L}{K} \qquad c^2 = -\frac{1}{\lambda_3} \cdot \frac{L}{K} \tag{22}$$

Hiperboloida dwupowłokowa

$I \le 0$ lub $J \le 0$
$K > 0; L < 0$
$\lambda_3 > 0 > \lambda_1 \ge \lambda_2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{23}$$

$$a^2 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{L}{K} \qquad b^2 = -\frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{L}{K} \qquad c^2 = -\frac{1}{\lambda_3} \cdot \frac{L}{K} \tag{24}$$

Kwadryki niecentralne ($K = 0$)

Paraboloida eliptyczna

$J > 0; L < 0$
$\lambda_1 \ge \lambda_2 > \lambda_3 = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{25}$$

$$a^2 = \frac{2}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{L}{J}} \qquad b^2 = \frac{2}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{L}{J}} \tag{26}$$

Paraboloida hiperboliczna

$J < 0; L > 0$
$\lambda_1 > \lambda_2 = 0 > \lambda_3$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -2z \tag{27}$$

$$a^2 = \frac{2}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{L}{J}} \qquad b^2 = -\frac{2}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{L}{J}} \tag{28}$$

3.3 Określenia położenia osi głównych względem przyjętego układu współrzędnych

Wszystkie wyaproksymowane obiekty mają swoje kierunki główne w układzie współrzędnych prostokątnych. Każdemu kierunkowi głównemu odpowiada jeden z pierwiastków charakterystycznych wielomianu (15). Cosinusy kierunkowe osi głównych, zgodnie z poczynionymi wcześniej rozważaniami ($A_{11} = 1$), muszą spełniać warunki:

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\cos\alpha + A_{12}\cos\beta + A_{13}\cos\gamma &= 0\\ A_{12}\cos\alpha + (A_{22}-\lambda)\cos\beta + A_{23}\cos\gamma &= 0\\ A_{13}\cos\alpha + A_{23}\cos\beta + (A_{33}-\lambda)\cos\gamma &= 0\end{aligned} \tag{29}$$

oraz

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{30}$$

gdzie

α, β, γ - kąty zawarte pomiędzy kierunkiem głównym a odpowiednimi osiami układu współrzędnych prostokątnych.

Układ równań (30) jest układem jednorodnym, możliwym do rozwiązania w sposób przedstawiony w [2] lub [4].

3.4 Odchyłki kształtu powłoki rzeczywistej od powierzchni wyaproksymowanej

Równanie (2) reprezentuje wyaproksymowaną powierzchnię powłoki obserwowanego obiektu. Względem tej modelowej powłoki określa się kształt powierzchni rzeczywistej, obliczając odległości każdego obserwowanego punktu powłoki rzeczywistej od modelowej, wzdłuż kierunków normalnych do powłoki modelowej. W celu obliczenia odchyłek kształtu w równaniu ogólnym powierzchni drugiego stopnia w miejsce współrzędnych obserwowanego obiektu należy wstawić *współrzędne powłoki modelowej* obliczone z zależności:

$$
\begin{aligned}
x_m &= x + \Phi N_x \\
y_m &= y + \Phi N_y \\
z_m &= z + \Phi N_z
\end{aligned}
\tag{31}
$$

gdzie

x_m, y_m, z_m - współrzędne powłoki modelowej,
x, y, z - współrzędne punktu P reprezentującego obserwowany obiekt,
N_x, N_y, N_z - składowe wektora normalnego do powierzchni modelowej w punkcie P,
Φ - parametr.

Po wykonaniu i uporządkowaniu opisanych działań otrzymuje się równanie kwadratowe, którego rozwiązanie (analogicznie jak w [4]) pozwala na obliczenie odległości v punktu P od powłoki modelowej oraz jej składowych v_x, v_y, v_z.

4. PRZYKŁAD

Zagadnienie wyznaczania położenia i kształtu obiektów powłokowych jest przedmiotem wielu opracowań. Generalnie, wszelkie rozwiązania zawarte w tych pracach dotyczą oceny stanu geometrycznego budowli względem powierzchni obrotowych o osiach obrotu w przybliżeniu pionowych. Z różnych jednak przyczyn interesująca użytkownika obiektu może być ocena stanu geometrycznego względem powierzchni optymalnie wpasowanej w obiekt badany, czy też powierzchni spełniającej inne, zadane warunki.

Dla zobrazowania różnych możliwości oceny stanu geometrycznego obiektu oraz wykazania różnic występujących między przyjętymi modelami aproksymacyjnymi przedstawiono przykład liczbowy. Poniższe badania wykonano na przygotowanym obiekcie testowym - chłodni hiperboloidalnej jednopowłokowej. Zakłada się, że na etapie pomiarów geodezyjnych wyznaczono, metodą wcięć przestrzennych, współrzędne punktów reprezentujących rozpatrywaną powłokę (tabl. 1).

Tablica 1

Współrzędne punktów reprezentujących obiekt			
Lp.	x, [m]	y, [m]	z, [m]
1	141,664	117,408	109,580
2	117,223	141,750	109,854
3	58,408	117,354	109,939
4	58,271	82,841	110,044
5	82,790	58,608	110,147
6	117,154	58,742	110,139
7	141,634	82,904	110,028
8	127,946	111,576	59,960
9	111,500	127,790	59,907
10	88,536	127,676	59,913
11	72,191	111,511	59,965
12	72,080	88,436	60,039
13	88,479	72,200	60,080
14	111,479	72,294	60,080
15	127,840	88,467	60,041
16	141,772	117,153	9,985
17	117,216	141,406	9,866
18	58,383	117,005	9,979
19	58,350	82,591	10,428
20	82,756	58,220	10,149
21	117,172	58,384	10,145
22	141,491	82,657	10,406

Na podstawie współrzędnych aproksymowano następujące powierzchnie:

1^0 - hiperboloidę jednopowłokową,

2^0 - hiperboloidę jednopowłokową o osi głównej usytuowanej wzdłuż linii pionu,

3^0 - hiperboloidę jednopowłokową o zadanym położeniu półosi a i b względem przyjętego układu współrzędnych (równolegle do układu),

4^0 - hiperboloidę jednopowłokową obrotową,

5^0 - hiperboloidę jednopowłokową o osi obrotu usytuowanej wzdłuż linii pionu.

Obliczenia przeprowadzono za pomocą opracowanego pakietu „Kwadryki", na mikrokomputerze IBM PC. Aproksymacja powierzchni odbywa się metodą iteracyjną do momentu, kiedy różnica współrzędnych punktów spełniających zadane równanie powierzchni nie przekracza w dwóch ostatnich przybliżeniach wartości 0,1 mm. Poniżej zamieszczono zestawienie parametrów geometrycznych aproksymowanych powierzchni (tabl. 2) oraz odchyłki kształtu powłoki rzeczywistej od modelowych dla powierzchni 1^0 i 4^0 (tabl. 3, 4).

Tablica 2

Zestawienie wielkości charakteryzujących położenie badanego obiektu w zależności od przyjętego modelu aproksymacji

Parametry	Hiperboloida jednopowłokowa				
	model ogólny	o pionowej osi głównej	o zadanym położeniu półosi a, b	obrotowa	obrotowa o pionowej osi obrotu
x_o [m]	100,022	100,021	100,009	99,998	99,998
y_o [m]	99,985	99,985	100,015	100,041	100,041
z_o [m]	60,024	60,090	60,024	60,024	60,090
a [m]	30,239	30,239	30,191	30,103	30,105
b [m]	29,966	29,971	30,014	30,103	30,105
c [m]	44,938	44,945	44,902	44,874	44,882
φ [g]	0,23	0,00	0,23	0,23	0,00
A_φ [g]	95,7	—	95,8	95,8	—
A_α [g]	21,7	22,0	0,00	—	—
$[vv]$ [m^2]	0,0006	0,3285	0,1126	0,2480	0,5744

Tablica 3

Współrzędne wyaproksymowanej hiperboloidy jednopowłokowej oraz odchyłki kształtu powłoki rzeczywistej od modelowej

Lp.	xM, [m]	yM, [m]	zM, [m]	xo, [m]	yo, [m]	vx, [m]	vy, [m]	vz, [m]	v, [m]
1	141,6485	117,4099	109,5776	100,0393	100,2386	0,0045	0,0019	-0,0024	0,0055
2	117,2230	141,7500	109,8540	100,0394	100,2400	0,0000	0,0000	-0,0000	0,0000
3	58,4078	117,3541	109,9389	100,0395	100,2405	-0,0002	0,0001	-0,0001	0,0002

Współrzędne wyaproksymowanej hiperboloidy jednopowłokowej oraz odchyłki kształtu powłoki rzeczywistej od modelowej									
Lp.	*xM*, [m]	*yM*, [m]	*zM*, [m]	*xo*, [m]	*yo*, [m]	*vx*, [m]	*vy*, [m]	*vz*, [m]	*v*, [m]
4	58,2725	82,8416	110,0448	100,0395	100,2410	0,0015	0,0006	0,0008	-0,0018
5	82,7880	58,6031	110,1444	100,0395	100,2415	-0,0020	-0,0049	-0,0026	0,0059
6	117,1533	58,7437	110,1399	100,0395	100,2415	-0,0007	0,0017	0,0009	-0,0020
7	141,6276	82,9067	110,0315	100,0395	100,2409	-0,0064	0,0027	0,0035	-0,0078
8	127,9490	111,5772	59,9600	100,0215	99,9846	0,0030	0,0012	-0,0000	0,0032
9	111,5020	127,7950	59,9070	100,0215	99,9843	0,0020	0,0050	-0,0000	0,0054
10	88,5405	127,6650	59,9130	100,0215	99,9843	0,0045	-0,0110	0,0000	-0,0119
11	72,1976	111,5082	59,9650	100,0215	99,9846	0,0066	-0,0028	0,0000	-0,0072
12	72,0765	88,4346	60,0390	100,0215	99,9850	-0,0035	-0,0014	0,0000	0,0038
13	88,4788	72,1996	60,0800	100,0215	99,9852	-0,0002	-0,0004	0,0000	0,0004
14	111,4787	72,2948	60,0800	100,0215	99,9852	-0,0003	0,0008	-0,0000	-0,0008
15	127,8466	88,4642	60,0410	100,0215	99,9850	0,0066	-0,0028	0,0000	0,0072
16	141,7706	117,1524	9,9842	100,0035	99,7287	-0,0014	-0,0006	-0,0008	-0,0017
17	117,2150	141,4035	9,8647	100,0035	99,7281	-0,0010	-0,0025	-0,0013	-0,0030
18	58,3745	117,0086	9,9836	100,0035	99,7287	-0,0085	0,0036	0,0046	0,0103
19	58,3560	82,5935	10,4247	100,0037	99,7310	0,0060	0,0025	-0,0033	-0,0073
20	82,7564	58,2210	10,1485	100,0036	99,7296	0,0004	0,0010	-0,0005	-0,0012
21	117,1727	58,3823	10,1459	100,0036	99,7295	0,0007	-0,0017	0,0009	0,0021
22	141,4915	82,6568	10,4063	100,0037	99,7309	0,0005	-0,0002	0,0003	0,0006

Tablica 4

Współrzędne wyaproksymowanej hiperboloidy jednopowłokowej obrotowej oraz odchyłki kształtu powłoki rzeczywistej od modelowej									
Lp.	*xM*, [m]	*yM*, [m]	*zM*, [m]	*xo*, [m]	*yo*, [m]	*vx*, [m]	*vy*, [m]	*vz*, [m]	*v*, [m]
1	141,5252	117,3592	109,6440	100,0146	100,2958	-0,1188	-0,0488	0,640	-0,1435
2	117,2544	141,8255	109,8127	100,0147	100,2972	0,0314	0,0755	-0,0413	0,0916
3	58,3632	117,3724	109,9147	100,0147	100,2977	-0,0148	0,0184	-0,0243	0,0542
4	58,3946	82,8927	110,1103	100,0147	100,2982	0,1236	0,0517	0,0663	-0,1495
5	82,7831	58,5912	110,1380	100,0148	100,2987	-0,0069	-0,0168	-0,0090	0,0203
6	117,2076	58.6120	110,0691	100,0148	100,2987	0,0536	-0,1300	-0,0699	0,1570

Współrzędne wyaproksymowanej hiperboloidy jednopowłokowej obrotowej oraz odchyłki kształtu powłoki rzeczywistej od modelowej									
Lp.	*xM*, [m]	*yM*, [m]	*zM*, [m]	*xo*, [m]	*yo*, [m]	*vx*, [m]	*vy*, [m]	*vz*, [m]	*v*, [m]
7	141,6075	82,9151	110,0423	100,0147	100,2981	-0,0265	0,0111	0,0143	-0,0321
8	127,8244	111,5258	59,9602	99,9979	100,0411	-0,1216	-0,0502	0,0002	-0,1316
9	111,5248	127,8499	59,9068	99,9979	100,0408	0,0248	0,0599	-0,0002	0,0648
10	88,4649	127,8474	59,9125	99,9979	100,0409	-0,0711	0,1714	-0,0005	0,1855
11	72,1691	111,5200	59,9650	99,9979	100,0411	-0,0219	0,0090	-0,0000	0,0236
12	72,2008	88,4862	60,0387	99,9980	100,0415	0,1208	0,0502	-0,0003	-0,1309
13	88,4894	72,2252	60,0799	99,9980	100,0417	0,0104	0,0252	-0,0001	-0,0273
14	111,5073	72,2255	60,0803	99,9980	100,0417	0,0283	-0,0685	0,0003	0,0741
15	127,7949	88,4857	60,0409	99,9980	100,0415	-0,0451	0,0187	-0,0001	-0,0488
16	141,6482	117,1016	9,9186	99,9812	99,7846	-0,1238	-0,0514	-0,0664	-0,1496
17	117,2466	141,4798	9,9056	99,9812	99,7840	0,0306	0,0738	0,0396	0,0891
18	58,3308	117,0266	10,072	99,9812	99,7845	-0,0522	0,0216	0,0282	0,0631
19	58,4792	82,6444	10,3584	99,9814	99,7868	0,1292	0,0534	-0,0696	-0,1561
20	82,7517	58,2096	10,1547	99,9813	99,7854	-0,0043	-0,0104	0,0057	0,0126
21	117,2273	58,2508	10,2179	99,9813	99,7854	0,0553	-0,1332	0,0729	0,1616
22	141,4719	82,6649	10,3957	99,9813	99,7867	-0,0191	0,0079	-0,0103	-0,0231

Na podstawie wyników obliczeń stwierdza się, że powierzchnią najdokładniej wpasowaną w obiekt badany jest hiperboloida jednopowłokowa bez dodatkowych warunków; suma kwadratów odchyłek kształtu jest tu zdecydowanie najmniejsza. Wyniki badań przeprowadzone jedynie względem hiperboloidy obrotowej świadczyłyby o lokalnych deformacjach powłoki dochodzących do wartości 0,1855 m. Okazuje się jednak, że w przypadku aproksymacji modelem ogólnym maksymalna odchyłka kształtu nie przekracza 0,0119 m. W zależności od wymagań użytkownika obiektu można przedstawiać wyniki obliczeń wykonane dla konkretnego, jednego modelu aproksymacyjnego, jednak zastosowanie również innych modeli umożliwi lepszą interpretację tych wyników.

5. UWAGI I WNIOSKI KOŃCOWE

Przedstawiony algorytm obliczeń bazuje, niezależnie od metody pomiarów geodezyjnych, na ogólnym równaniu powierzchni drugiego stopnia. Jego istotną zaletą jest to, iż odnosi się do kwadryk właściwych, których zarówno parametry geometryczne jak i położenie w przestrzeni może być dowolne. Zaproponowany model ogólny można w prosty sposób wykorzystywać dla przypadków szczególnych, przez odpowiednie sterowanie współczynnikami równania powierzchni.

I tak, przechodząc od powierzchni dowolnych do obrotowych, wystarczy przyjąć stałość współczynników A_{22} i A_{12} ($A_{22} = A_{11} = 1, A_{12} = 0$). Podobnie dla sfery, która jest szczególnym przypadkiem elipsoidy, współczynnikami stałymi będą: $A_{33} = A_{22} = A_{11} = 1$ oraz z uwagi na to, iż dla sfery nie są określone kierunki główne w prostokątnym układzie współrzędnych, będzie $A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0$. Analogicznie można wyznaczyć położenie i kształt badanej budowli względem innych szczególnych powierzchni drugiego stopnia, jak na przykład względem powierzchni o pionowej osi obrotu czy też ściśle określonych parametrach geometrycznych.

Na podstawie doświadczeń zdobytych przez autora podczas analizy przedstawionych metod oraz obliczeń wykonanych dla wielu obiektów testowych stwierdzono, że w zależności od klasy symetrii badanej budowli, liczby i sposobu rozmieszczenia punktów reprezentujących dany obiekt, niektóre współczynniki równania ogólnego mogą nie być w danym przypadku wyznaczalne lub mogą prowadzić do słabo uwarunkowanego układu równań.

W takim przypadku należy również przyjąć odpowiednie współczynniki, na podstawie założeń wynikających z geometrii rozpatrywanej powłoki. Aby zmniejszyć ryzyko zaistnienia takiej sytuacji, punkty na obiektach należy tak dobierać, aby — w przypadku gdy aproksymacja odbywać się będzie równaniem kwadryki dowolnej — na jednym poziomie obserwacyjnym znalazło się minimum pięć punktów w miarę równomiernie rozmieszczonych. Dla powierzchni obrotowych niezbędne są przynajmniej cztery punkty położone na jednym poziomie obserwacyjnym.

Zgodnie z podanym algorytmem, obliczenia dla poszczególnych metod i obiektów zostały w całości oprogramowane na EMC. Z uwagi na możliwość występowania słabo uwarunkowanych układów równań (sprawdzane zgodnie z zasadami podanymi w [10]), dla uzyskania współrzędnych punktów na powłoce modelowej z dokładnością obliczeń do 0,001 m niezbędne jest reprezentowanie wartości liczbowych przez minimum 14 - 15 cyfr znaczących. W przypadku korzystania z powyższych programów, przybliżone współczynniki $\bar{A}_{ij}$, można podawać z dużym przybliżeniem, gdyż obliczenia prowadzone są iteracyjnie, a stopień przybliżenia współczynników nie wpływa na ostateczne wyniki obliczeń.

Należy również nadmienić, iż zarówno czas wykonywania operacji obliczeniowych jak i dokładność obliczeń dla obu przedstawionych metod pomiaru jest taka sama. Szczególną uwagę zwraca się na metodę biegunową, możliwość wykorzystania jej dla obserwacji dowolnych budowli powłokowych w przypadku zastosowania do pomiaru odległości dalmierza nie wymagającego sygnalizacji punktów (np. DIOR 3002). Dysponując dalmierzem tego typu metoda biegunowa staje się bardzo efektywna, zaś liczba punktów obserwowanych może być znacznie zwiększona, praktycznie bez większego nakładu pracy.

Literatura

1. Cebula A., Cebula-Moll E.: Opracowanie metod obsługi geodezyjnej przy wznoszeniu zbiorników kulistych. Praca dyplomowa wykonana pod kierunkiem J. Gocała w oparciu o materiały uzyskane w OPGK Poznań.
2. Czaja J.: Uogólniona metoda wyznaczania położenia i kształtu budowli obrotowych o powierzchni stopnia drugiego. Geodezja i Kartografia. 3/84.
3. Forsythe G., Moller C.: Computer solution of linear algebraic system. 1967.
4. Gocał J.: Geodezyjne metody wyznaczania położenia i kształtu zbiorników stalowych. Geodezja i Kartografia. 2/89.
5. Korn G.A., Korn T.M.: Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów. PWN Warszawa 1983.
6. Mazurkiewicz Z., Nagórski R.: Powłoki obrotowe sprężyste. PWN Warszawa 1987.
7. Sieklucki K.: Geometria i topologia. Tom 53 cześć I. PWN Warszawa 1979.
8. Skórzyński A.: Wyrównanie układów obserwacyjnych prowadzących do wyznaczenia parametrów równań niektórych tworów geometrycznych płaskich i trójwymiarowych. Geod. i Kart. 4/68.
9. Wilkinson J.H.: Błędy zaokrągleń w procesach algebraicznych. PWN Warszawa 1967.

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Józef Czaja

Evaluation of Geometric State of Coat Objects in Relation to Any Surfaces of the Second Grade

Summary

The subjects of the paper is a method of finding the placement and the shape of coat objects in relation to any surfaces of the second grade or in relation to shape given by initial values of parameters. The algorithm of calculation given here is based on general equation of surface of the second grade. The solution of the approximation equations leads of calculation of the value of A_{ji} coefficients. The values allow determination of the placement and shape characteristics of the objects in question. There is a numeric example in the chapter 4 in order to visualise various ways of the geometric state of the object evaluation and to show the differences between assumed approximation models.