Edward Preweda *

APROKSYMACJA ŚRODKOWEJ POWIERZCHNI POWŁOK

1. Wprowadzenie

Cechą charakterystyczną powłok jest to, że w każdym ich punkcie co najmniej jedna z krzywizn dowolnych, ale prostopadłych do siebie kierunków jest różna od zera. Spośród bardzo dużej liczby typów powłok w praktyce najczęściej stosowane są powłoki cienkościenne. Są to przestrzenne konstrukcje, których grubość jest bardzo mała w porównaniu z pozostałymi wymiarami geometrycznymi, dzięki czemu odznaczają się wyjątkowo małym zużyciem materiałów konstrukcyjnych.

Powłoki pracują głównie na osiowe siły wewnętrzne działające w ich płaszczyźnie, natomiast odznaczają się dużą sztywnością na zginanie. Strefy powłok, w których siły wewnętrzne działają mimośrodowo względem środkowej powierzchni powłok są bardzo małe i ograniczają się do niewielkich stref przypodporowych, gdzie konstrukcja oparcia zazwyczaj nie pozwala na swobodne odkształcanie się powłok, głównie w kierunku prostopadłym do ich powierzchni.

Poszczególnym typom obiektów powłokowych, w zależności od przeznaczenia i rozmiarów, stawiane są indywidualne wymagania na etapie ich projektowania, realizacji oraz eksploatacji. Uwarunkowania te powinny być uwzględniane podczas obsługi geodezyjnej, prowadzonej w celach inwentaryzacyjnych czy diagnostycznych. Szczególną uwagę należy zwrócić na fakt, że konstrukcjom cienkościennym stawiany jest warunek zgodności ich powierzchni *środkowej* z powierzchnią określoną założeniami projektowymi. Grubość powłoki uzależniona jest od panujących w niej naprężeń i najczęściej nie jest stała dla całej powłoki.

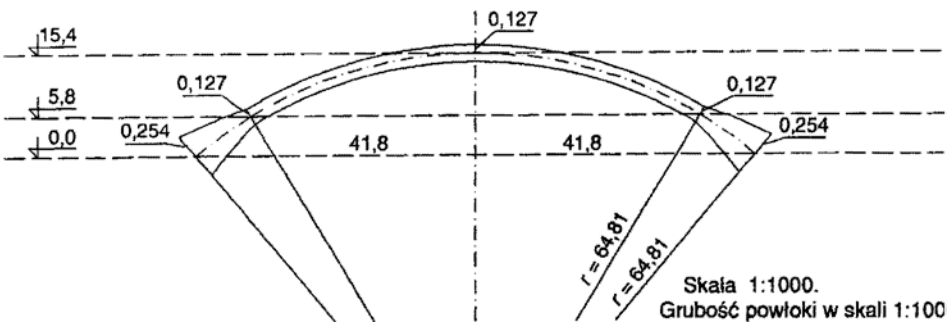
*Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska.

This paper should be cited as:
Preweda E.: Aproksymacja środkowej powierzchni powłok. Geodezja, T.3, AGH, Kraków, 1997

2. Typowe sposoby pogrubiania powłok

Do najstarszych form architektonicznych w budownictwie, wykorzystujących powierzchnie stopnia drugiego, należą kopuły. Dzięki rozwojowi technik obliczeniowych i produkcyjnych, kopuły również dzisiaj cieszą się powodzeniem w wielu krajach. Najczęściej stosowane są kopuły sferyczne, ale również projektuje się je na bazie elipsoidy trójosiowej i paraboloidy eliptycznej. Konstrukcje te realizowane są zarówno na planie kołowym, elipsoidalnym jak i prostokątnym.

Na rysunku 1 przedstawiono fragment przekroju pionowego kopuły hali sportowej w Montrealu. Średnica kopuły przy wieńcu podporowym wynosi 83,6 m, a strzałka wysokości 15,4 m. W środkowej części kopuła ma stałą grubość 12,7 cm, a począwszy od wysokości 5,8 m grubość zmienia się liniowo do 25,4 cm przy wieńcu.



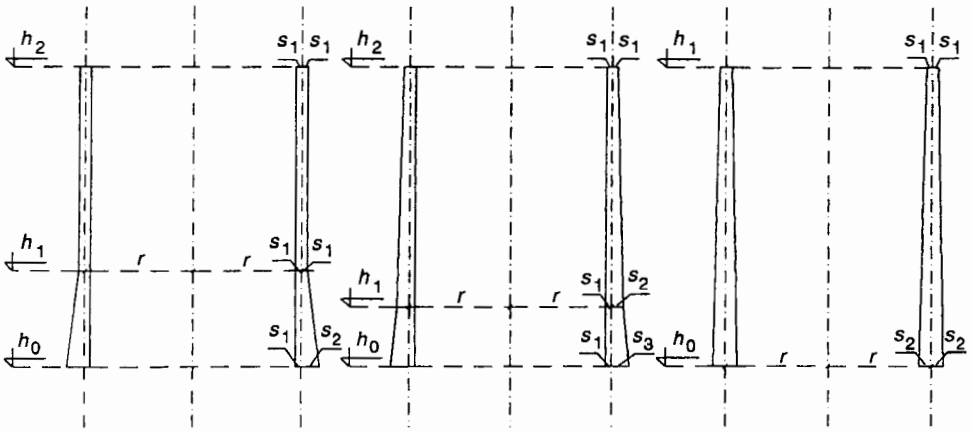
Rys. 1. Fragment przekroju pionowego kopuły żelbetowej

W przypadku powłok dwukrzywiznowych o jednakowym znaku krzywizn, wymiarowanie i konstruowanie sprowadza się najczęściej do określenia grubości powłoki i zbrojenia w jej części środkowej, w strefach wzdłuż jej krawędzi i strefach narożnikowych. Minimalną grubość powłoki oblicza się na podstawie wartości występującego obciążenia, przy czym w części środkowej powłoki te mają najczęściej stałą grubość rzędu 6..:;-10 cm. W strefie przedpodporowej, z uwagi na zaburzenia stanu błonowego, grubość zwiększa się liniowo do wartości rzędu 2..:;-2, 5 grubości, a w częściach narożnikowych grubość powłoki zwiększana jest do jeszcze większych wartości.

Do powłok łatwych w konstruowaniu należą paraboloidy hiperboliczne, które są powierzchniami dwuprostokreślnymi. Charakteryzują się one małymi naprężeniami, stąd nawet dla znacznych rozpiętości grubość takiej powłoki jest niewielka (najczęściej 5-8 cm). Dla niewielkich rozpiętości powłoki jej grubość jest stała, natomiast w przypadku większych rozpiętości powłoka jest pogrubiana wzdłuż elementów krawędzio-

wych (liniowe skosy o nachyleniu 1÷6 do 1÷10). Powłoki te wykonywane są jako pojedyncze lub złożone, zwykle jako konstrukcje monolityczne.

Znaczną grupę obiektów powłokowych stanowią zbiorniki do magazynowania cieczy. W przypadku zbiorników żelbetowych najczęściej spotykane są zbiorniki o kształtach brył obrotowych, o pionowej osi obrotu. W zależności od typu zbiornika, jego konstrukcję może tworzyć pojedyncza powłoka (np. walcowa) lub może to być konstrukcja złożona z kilku powłok (walcowych, kulistych, stożkowych) połączonych monolitycznie. Grubość ściany zbiornika ustala się w zależności od obciążenia i warunku szczelności. Najczęściej grubość ta zwiększa się liniowo od góry do dołu zbiornika. Na rysunku 2 przedstawiono schematycznie trzy spośród wielu stosowanych w praktyce rozwiązań pogrubiania powłok walcowych.

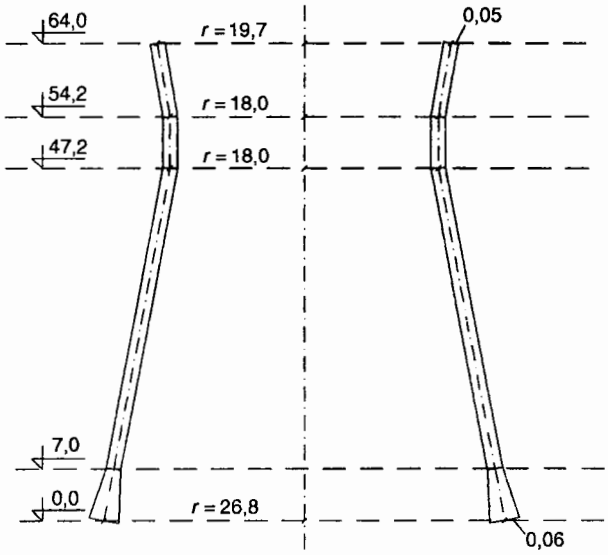


Rys. 2. Przykłady rozkładów grubości dla powłok walcowych

Z uwagi na specyfikę obciążeń, spośród konstrukcji powłokowych wyróżniają się budowle o charakterze wieżowym. Do tej grupy obiektów zaliczone są na przykład chłodnie kominowe i wentylatorowe, stosowane w wielu gałęziach przemysłu.

Kształt chłodni uzależniony jest często od jej projektowanych gabarytów. W przypadku chłodni kominowych najczęściej stosuje się kształt hiperboloidalny lub stożkowy. Interesującą konstrukcję mają chłodnie stożkowe, przedstawione na rysunku 3. Siły południkowe przenoszone są przez żebra pionowe, a w miejscach zmiany kształtu powłoki stosuje się również żebra poziome.

Wśród chłodni żelbetowych o większych rozmiarach najbardziej rozpowszechnione są chłodnie hiperboloidalne. O grubości powłoki i jej zbrojeniu decydują uwarunkowania konstrukcyjne. Najczęściej występują trzy lub cztery strefy o zróżnicowanej w sposób ciągły grubości. Planując technologię prac geodezyjnych, zmierzających do wyznaczenia geometrii chłodni, szczególną uwagę należy zwrócić na duże pogrubienie powłoki w jej dolnej części. Dla przejęcia naprężeń wokół otworu pogrubiana jest



Rys. 3. Fragment przekroju pionowego chłodni stożkowej

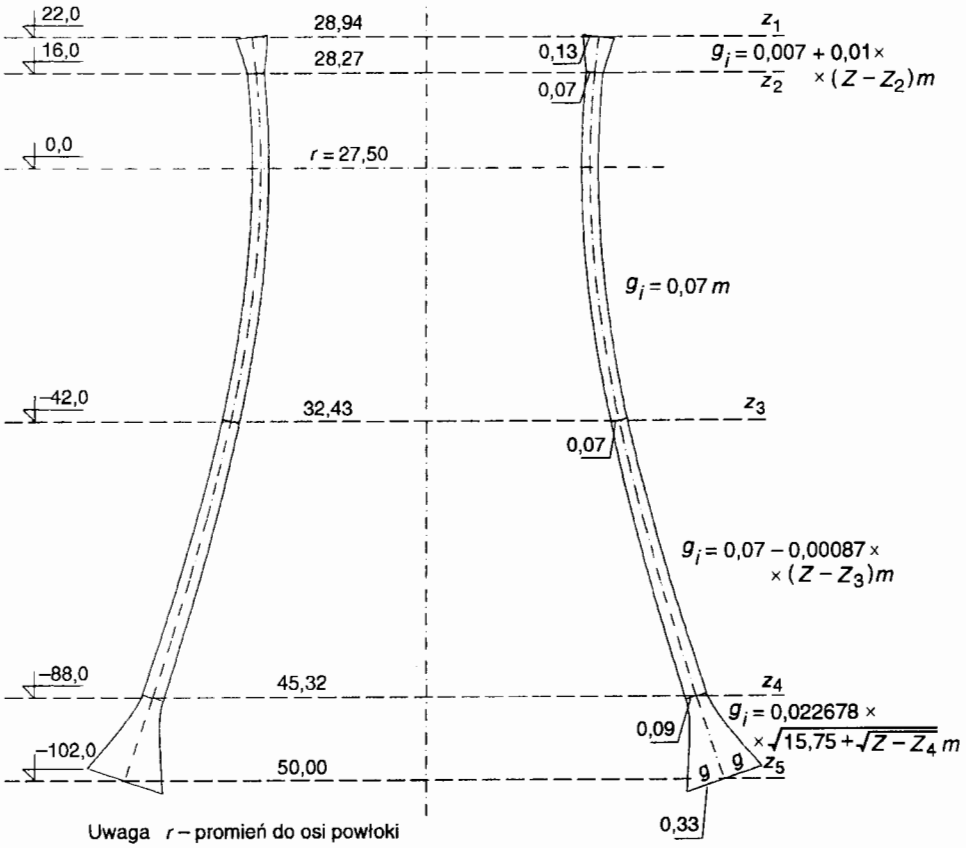
znacznie również górna część powłoki. Na rysunku 4 przedstawiono rozkład grubości powłoki dla chłodni hiperboloidalnych, położonych na terenie Elektrowni Bełchatów.

Dodatkowe informacje przydatne przy wyznaczaniu geometrii obiektów powłokowych, takie jak informacje o strefach szczególnie zagrożonych czy sposobach pogrubiania zrealizowanych budowli, znaleźć można m.in. w pracach [1], [2], [3], [4].

3. Wyznaczenie powierzchni środkowej

Fizyczne powierzchnie powłokowe można aproksymować za pomocą równania powierzchni stopnia drugiego lub za pomocą płatów powierzchniowych. Tak otrzymany model matematyczny może stanowić powierzchnię odniesienia dla szczegółowego badania kształtu powierzchni obserwowanej. Z uwagi na możliwość dużego zróżnicowania grubości powłoki kontrolowanego obiektu, parametry położenia i kształtu, uzyskane na podstawie współrzędnych punktów położonych na powierzchni zewnętrznej lub wewnętrznej, nie mogą być odnoszone bezpośrednio do powierzchni środkowej. Ponieważ podstawą analiz prowadzonych przez projektantów i konstruktorów budowli powłokowych jest powierzchnia środkowa powłoki, celowe jest opracowanie algorytmu umożliwiającego badanie kształtu względem takiej właśnie powierzchni.

W pracy proponuje się metodę dwuetapową, polegającą na zredukowaniu współrzędnych punktów obserwowanych do powierzchni środkowej obiektu i aproksy-



Rys. 4. Rozkład grubości powłoki chłodni hiperboloidalnych Elektrowni Bełchatów

macji ostatecznego modelu matematycznego dopiero na podstawie zredukowanych współrzędnych.

Jak wiadomo, grubość powłoki określana jest wzdłuż wektora normalnego do powierzchni środkowej. Przez g_i oznaczmy połowę grubości powłoki i rozłóżmy g_i na składowe $g_i = [g_{x_i}, g_{y_i}, g_{z_i}]$ wzdłuż kierunków składowych wektora normalnego $N = [N_{x_i}, N_{y_i}, N_{z_i}]$ do powierzchni środkowej w punkcie P_i. Współrzędne $[x, y, z]$ punktów obserwowanych możemy przetransformować na współrzędne odpowiadających im punktów powierzchni środkowej $[x_s, y_s, z_s]$ według zależności

$$[x_s, y_s, z_s] = [x, y, z] + [\pm g_x, \pm g_y, \pm g_z] \tag{1}$$

Znak „±" w powyższym wzorze uzależniony jest od typu powłoki, od tego, którą z powierzchni (zewnętrzną czy wewnętrzną) obserwowano, oraz od przyjętego układu współrzędnych.

Składowe wektora $g_i = [g_{x_i}, g_{y_i}, g_{z_i}]$ wyznaczymy na podstawie związku

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} = p\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} \tag{2}$$

stąd

$$g_x = pN_x, g_y = pN_y, g_z = pN_z. \tag{3}$$

Wektor normalny do powierzchni w punkcie P_i ma postać

$$\boldsymbol{N}_i = \begin{bmatrix} N_{x_i} = 2(x_i + y_i b_{12} + z_i b_{13} + b_{14}) \\ N_{y_i} = 2(x_i b_{12} + y_i b_{22} + z_i b_{23} + b_{24}) \\ N_{z_i} = 2(x_i b_{31} + y_i b_{32} + z_i b_{33} + b_{34}) \end{bmatrix} \tag{4}$$

gdzie b_{ij} to przybliżone parametry równania powierzchni środkowej powłoki.

Parametr p wyznaczymy przekształcając wzór (2)

$$p = \frac{g}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}}$$

Aby zrealizować zależności (3) należy jeszcze ustalić znaki dla składowych wektora g. Pomocna będzie przy tym transformacja współrzędnych obserwowanych punktów reprezentujących powłokę na układ związany z kierunkami osi głównych danej powierzchni. Często wystarcza liniowa transformacja do środka aproksymowanej powierzchni. Po takiej transformacji, na przykład dla chłodni hiperboloidalnych, poszczególne składowe wektora $g(g_x, g_y, g_z)$ będą miały znak „+" jeśli obserwowano powierzchnię zewnętrzną, a znak „−" jeśli obserwowano jej wewnętrzną powierzchnię.

Zastosowanie powyższego algorytmu w praktyce wymaga znajomości grubości powłoki oraz określenia przybliżonych parametrów powierzchni środkowej.

Cechy geometryczne obiektów powinny być określone w dokumentacji konstrukcyjnej lub technologicznej. Na podstawie danych projektowych lub dokumentacji z powykonawczych pomiarów kontrolnych powinno się również określać rozkład grubości powłoki. Niestety, często brak jest informacji o parametrach projektowych konstrukcji, a materiały z pomiarów powykonawczych są dość skąpe w potrzebne nam informacje. W takich przypadkach rozkład grubości powłoki należy aproksymować na bazie ogólnie znanych zasad pogrubiania danego typu powłok, popartych kontrolnymi pomiarami grubości. W przypadku modelowania grubości na podstawie jej bezpośrednich pomiarów, konieczne będzie prowadzenie aproksymacji lokalnych wewnątrz poszczególnych stref zróżnicowanej grubości powłoki. Ponieważ ścisłe gra-

nice stref mogą być nieznane, konieczne okazać się może wyznaczanie grubości drogą kolejnych przybliżeń.

Drugim problemem jest wyznaczenie przybliżonych parametrów powierzchni środkowej. Parametry te należy wyznaczyć na tyle dokładnie, aby kierunki wektorów normalnych nie odbiegały znacząco od nieznanych kierunków rzeczywistych tych wektorów. W przypadku stałej grubości powłoki lub jej niewielkiego zróżnicowania, za przybliżone parametry powierzchni środkowej można przyjąć współczynniki otrzymane na podstawie aproksymacji globalnej powierzchni obserwowanej. Inaczej jednak należy postępować, jeżeli grubość powłoki zmienia się gwałtownie. Taka sytuacja występuje między innymi w przypadku chłodni hiperboloidalnych. Ponieważ są to obiekty często w praktyce obserwowane, ustalimy sposób postępowania dla tych właśnie obiektów. Analogicznie można postępować w przypadku innych budowli powłokowych.

W przypadku chłodni hiperboloidalnych znane są generalne zasady pogrubiania powłoki w zależności od jej rozmiarów. Zasady te wykorzystamy do prowadzenia aproksymacji lokalnych, pozwalających w efekcie końcowym na określenie z dużym prawdopodobieństwem teoretycznej powierzchni środkowej. Charakterystyczną cechą chłodni hiperboloidalnych jest możliwość wydzielenia kilku stref, wewnątrz których rozkład grubości można aproksymować różnymi funkcjami, właściwymi danej strefie. W przypadku sześciu chłodni położonych na terenie Elektrowni Bełchatów podział na strefy i równania opisujące rozkład grubości można ustalić na bazie danych projektowych (rys. 4).

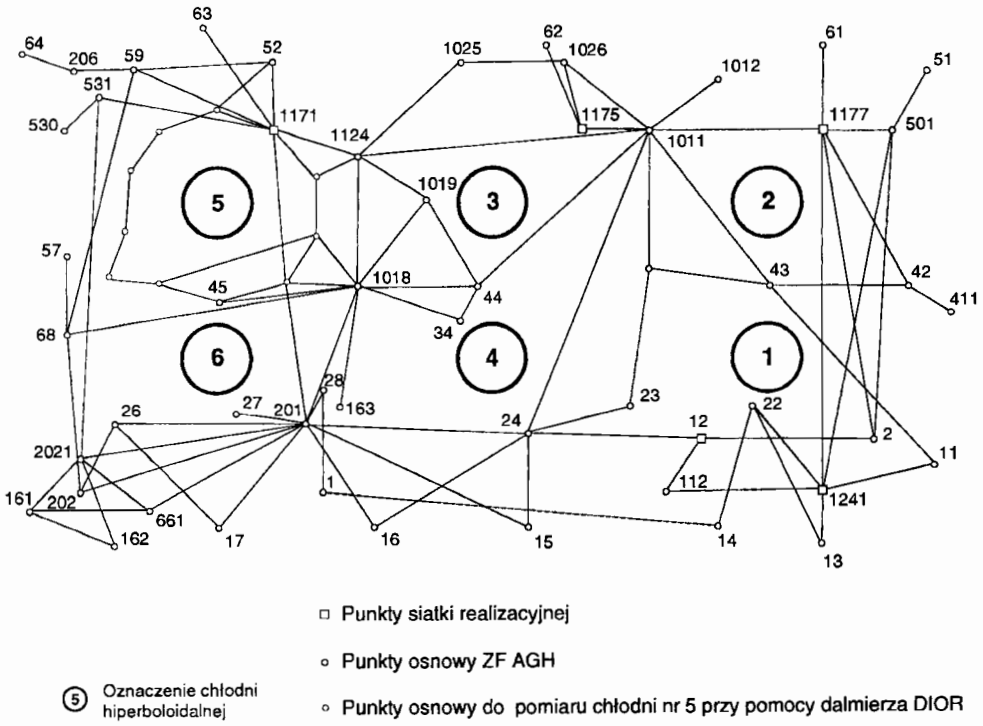
Uwagę zwraca bardzo duża różnica w grubości dolnej części chłodni (funkcja grubości w zależności od wysokości jest hiperbolą). Znacznie pogrubiona jest też część wokół otworu górnego. Jedna ze stref charakteryzuje się stałą grubością powłoki, a w jednej liniowe zróżnicowanie jest stosunkowo niewielkie. Aby oszacować przybliżone parametry środkowej powierzchni można, na podstawie punktów przynależnych do wybranej strefy, wyznaczyć parametry lokalnych powierzchni modelowych. Parametry te posłużą do redukcji współrzędnych punktów o połowę grubości powłoki, w kierunku normalnych do lokalnych powłok modelowych. Kolejna aproksymacja globalna, bazująca na zredukowanych współrzędnych, pozwoli na wyznaczenie przybliżonych parametrów powierzchni środkowej obiektu.

Ponieważ przybliżone parametry powierzchni potrzebne nam są jedynie do określenia składowych wektora normalnego do powierzchni, zadanie można nieco uprościć. Zauważmy, że wektory normalne do powierzchni środkowej pokrywają się w przybliżeniu z wektorami normalnymi do części powłoki o stałej grubości. Podobnie jest w przypadku drugiej strefy, gdzie grubość zmienia się liniowo o wartości nie mające znaczenia dla wyznaczenia kierunków normalnych. Można zatem, zamiast kilku aproksymacji lokalnych w poszczególnych strefach, przeprowadzić jedną aproksymację opartą o punkty położone w strefie drugiej i trzeciej. Tak uzyskane parametry powierzchni są wystarczająco dobrym przybliżeniem parametrów teoretycznej powierzchni środkowej.

Wzdłuż kierunków normalnych do powierzchni środkowej (jednej lub kilku) należy zredukować ostatecznie współrzędne wszystkich obserwowanych punktów o grubość odpowiadającą położeniu danego punktu na obiekcie. Zredukowane współrzędne stanowią podstawę estymacji parametrów położenia i kształtu obiektu.

4. Weryfikacja algorytmu na przykładzie chłodni hiperboloidalnej

Algorytm przedstawiony w punkcie 3 zweryfikowano na przykładzie hiperboloidalnych chłodni jednopowłokowych, położonych na terenie Elektrowni Bełchatów (rys. 5). W niniejszej pracy przedstawiono wyniki dla chłodni numer 5. Wyniki te wyraźnie uwidaczniają różnice pomiędzy aproksymacją powierzchni zewnętrznej i powierzchni środkowej obiektu.



Rys. 5. Fragment szkicu osnowy geodezyjnej Elektrowni Bełchatów z naniesionym położeniem chłodni hiperboloidalnych

Aproksymację powierzchni prowadzono na podstawie wyników obserwacji punktów rozmieszczonych równomiernie na zewnętrznej powierzchni chłodni.

Redukcję współrzędnych punktów reprezentujących powierzchnię zewnętrzną wykonano na podstawie parametrów powierzchni otrzymanych z aproksymacji lokalnej w dwóch środkowych strefach zróżnicowania grubości powłoki. Grubość tę określono na bazie danych projektowych.

Geometrię obiektu wyznaczono względem swobodnej hiperboloidy jednopowłokowej. Aproksymowane parametry geometryczne powłoki zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1

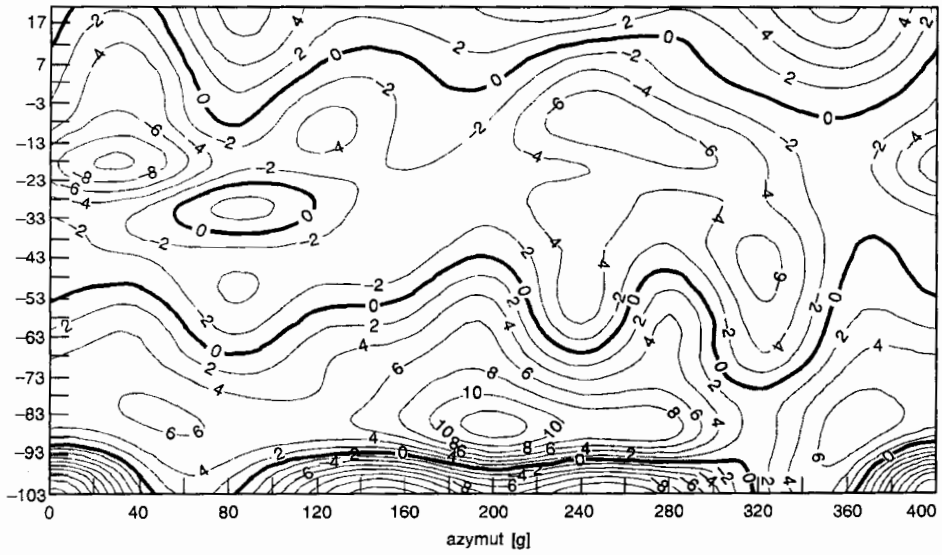
Parametry aproksymowanej powierzchni	Powierzchnia aproksymowana	
	zewnętrzna	środkowa
x_o [m]	46050,716	46050,705
y_o [m]	57935,040	57935,040
z_o [m]	303,157	303,573
a [m]	27,589	27,517
b [m]	27,556	27,449
c	66,965	66,448
$\varphi[c]$	2,36	0,83
$Az_\varphi[g]$	376,33	359,48
$Az_a[g]$	24,34	22,30
σ	6,04	3,59

Oznaczenia:

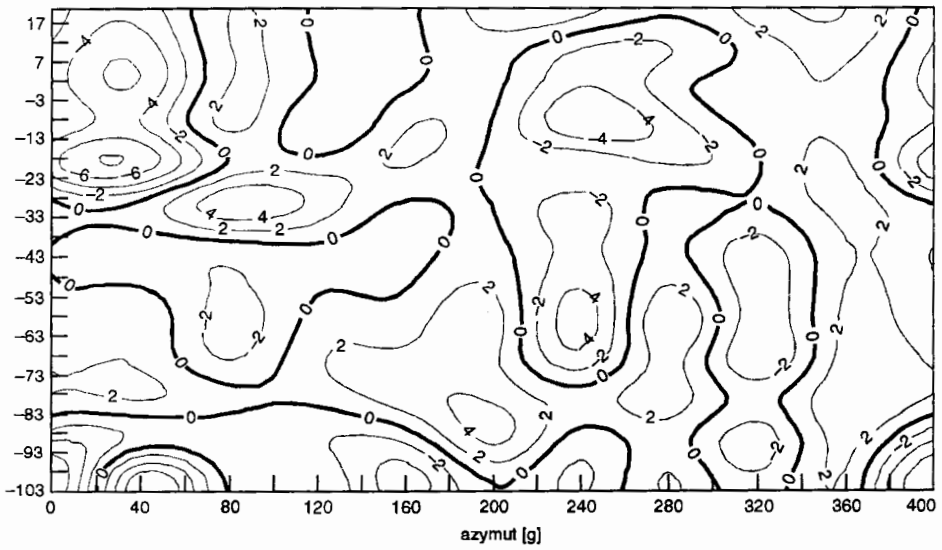
x_o, y_o, z_o – współrzędne środka symetrii,
a, b, c – wymiary półosi głównych,
φ – wychylenie osi głównej względem linii pionu,
Az_φ – azymut wychylenia osi głównej,
Az_a – azymut półosi a,
σ – miara dopasowania modelu do aproksymowanej powierzchni.

Model dyskretny odchyłek kształtu utworzono korzystając z dwuwymiarowych funkcji sklejanych trzeciego stopnia. Dla zobrazowania różnicy pomiędzy geometrią powierzchni zewnętrznej i środkowej na rysunkach 6 i 7 przedstawiono mapy zmian geometrycznych obydwóch powierzchni. Izolinie na tych mapach poprowadzono w odstępach dwucentymetrowych. Rysunki 8 i 9 zawierają widoki 3D tych powierzchni.

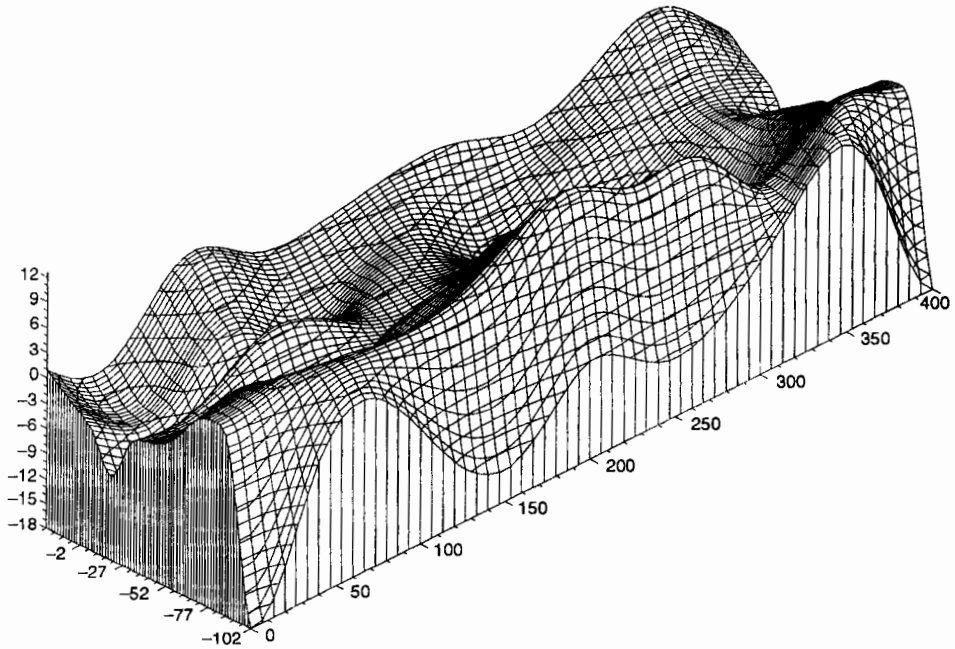
Analizując powyższe obrazy geometrii powłoki można stwierdzić, że różnica pomiędzy modelami powierzchni zewnętrznej i środkowej jest bardzo duża. Utożsamianie ze sobą tych powierzchni prowadzi, w przedstawionym przykładzie, do bardzo poważnych błędów w sensie interpretacji wyników pod względem konstrukcyjnym.



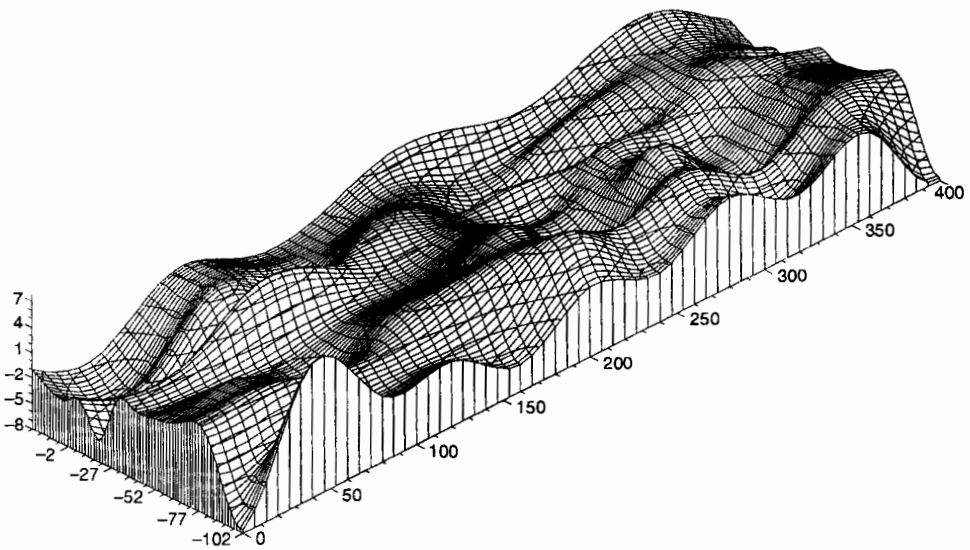
Rys. 6. Mapa zmian geometrycznych powierzchni zewnętrznej chłodni hiperboloidalnej nr 5



Rys. 7. Mapa zmian geometrycznych powierzchni środkowej chłodni hiperboloidalnej nr 5



Rys. 8. Widok 3D zmian geometrycznych zewnętrznej powierzchni chłodni nr 5



Rys. 9. Widok 3D zmian geometrycznych środkowej powierzchni chłodni nr 5

References

[1] Centkowski J. : Grubość powłoki żelbetowej chłodni kominowej. Konferencja Naukowo-Techniczna "Problemy trwałości żelbetowych chłodni kominowych. Instytut Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, Wrocław-Bogatynia 1989

[2] Centkowski J. : Dobór grubości hiperboloidalnej chłodni kominowej. Inżynieria i Budownictwo, Nr 6, Warszawa 1993

[3] Majde A. : Konwersatorium "Metody pomiarów chłodni kominowych", Przebieg, problemy, wnioski, Przegląd Geodezyjny Nr 10, Warszawa 1991

[4] Menyhárd I. : Konstrukcje powłokowe. Arkady, Warszawa 1971

[5] Preweda E.: System pomiaru, obliczeń i wizualizacji zmian geometrycznych obiektów powłokowych powierzchni stopnia drugiego. Rozprawa doktorska, AGH, Kraków, 1994

[6] Przewłocki S. : Procesy metrologiczne w projektowaniu, wykonawstwie i eksploatacji budowli,

[7] Przegląd budowlany Nr 5, Warszawa 1988

Recenzent:
prof dr hab. inż. Józef Czaja

Edward Preweda

APROKSYMACJA ŚRODKOWEJ POWIERZCHNI POWŁOK

Streszczenie

Konstrukcjom cienkościennym stawiany jest warunek zgodności ich powierzchni środkowej z powierzchnią określoną założeniami projektowymi. Grubość powłoki uzależniona jest od panujących w niej naprężeń i najczęściej nie jest stała dla całej powłoki. W pracy przedstawiono algorytm badania kształtu powłok uwzględniający powyższe uwarunkowania. Weryfikacja algorytmu na przykładzie hiperboloidalnych chłodni jednopowłokowych wyraźnie uwidacznia różnice pomiędzy aproksymacją powierzchni zewnętrznej i powierzchni środkowej obiektu.

Edward Preweda

APPROXIMATION OF MIDDLE SHEET SURFACE

Summary

For thin-walled contruction it is required that its middle surface should be consistent with a surface established by brief foredesign. The sheet thickness depends on stresses inside it and normally is not uniform for the whole sheet. In this paper an algorithm for study of sheet shape considering conditions mentioned above is presented. Verification of this algorithm on an example of the hyperboloid of one sheet coolers clearly indicates differences between approximation of the outer and middle surfaces of the object.