

Edward Preweda \*

MODELOWANIE INFORMACJI O OBIEKTACH INŻNIERSKICH  
W ASPEKTCIE WYZNACZENIA PRZEMIESZCZEŃ I ODKSZTAŁCEŃ

---

## 1. Wprowadzenie

Badanie złożonych układów, zjawisk i procesów w różnych dziedzinach nauki i techniki wymaga stosowania modeli stanowiących uproszczone odwzorowanie rzeczywistości. Formułowane modele przedstawiają związki zachodzące w analizowanych procesach, uwzględniając przy tym najistotniejsze czynniki główne określające zmienność opisywanego zjawiska, pomijając mniej ważne czynniki uboczne. Większość badanych zjawisk ma mocno skomplikowaną strukturę. Na działanie czynników głównych nakłada się wpływ czynników ubocznych oraz losowych. Mogą zachodzić również procesy nieprzewidziane, określane mianem chaosu, których wpływ wywołuje mniejszą lub większą nieprzewidywalność zachowania się modelowanego systemu. Rodzaj niepewności rejestrowanych czynników narzuca określone podejście w modelowaniu złożoności struktury. Niepewność dotycząca występowania jakiegoś wydarzenia, które samo jest precyzyjnie zdefiniowane, narzuca podejście stochastyczne, pozwalające odnajdywać optymalne rozwiązania problemów.

Dzięki wykorzystaniu najnowszej technologii informacyjno-pomiarowej modelowanie pozwala rozwiązać wiele problemów inżynierskich, minimalizując przy tym koszt i czas realizacji przedsięwzięcia. Obecnie na każdym etapie procesu modelowania wykorzystuje się technikę komputerową, począwszy od gromadzenia danych, ich filtracji, grupowania, poprzez proces konstrukcji modelu do uzyskania modelu spełniającego założone kryteria, późniejszą jego estymację dla nowo pozyskiwanych informacji oraz predykcję wartości modelowych przy ustalonych wartościach zmiennych objaśniających.

Opracowanie uniwersalnego systemu komputerowego, który mógłby służyć do modelowania większej liczby zjawisk współtworzących System Informacji o Terenie, jest praktycznie niemożliwe. Trudności projektowe pojawiają się już na etapie zbierania danych i ich umieszczenia w bazie danych, następnie na etapie odfiltrowywania odstających obserwacji

---

\* Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska, Katedra Informacji o Terenie

oraz badania wpływu takiego postępowania na uzyskane rozwiązanie. Jedną z większych trudności sprawia estymacja parametrów modeli. Największe problemy pojawiają się przy estymacji parametrów strukturalnych dla modeli nieliniowych. Wśród znanych mi metod estymacji nie ma jednak takiej, która radziłaby sobie z każdym modelem nieliniowym bez ingerencji badacza. Konieczna jest dodatkowa wiedza umożliwiająca z ciągu otrzymanych rozwiązań wybrać najlepiej pasujące do treści rozwiązywanego zadania z oczekiwanymi własnościami fizycznymi. Wiedzy tej nie da się pozyskać w sposób zautomatyzowany, można ją jedynie uzyskać w oparciu o szczegółowe analizy i ich odniesienie do rzeczywistych, spodziewanych wartości. Na podstawie takich analiz można też stwierdzić, że w przypadku wielu zjawisk współtworzących SIT model nieliniowy można z powodzeniem zastąpić modelem liniowym. Ponadto, jeśli model ten będzie modelem uogólnionym i elastycznym, to pomimo dużego zróżnicowania merytorycznego badanych procesów może być dla wielu z nich wspólny. Proces estymacji parametrów może przebiegać według tych samych algorytmów matematycznych i tych samych procedur numerycznych. Taką uniwersalną funkcję w dużym stopniu spełnia model przedstawiony w niniejszej pracy.

W dotychczasowych zastosowaniach geodezyjnych wykorzystuje się różne procedury estymacji liniowej, które wynikają z postaci układów równań wiążących obserwacje. Model sformułowany przez autora może być z powodzeniem stosowany do badania zjawisk zmieniających się w czasie, analizy procesów dynamicznych, o ile zostaną wprowadzone obserwacje fizyczne, związane na przykład z przyczynami występowania deformacji obiektów inżynierskich, lub upraszczany do modeli, które odpowiadają dotychczas stosowanym algorytmom w modelowaniu wyników obserwacji. Prezentowany model uwzględnia możliwość nakładania restrykcji wynikających z charakteru badanego zjawiska - typowym przykładem takich restrykcji w geodezji są warunki ciągłości przemieszczeń i odkształceń. W przypadku wielu procesów trudno jest ustalić model, który w najlepszym stopniu będzie wyjaśniał zmienność analizowanego zjawiska oraz to, które zmienne powinny mieć charakter losowy, a które charakter deterministyczny. Cenną cechą przedstawianego modelu jest możliwość rozdzielenia tych zmiennych i łatwy podział równań na część probabilistyczną i deterministyczną.

W ramach grantu „Estymacja punktowa i przedziałowa stanu przemieszczeń i odkształceń obiektów inżynierskich na podstawie pomiarów geodezyjnych” (KBN nr 9 S 605 015 06) kierowanego przez prof. J. Czaję, którego autor był współwykonawcą, opracowane zostały algorytmy rozwiązania modelu bazującego na odwrotności macierzy blokowej  $3 \times 3$ . Praktyka wykazała, że warto pójść dalej i opracować model, który nie wymaga uzmienniania parametrów. Koncepcję estymacji parametrów modelu uogólnionego autor rozwijał w ramach badań własnych, prowadzonych w latach 1993-2002 oraz indywidualnego grantu „Kinematyczny model przemieszczeń i odkształceń obiektów inżynierskich” (KBN nr 9 T12E 028 14, 1998-1999). Zagadnienia pokrewne, dotyczące zastosowania statystyki w modelach liniowych, autor prowadził w ramach współpracy z przemysłem oraz projektu celowego „Nowe technologie budowy kadłubów okrętowych wymuszające skrócenie cykli budowy i podwyższające wymogi jakościowe” (KBN nr 9 9286 93 c/1430, Stocznia Szczecińska S.A., Szczecin 1996-1997), gdzie zajmował się uogólnieniem modelu do postaci dynamicznej, dla potrzeb wyznaczania deformacji przestrzennych sekcji okrętowych. Od roku 1993 autorska koncepcja wyznaczania przemieszczeń i odkształceń obiektów inżynierskich jest z powodze-

niem wdrażana do praktyki geodezyjnej. Szczegółowe rozważania na temat modelu uogólnionego autor przedstawił w [11]. W niniejszej publikacji, podsumowującej 10-letni okres badań, przedstawiono najważniejsze cechy modelu uogólnionego oraz przykłady ilustrujące możliwości jego zastosowania w praktyce geodezyjnej.

## 2. Uogólniony model liniowy

Układ równań liniowych można zapisać w ogólnej postaci macierzowej

$$Fz = g \quad (1)$$

gdzie:

- F - macierz współczynników stanowiących wartości pierwszych pochodnych dla przybliżonych wartości estymowanych parametrów modelu,
- z - macierz niewiadomych stanowiących odchyłki losowe lub przyrosty do przybliżonych wartości estymowanych parametrów modelu,
- g - wektor wyrazów wolnych, wynikający z zaobserwowanych wartości zmiennych losowych i przybliżonych wartości estymowanych parametrów modelu.

Rozwiązanie układu (1) może być formułowane dla różnych warunków brzegowych, wynikających ze specyfiki rozważanego zagadnienia. Warunki brzegowe będą prowadziły do pionowego lub poziomego podziału układu równań (1), a w konsekwencji - do układów równań blokowych.

Dla pionowego podziału układu równań (1) można na część niewiadomych  $v$  narzucić warunek Gaussa-Markowa, a pozostałą część niewiadomych  $x$  potraktować jako parametry modelu. Wtedy taki układ równań może być zapisany w postaci blokowej

$$[CA] \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} = u \quad (2)$$

co jest równoważne układowi równań

$$Cv + Ax = u \quad (3)$$

przy czym  $v$  oznacza wektor odchyłek losowych, zaś  $x$  oznacza wektor parametrów analizowanego modelu.

Dla poziomego podziału układu równań (1) wykorzystamy postać (2), w której na wartości parametrów modelu narzucamy restrykcje postaci

$$Bx = w \quad (4)$$

Uwzględniając powyższy warunek, układ równań (2) może być zapisany w formie blokowej

$$\begin{bmatrix} C & A \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad (5)$$

gdzie:

- C** – macierz współczynników przy wektorze odchyłek losowych **v**,
- v** – wektor odchyłek losowych w modelu probabilistycznym,
- A** – macierz współczynników przy estymowanym wektorze parametrów modelu (**x**) w części probabilistycznej,
- x** – wektor niewiadomych, czyli estymowanych parametrów występujących w modelu probabilistycznym i w modelu deterministycznym,
- u** – wektor wyrazów wolnych w części probabilistycznej modelu,
- B** – macierz współczynników przy estymowanym wektorze parametrów **x** w modelu deterministycznym,
- w** – wektor wyrazów wolnych w modelu deterministycznym.

Podział poziomy układu równań (1) zawarty w postaci (5) może wynikać z warunków brzegowych, w których górna część równań powinna spełniać model probabilistyczny, zaś dolna część równań powinna spełniać model deterministyczny.

Zgodnie z zasadą metody najmniejszych kwadratów estymatory nieobciążone układu równań (5) muszą spełniać warunki Gaussa–Markowa wynikające z formy kwadratowej zapisanej za pomocą funkcji Lagrange’a, która ma następującą postać

$$\psi^2 = \min_{\hat{\mathbf{w}} \cap \mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{w}} \{(\mathbf{t} - \hat{\mathbf{t}})^T \text{Cov}(\mathbf{t})^{-1} (\mathbf{t} - \hat{\mathbf{t}}) + 2\mathbf{k}^T [\mathbf{C}(\mathbf{t} - \hat{\mathbf{t}}) + \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{u}]\} \quad (6)$$

lub

$$\psi^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{P}\mathbf{v} + 2\mathbf{k}^T (\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{u}) + 2\mathbf{j}^T (\mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{w}) = \min \quad (7)$$

gdzie:

- t** – wektor wielkości obserwowanych czyli zmiennej losowej,
- t̂** – wektor wartości modelowych wektora **t**,
- v** – wektor odchyłek losowych w modelu,  $\mathbf{v} = \mathbf{t} - \hat{\mathbf{t}}$ , o wartości oczekiwanej  $E(\mathbf{v}) = 0$ ,
- Cov(t)** – macierz wariacyjno-kowariancyjna dla wielkości obserwowanych,
- P** – nieosobliwa macierz wagowa odpowiadająca odwrotności macierzy kowariancji,
- j, k** – wektory współczynników Lagrange’a,
- C** – macierz współczynników przy wektorze zmiennej losowej, wynikająca z warunków nałożonych na wektor obserwacji **t**,
- x** – wektor estymowanych parametrów modelu, występujący w części probabilistycznej i części deterministycznej,
- A** – macierz współczynników przy estymowanym wektorze parametrów **x** (w części probabilistycznej), wynikająca z funkcji wiążących wektor obserwacji **t̂** z parametrami modelu **x** przy uwzględnieniu **C**,
- u** – wielkości definiujące warunki funkcyjne  $\mathbf{C}(\mathbf{t} - \hat{\mathbf{t}}) + \mathbf{A}\mathbf{x}$  nałożone na wektor **t̂**,
- B** – macierz współczynników wynikająca z warunków funkcyjnych nałożonych tylko na parametry **x** (czyli wynikająca z charakteru badanego zjawiska, np. z warunków zgodności odkształceń),
- w** – wektor wyrazów wolnych w części deterministycznej.

Miarą dopasowania estymowanego modelu do wyników pomiaru jest statystyka F-Snedecora, która może być zapisana według formuły

$$F_s = \frac{R^2}{1-R^2} \frac{n}{n-u} \quad (72)$$

Pierwszy ułamek w tym wzorze określa stosunek sumy kwadratów odchyłek losowych z części wyjaśnionej przez model do sumy kwadratów odchyłek losowych z części nie wyjaśnionej przez model, zaś drugi ułamek określa stopnie swobody.

Na ustalonym poziomie istotności  $\alpha$  można weryfikować hipotezę statystyczną, czy estymowany model w sposób zadowalający wyjaśnia (aproksymuje) analizowane zjawisko. W tym celu, dla ustalonego poziomu ufności  $(1 - \alpha)$  oraz  $(n - u)$  i  $(n)$  stopni swobody, należy określić kwantyl  $F(1 - \alpha, n - u, n)$  rozkładu F-Snedecora.

Jeżeli nierówność

$$F_s > F(1 - \alpha, n - u, n) \quad (73)$$

dla estymowanego modelu jest spełniona, to oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy. Na podstawie tej weryfikacji można wnioskować, że na przyjętym poziomie ufności estymowany model w sposób zadowalający aproksymuje analizowane zjawisko.

## 5. Praktyczne zastosowania modelu uogólnionego

Informacji o stanie geometrycznym obiektów inżynierskich dostarczają pomiary geodezyjne, najczęściej wyniki pomiarów powykonawczych i inwentaryzacyjnych. Pozwalają one na opisanie według przyjętego modelu aktualnej geometrii obiektu oraz wyznaczenie zmian zachodzących w czasie, czyli przemieszczeń, odkształceń oraz ich pochodnych. Skuteczne możliwości aktualizowania informacji, dokumentowania przebiegu zjawisk i opisu ruchu stwarza technika komputerowa. Korzystając z tych możliwości, autor opracował aplikacje pozwalające na gromadzenie i przetwarzanie informacji o stanie geometrycznym różnych obiektów. Bazy danych obejmują dane opisowe i geometryczne, z uwzględnieniem przestrzennej lokalizacji danych. Zasadniczym elementem aplikacji jest uogólniony model liniowy, dostosowany do konkretnych zadań.

### Zastosowanie modelu uogólnionego do wyznaczenia geometrii obiektów powłokowych

Wyznaczanie cech geometrycznych obiektów powłokowych jest jednym z podstawowych sposobów pozyskiwania informacji o ich stanie i funkcjonowaniu. Opracowane wyniki pomiarów sprawdzających i inwentaryzacyjnych wykorzystywane są zarówno w celach profilaktycznych diagnostycznych jak i badawczych. Przede wszystkim pomocne są przy podejmowaniu działań związanych z zapewnieniem warunków bezpiecznej pracy i prawidłowego funkcjonowania obiektów oraz przy rozpoznawaniu ewentualnych przyczyn występowania ich deformacji.

Podstawą określania parametrów geometrycznych są wyniki okresowych obserwacji geodezyjnych lub fotogrametrycznych zbioru punktów reprezentujących powłokę.

Równanie ogólne powierzchni stopnia drugiego ma postać:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + \\ & + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + \\ & + a_{33}z^2 + 2a_{34}z + \\ & + a_{44} = 0, \end{aligned}$$

lub po wyeliminowaniu jednej niewiadomej

$$\begin{aligned} G(x, y, z) = & x^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{14}x + \\ & + b_{22}y^2 + 2b_{23}yz + 2b_{24}y + \\ & + b_{33}z^2 + 2b_{34}z + \\ & + b_{44} = 0, \end{aligned} \tag{74}$$

przy czym

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{11}} \quad (b_{11} = 1).$$

Wartości parametrów  $b_{ij}$  równania powierzchni określa się na podstawie współrzędnych  $x, y, z$  punktów reprezentujących powłokę obiektu.

Po przekształceniu równania powierzchni na postać kanoniczną poprzez obrót osi współrzędnych w taki sposób, aby każda z nowych osi była skierowana wzdłuż jednej z osi głównych, oraz przesunięcie początku układu współrzędnych do środka kwadrki można określić typ powierzchni oraz wymiary jej płośi głównych. Kierunki normalnych do płaszczyzn drugiego stopnia, a tym samym kierunki osi głównych, pokrywają się z kierunkami wektorów własnych macierzy utworzonej ze współczynników charakterystycznej formy kwadratowej równania powierzchni

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}.$$

Mając na uwadze powyższą własność, ortogonalne przekształcenie formy (75) wykonuje się korzystając z pierwiastków  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  równania charakterystycznego utworzonego ze współczynników  $b_{ij}$ . Macierz  $\xi$  jest kwadratowa i symetryczna, ma więc trzy wartości własne, wynikające z warunku:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{75}$$

Rozwijając wyznacznik (75) względem wartości własnych otrzymujemy:

$$\lambda^3 - (1 + b_{22} + b_{33})\lambda^2 + (b_{22} + b_{33} + b_{22}b_{33} - b_{12}^2 - b_{13}^2 - b_{23}^2)\lambda - \det[\xi] = 0,$$

lub

$$\lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda - K = 0.$$

Korzystając z obliczonych pierwiastków charakterystycznych  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  równanie powierzchni można przedstawić w postaci kanonicznej. Jeżeli niezmiennik  $K \neq 0$  (powierzchnie centralne), wówczas

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{L}{K} = 0 \tag{76}$$

natomiast dla  $K = 0, J \neq 0$  poprzez obrót i przesunięcie układu prostokątnego równanie powierzchni możemy sprowadzić do postaci

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{\frac{L}{J}} z = 0 \tag{77}$$

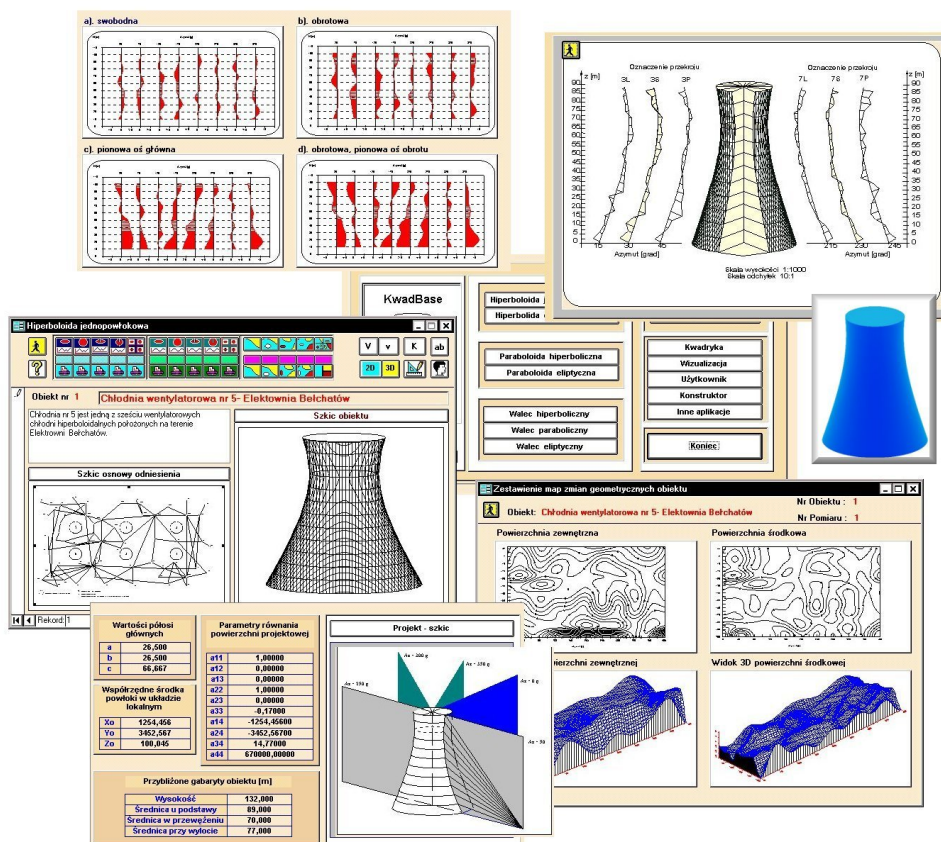
Wymiary osi głównych określa się przez porównanie równania danej powierzchni z równaniem przedstawiającym jej ogólną postać kanoniczną (tab. 1).

Tabela 1

Typ powierzchni	Równanie kanoniczne	Wartości własne	Parametry
Elipsoida rzeczywista	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$	$a^2 = -\frac{1}{\lambda_3} \frac{L}{K}, b^2 = -\frac{1}{\lambda_2} \frac{L}{K}, c^2 = -\frac{1}{\lambda_1} \frac{L}{K}$
Hiperboloida jednopowłokowa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 > \lambda_3$	$a^2 = -\frac{1}{\lambda_2} \frac{L}{K}, b^2 = -\frac{1}{\lambda_1} \frac{L}{K}, c^2 = \frac{1}{\lambda_3} \frac{L}{K}$
Hiperboloida dwupowłokowa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	$\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \geq \lambda_3$	$a^2 = \frac{1}{\lambda_2} \frac{L}{K}, b^2 = -\frac{1}{\lambda_3} \frac{L}{K}, c^2 = -\frac{1}{\lambda_1} \frac{L}{K}$
Stożek II stopnia	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	$\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 > \lambda_3$	$a^2 = \frac{1}{\lambda_2}, b^2 = \frac{1}{\lambda_1}, c^2 = -\frac{1}{\lambda_3}$
		$\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \geq \lambda_3$	$a^2 = -\frac{1}{\lambda_2}, b^2 = -\frac{1}{\lambda_3}, c^2 = \frac{1}{\lambda_1}$
Paraboloida eliptyczna	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	$\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3 = 0$	$a^2 = \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{L}{J}}, b^2 = \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{L}{J}}$
Paraboloida hiperboliczna	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	$\lambda_1 > \lambda_2 = 0 > \lambda_3$	$a^2 = \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{L}{J}}, b^2 = -\frac{1}{\lambda_3} \sqrt{\frac{L}{J}}$
Walec eliptyczny	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$ \lambda_1  \geq  \lambda_2 $ ( $\lambda_1, \lambda_3 \neq 0$ )	$a^2 = \frac{1}{ \lambda_1 }, b^2 = \frac{1}{ \lambda_2 }$
Walec hiperboliczny	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$	$ \lambda_1  \geq  \lambda_2 $ ( $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ )	$a^2 = \frac{1}{ \lambda_1 }, b^2 = \frac{1}{ \lambda_2 }$

Z powyższych rozważań wynika, że nałożenie na równanie powierzchni restrykcji wynikających z cech geometrycznych obiektu badań umożliwi aproksymację dowolnego typu powierzchni, spełniającej ponadto dodatkowe warunki, na przykład wymóg powierzchni obrotowej czy często spotykanej w praktyce powierzchni o pionowej osi głównej. Zastosowanie modelu uogólnionego pozwala też na wyznaczanie odchyłek powierzchni rzeczywistej względem ustalonej powierzchni modelowej oraz na pełną ocenę dokładności wyznaczanych parametrów.

Opracowana przez autora aplikacja *KwadBase* (rys. 1), oprócz estymacji parametrów powierzchni, umożliwia wizualizację dyskretnego modelu odchyłek kształtu, modelowanie powierzchni oraz wizualizację modelu ciągłego. Wykresy i mapy zmian geometrycznych można oglądać na ekranie monitora w postaci obrazów 3D. Zastosowanie formatu DXF pozwala na przenoszenie, poprzez dostępne otoczenie graficzne, wybranych obrazów na drukarki i plotery, gdzie mogą być wykreślane w dowolnie ustalonych skalach. Pliki typu DXF pozwalają również na komunikowanie się z innymi aplikacjami, na przykład systemami do analizy konstrukcji inżynierskich.

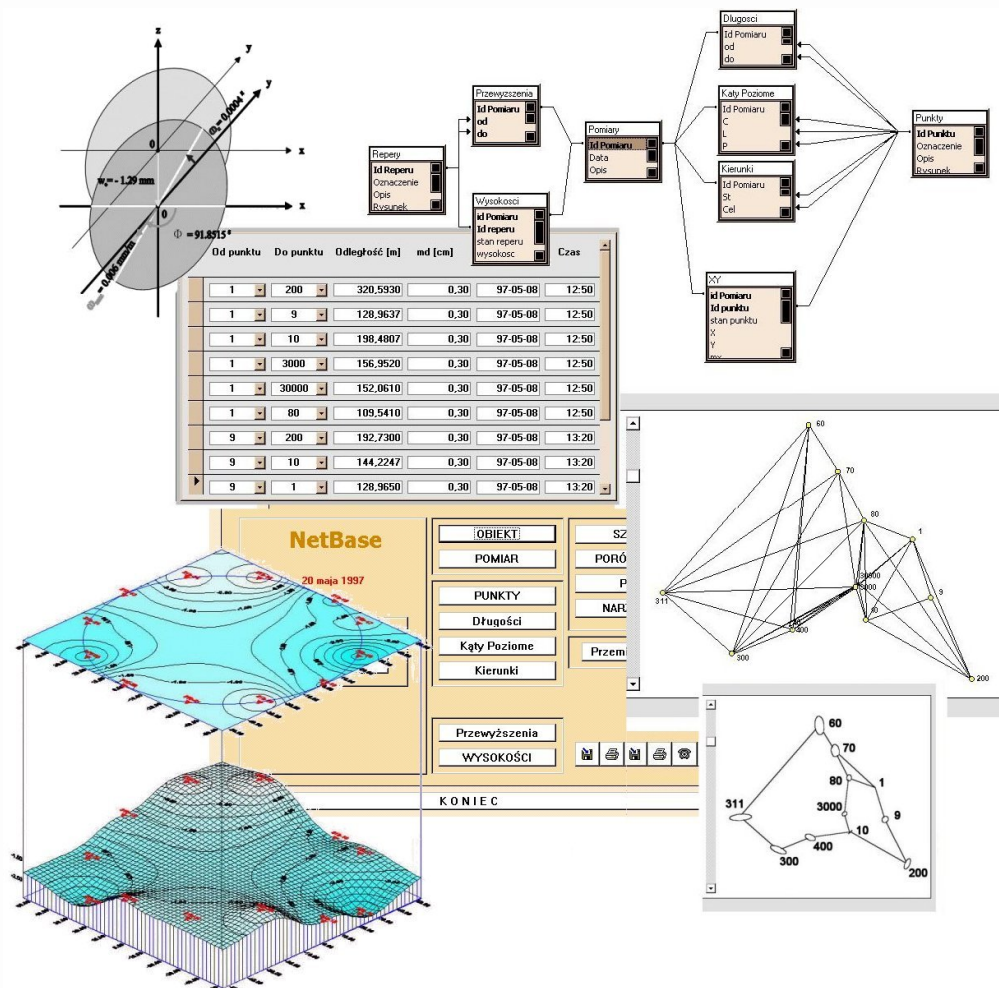


Rys. 1. Aplikacja KwadBase



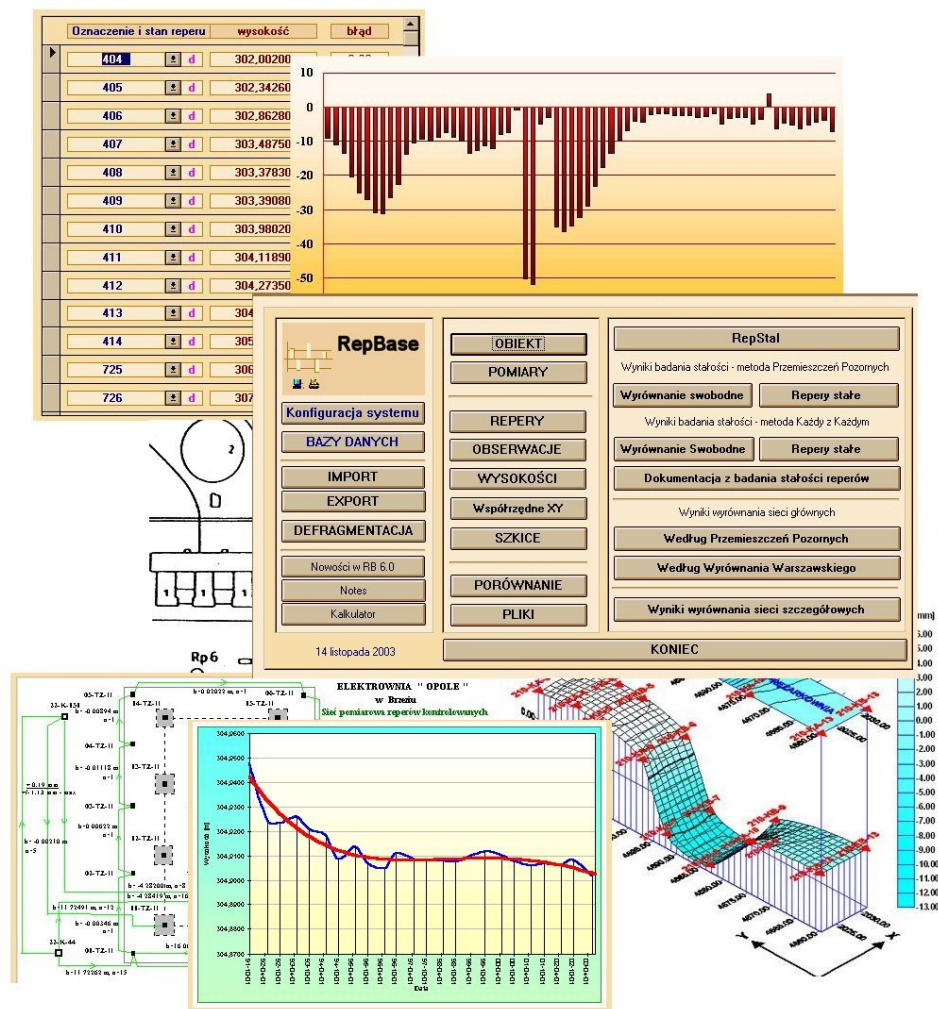
**Zastosowanie modelu uogólnionego do wyznaczania przemieszczeń i odkształceń terenu i obiektów budowlanych**

Dla celów przetwarzania informacji o stanie przemieszczeń i odkształceń terenu oraz typowych obiektów budowlanych autor opracował aplikacje *NetBase* (rys. 2) i *RepBase* (rys. 3).



Rys. 2. Aplikacja *NetBase*

Z bazami danych współpracuje pakiet programów *RepStal*, umożliwiających badanie stałości punktów różnymi metodami oraz wyznaczenie przemieszczeń w czasie, na bazie modelu uogólnionego. *NetBase* służy przede wszystkim do wyznaczania przemieszczeń poziomych terenu. Aplikacja współpracuje z bazą zawierającą informacje o stanie przemieszczeń pionowych. Dzięki temu możliwa jest również analiza przemieszczeń i odkształceń w przestrzeni trójwymiarowej.



Rys. 3. Aplikacja RepBase

Z punktu widzenia stanu bezpieczeństwa obiektu duże znaczenie mają przedziały ufności dla estymowanych parametrów modelu oraz ich poziomy istotności. Aby uzyskać informacje o stanie odkształceń, składowe tensora odkształceń można zapisać za pomocą funkcji

$$\hat{f}_1 = F_1^T \hat{x}_1, \quad \hat{z}_2 = F_2^T \hat{x}_2, \dots, \quad \hat{z}_n = F_n^T \hat{x}_n,$$

lub w postaci wektorowej

$$\hat{f} = F^T \hat{x} \quad (78)$$

przy czym macierz współczynników  $F^T$  wynika z pochodnych cząstkowych funkcji opisujących wektorowe pole przemieszczeń.

W ogólnym przypadku wektorowe pole przemieszczeń  $\{u_x, u_y, u_z\} = \{u_1, u_2, u_3\}$ , określone w układzie  $\{x, y, z\} = \{x_1, x_2, x_3\}$ , może być zapisane w postaci:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{000} + a_{100}x_1 + a_{020}x_2 + a_{003}x_3 + a_{120}x_1x_2 + \dots + a_t t \\ u_2 &= b_{000} + b_{100}x_1 + b_{020}x_2 + b_{003}x_3 + b_{120}x_1x_2 + \dots + d_t t \\ u_3 &= c_{000} + c_{100}x_1 + c_{020}x_2 + c_{003}x_3 + c_{120}x_1x_2 + \dots + c_t t \end{aligned} \quad (79)$$

Funkcja skalarna

$$\hat{f}_{ij} = \mathbf{F}_{ij}^T \hat{\mathbf{x}} \quad (80)$$

opisuje składową  $e_{ij}$  tensora odkształceń, czyli

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Ponieważ  $E[\hat{\mathbf{x}}] = \mathbf{x}$ , a  $V[\hat{\mathbf{x}}] = \sigma^2 [\mathbf{Q}_8]$ , stąd funkcja (78) ma rozkład normalny o parametrach:

$$\begin{aligned} E[\hat{\mathbf{f}}] &= \mathbf{F}^T \mathbf{x} \\ V[\hat{\mathbf{f}}] &= \sigma^2 \mathbf{F}^T \mathbf{Q}_8 \mathbf{F} \end{aligned} \quad (81)$$

czyli

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}^T \hat{\mathbf{x}} \sim N[\hat{\mathbf{f}}, V[\hat{\mathbf{f}}]] \quad \text{lub} \quad \mathbf{f} = \mathbf{F}^T \hat{\mathbf{x}} \sim N[\mathbf{F}^T \mathbf{x}, \sigma^2 \mathbf{F}^T \mathbf{Q}_8 \mathbf{F}] \quad (82)$$

Przedział ufności na poziomie  $(1 - \alpha)$  dla składowych tensora odkształceń danych zależnością (80) jest wyrażony za pomocą statystyki t-Studenta, w postaci

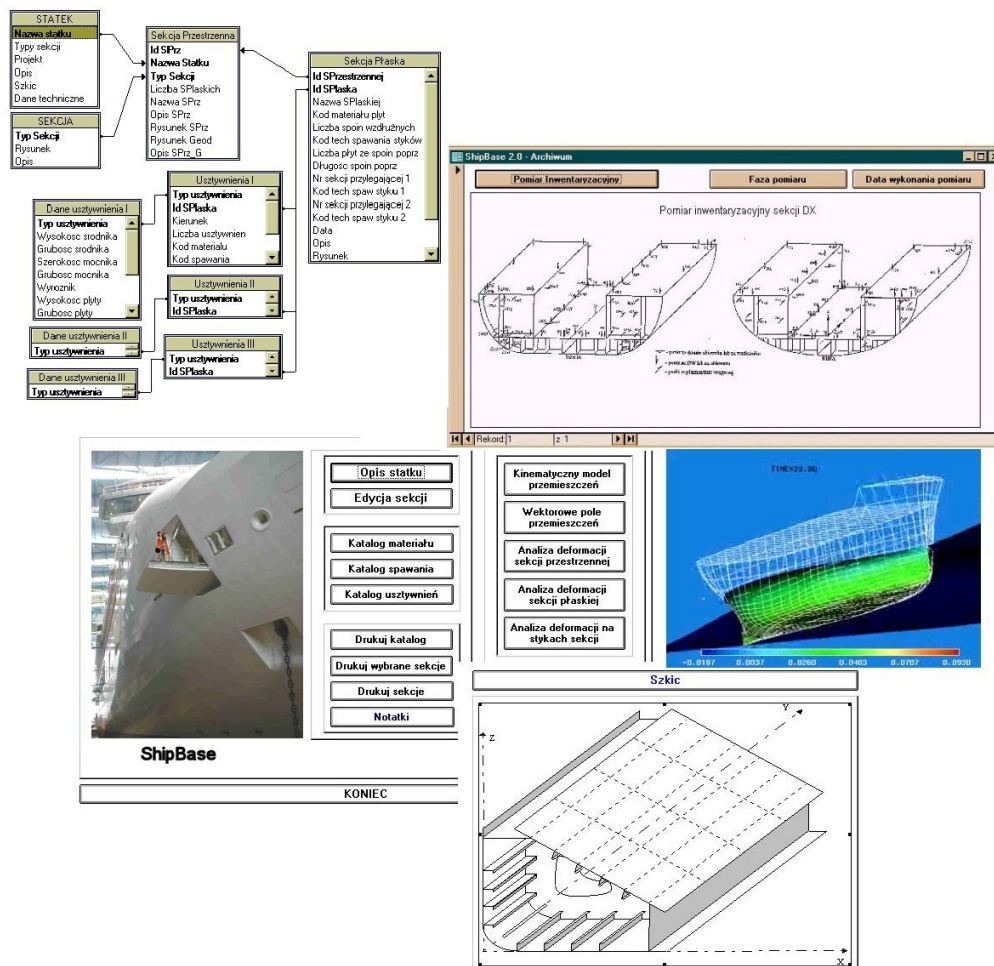
$$f_{ij} = \hat{f}_{ij} \pm [\mathbf{F}_{ij}^T \text{Cov}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{F}_{ij}]^{\frac{1}{2}} t(1 - \alpha, v) \quad (83)$$

### Zastosowanie modelu uogólnionego w procesie budowy i eksploatacji statków

Uogólniony model estymacji znajduje również zastosowanie w przypadku rozpatrywania nietypowych obiektów inżynierskich, między innymi może być wykorzystany w procesie budowy statków. Pomiary geodezyjne wykonuje się już na etapie przygotowania blach i profili, poprzez cały proces budowy, aż do czasu wodowania statku. Niezbędne prace kontrolno-pomiarowe prowadzi się również w czasie eksploatacji statku. Szczególną rolę odgrywają pomiary związane z kontrolą kształtu i wymiarów konstrukcji okrętowych oraz prace, które dotyczą badań przemieszczeń i odkształceń sekcji przestrzennych lub całego kadłuba. Odkształcenia te spowodowane są przede wszystkim obciążeniami dynamicznymi i statycznymi oraz zmianą temperatury. Na powstawanie naprężeń i odkształceń elementów konstrukcji okrętowych bardzo duży wpływ mają tak zwane odkształcenia spawalnicze.

Kadłuby statków buduje się z szeregu sekcji płatowych, zespołowych oraz bloków prefabrykowanych, łączonych metodą spawania. Pojedyncze elementy konstrukcyjne, łączone

w usztywnione podzespoły, tworzą sekcje płatowe, na przykład sekcje poszycia burtowego. Te z kolei łączone są w zespołowe sekcje przestrzenne, takie jak sekcje dna podwójnego czy sekcje zbiorników burtowych. Szereg sekcji płatowych lub zespołowych tworzy bloki. Na poszczególnych etapach montażu sekcji stosuje się naddatki technologiczne przycinane w końcowej fazie montażu. Znajomość wpływu technologicznych procesów cieplnych na odkształcenia konstrukcji okrętowych umożliwić może prognozowanie naddatków na takim poziomie, aby końcowe przycinanie poszczególnych elementów nie było konieczne. Dzięki temu proces budowy statku uległby znacznemu skróceniu, co ma niebagatelne znaczenie ekonomiczne. Jednym z najefektywniejszych sposobów określania modelu deformacji przestrzennych sekcji okrętowych jest jego formułowanie na podstawie danych opracowanych metodami statystycznymi. Analizie muszą być poddane z jednej strony własności materiałów stosowane w konstrukcjach okrętowych i warunki montażu, z drugiej natomiast – wyniki geodezyjnych pomiarów kontrolnych.



Rys. 4. Aplikacja ShipBase

Przy współpracy ze Politechniką Szczecińską i Stoczną Szczecińską autor opracował aplikację *ShipBase* (rys. 4) umożliwiającą tworzenie zbiorów służących do identyfikacji rzeczywistych konstrukcji sekcji okrętowych budowanych w stoczni statków. W jednej bazie gromadzone są zbiory identyfikatorów materiałowo-konstrukcyjnych i technologicznych oraz zbiory z pomiarów zmierzających do wyznaczenia kształtu i wymiarów sekcji. Na potrzeby procesu technologicznego zebrane dane mogą być poddawane analizom statystycznym w celu formułowania modeli deformacji i prognozowania, według modelu uogólnionego odkształceń rozpatrywanych konstrukcji.

Aby umożliwić analizę deformacji sekcji przestrzennych i prognozowanie naddatków technologicznych, dane materiałowo-konstrukcyjne są powiązane z danymi pochodzącymi z geodezyjnych pomiarów kontrolnych.

## 6. Zakończenie

Rozpatrywany w pracy, dla potrzeb wyznaczania przemieszczeń i analizy odkształceń obiektów inżynierskich, uogólniony model estymacji liniowej zdefiniowany jest za pomocą formy kwadratowej (7). Minimalizacja formy kwadratowej jest realizowana dla odchyłek losowych oraz warunków funkcyjnych, wynikających z charakteru badanego zjawiska. W przypadku wielu obiektów trudno jest z góry ustalić model, który w najlepszym stopniu będzie wyjaśniał zmienność analizowanego zjawiska oraz to, które zmienne powinny mieć charakter losowy, a które deterministyczny. Wstępna estymacja takich modeli może pomóc w rozdzieleniu tych zmiennych, a następnie można dokonać podziału takich równań na część probabilistyczną i część deterministyczną. Estymacja układu równań (9), przy wykorzystaniu uogólnionych odwrotności macierzy blokowych, daje jednoznaczne i przejrzyste procedury punktowej i przedziałowej oceny szacowania macierzy kowariancji dla wektorów niewiadomych i ich funkcji. Szacowanie to minimalizuje wariancje dowolnych funkcji liniowych wektorów niewiadomych, a jednocześnie stwarza podstawę do oceny wiarygodności analizowanych modeli w aspekcie badanego zjawiska. Z punktu widzenia stanu bezpieczeństwa badanego obiektu bardzo ważną informacją są przedziały ufności dla estymowanych parametrów odkształceń oraz ich poziomy istotności. Estymacja przedziałowa macierzy kowariancji estymatorów rozpatrywanego modelu pozwala na sformułowanie wniosków dotyczących wiarygodności weryfikowanych hipotez statystycznych. Funkcje zmiennych losowych, opisujące składowe tensora odkształceń, mogą być estymowane przedziałowo za pomocą ustalonych statystyk, dzięki czemu można odpowiedzieć na pytanie, jakich ekstremalnych parametrów odkształceń można się spodziewać przy ustalonym poziomie istotności, w świetle wyników pomiaru i nałożonych warunków ciągłości odkształceń. Opracowane podstawy teoretyczne pozwalają także na wyrażanie opinii o wszystkich jednocześnie elementach tensora odkształceń, czyli o całym stanie odkształceń badanego obiektu. Na bazie granicznych stanów odkształceń można budować kryteria dotyczące zasad i dokładności obserwacji obiektów oraz dotyczące bezpiecznej eksploatacji tych obiektów. Dla praktycznej realizacji opracowanych algorytmów konieczne jest zastosowanie odpowiednich metod numerycznych.

Modelowanie informacji o terenie nie ogranicza się tylko do opracowania modelu matematycznego danego procesu. Cenną informację niesie wizualizacja obiektu badań oraz zachodzących w nim zmian. Sądzę, że eksperymentalnie już stosowane skanery przestrzeni i fotorealistyczne trójwymiarowe wizualizacje wzbogacą już w niedalekiej przyszłości przedstawianie zjawisk i procesów przestrzennych zachodzących w czasie.

### Literatura

- [1] Chrzanowski A, Chen Y.Q., Szostak A, Secord J.M.: Combination of geometrical analysis with physical interpretation for the enhancement of deformation modelling. Congers of FIG, Finland, 1990
- [2] Czaja J.: Estimation of linear deformation models. Proc. of the 8th FIG International Symposium on Deformation Measurements, Hongkong, 1996
- [3] Czaja J.: Interval Estimation of Generalized Linear Models. Geodezja i Kartografia, t. XLVI, z.1, 1997
- [4] Kadaj R.: Modele, metody i algorytmy obliczeniowe sieci kinematycznych w geodezyjnych pomiarach przemieszczeń i odkształceń. AR, Kraków, 1998
- [5] Milev G.: Generalized dynamic models with stresses and deformations. Symp of FIG, Fredericton, 1988
- [6] Pfeufer A, Milev G., Prószyński W., Steinberg G., Teskey W.F., Welsh W.: Classification of Models for Geodetic Examination of Deformations. Perelmuter Workshop on Dynamic Deformation Models, Haifa, 1994
- [7] Piwowarski W. Dżegniuk B. Niedojadło Z.: Współczesne teorie ruchów górotworu i ich zastosowania. Kraków, AGH, 1995
- [8] Preweda E.: System gromadzenia i przepływu informacji o stanie geometrycznym obiektów powłokowych. Skomputeryzowane systemy pomiarowe w geodezji inżynierskiej, Kraków, 1995
- [9] Preweda E.: Baza informacji na temat przemieszczeń poziomych terenu. XIV, 324, AR, Wrocław, 1997
- [10] Preweda E.: Baza danych dla wyznaczania deformacji przestrzennych sekcji okrętowych. ART, Olsztyn, 1999
- [11] Preweda E.: Estymacja parametrów kinematycznego modelu przemieszczeń. Rozprawy Monografie, 110, AGH, Kraków, 2002
- [12] Rao CR.: Least Squares Theory for Possibly Singular Models. Canadian Statistician, 1978
- [13] Welsh W.M., Heunecke O.: Models and Terminology for the Analysis of Geodetic Monitoring Observations, Official Report of the Ad-Hoc Committee of FIG, Working Group The 10 FIG International symposium on Deformation Measurements, 2000