INFRASTRUKTURA I EKOLOGIA TERENÓW WIEJSKICH
INFRASTRUCTURE AND ECOLOGY OF RURAL AREAS

Nr II/2/2014, POLSKA AKADEMIA NAUK, Oddział w Krakowie, s. 437–452
Komisja Technicznej Infrastruktury Wsi

DOI: http://dx.medra.org/10.14597/infraeco.2014.2.2.032

GEODEZYJNE MODELE KINEMATYCZNE

Edward Preweda
AGH Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

GEODETIC KINEMATIC MODELS

Streszczenie

W pracy przedstawiono wybrane zagadnienia dotyczące geodezyjnych modeli kinematycznych. W dotychczasowych zastosowaniach wykorzystuje się różne procedury estymacji liniowej, które wynikają z postaci układów równań wiążących obserwacje. W różny też sposób formułowany jest sam model kinematyczny. Przyjęta w pracy koncepcja modelu zakłada, że nie ma znaczenia sposóbprzeprowadzania obserwacji, w sensie czasu czy epok pomiarowych. Danymi wejściowymi mogą być również funkcje obserwacji, na przykład współrzędne punktów wraz z odpowiadającą im macierzą kowariancji. Model kinematyczny, jeśli ma dotyczyć obiektów inżynierskich, powinien być uzupełniony odpowiednimi restrykcjami nakładanymi na parametry modelu, gwarantującymi ciągłość przemieszczeń i odkształceń. Uogólniony model kinematyczny może służyć do uzyskania parametrów funkcji opisujących ruch pojedynczych punktów lub całego obiektu, czyli dostarczać informacji o punktowym lub wektorowym polu przemieszczeń.

Słowa kluczowe: model kinematyczny, przemieszczenia, odkształcenia

Summary

The paper presents selected issues on geodetic kinematic models. In previous applications various linear estimation procedures are used, they are use to solve a system of equations involving observation issue. The kinematic model can be formulated itself in various options. The model con-

ception adopted in this work assumes that it does not matter how to perform follow-up, in terms of time or measurement periods. The input data may also be functions of observations, for example, coordinates of the points with the corresponding covariance matrix. Kinematic model if it is to involve civil engineering, should be supplemented by adequate restrictions imposed on the model parameters, ensuring continuity of displacements and deformations. A generalized kinematic model can be used to obtain the parameters of functions describing the movement of individual points or the entire facility, which provide information on the point or vector displacement field.

Key words: *kinematic model, displacements, strains*

WSTĘP

Inspiracją do poruszenia sformułowanego tematu, są doświadczenia praktyczne autora, z których wynika, że pomimo wielu prac poświęconych kinematycznym i dynamicznym modelom przemieszczeń, między innymi (Beluch J., Plewako M. 1994, Cacoń S. 2001, Czaja J., Preweda E. 2000, GargulaT. 2010, Kadaj R. 1998, Pfeufer A.i inni 1994, Preweda E. 2002, Prószyński W., Kwaśniak M. 2006, Yalçinkaya,M, Bayrak T. 2005),w dalszym ciągu istotnym problemem jest ustalenie funkcji prędkości punktów obserwowanych oraz numeryczne wyznaczanie parametrów modelu kinematycznego. Przyjęta koncepcja modelu kinematycznego zakłada dowolny sposób przeprowadzania obserwacji, w sensie czasu czy epok pomiarowych. Danymi wejściowymi mogą być wyniki klasycznych pomiarów geodezyjnych, pozyskane techniką satelitarną czy na przykład wyniki pomiarów tensometrycznych. Danymi mogą być również funkcje obserwacji, w postaci współrzędnych punktów wraz z odpowiadającą im macierzą kowariancji. Model kinematyczny powinien być uzupełniony przez nałożenie na postać strukturalną modelu warunków gwarantujących ciągłość przemieszczeń i odkształceń. Dzięki temu może służyć do wyznaczenia parametrów funkcji opisujących ruch pojedynczych punktów lub całego obiektu, dostarczać informacji o punktowym lub wektorowym polu przemieszczeń, a w najprostszych przypadkach może być zastosowany do uzgodnienia wyników obserwacji statycznych. W przypadku wprowadzenia wyników pomiarów tensometrycznych, umożliwi również wyznaczanie odkształceń obiektów inżynierskich.

PRZEMIESZCZENIA I DEFORMACJE

Przemieszczenia i deformacje obiektów inżynierskich, mogą tylko podobnie być wyznaczane jak przemieszczenia terenu. Utożsamiane są ze zmianami położenia punktów reprezentujących badany obiekt. Pomiary geodezyjne prowadzone są najczęściej z sieci obserwacyjnej nawiązanej do punktów odniesienia, teoretycznie uznawanych za stałe. Dla wyznaczenia przemieszczeń punktów sieci obserwacyjnych i punktów reprezentujących obiekty inżynierskie wykonuje się pomiary okresowe. Ponieważ położenie punktów odniesienia w dowolnej chwili t nie zawsze jest znane, w praktyce mamy często do czynienia z układem swobodnym, mającym zastosowanie na przykład przy badaniu przemieszczeń względnych różnych obiektów.

Punkty sieci obserwacyjnej, zmieniając swoje położenie w czasie, tworzą obiekt kinematyczny. Często model ten jest upraszczany, na przykład przez założenie stałości punktów w czasie wykonywania pomiarów. Założenie to, w przypadku zwłaszcza niewielkich obszarowo obiektów i o małym natężeniu ruchu, ma niewielki wpływ na wyniki prowadzonych badań. Taki model sieci, znany jako model quasi-statyczny, stosowany jest w praktyce najczęściej. W pierwszej kolejności estymuje się współrzędne punktów w poszczególnych cyklach pomiarowych. Współrzędne te obarczone są błędem wynikającym z tytułu niedokładności pomiarów oraz z tytułu założenia stałości punktów w czasie wykonywania pomiarów. Na podstawie dyskretnego zbioru współrzędnych punktów, z następujących po sobie cykli pomiarowych, można aproksymować funkcję przemieszczeń punktów w czasie.

Jeżeli w czasie wykonywania obserwacji geodezyjnych obserwowane punkty przemieszczają się, wtedy wyniki badań obarczone są pewnym błędem systematycznym. Błąd ten można wyeliminować, jeśli ustalimy funkcję zmiany jego wartości w czasie. Model przemieszczeń punktów w czasie jest wprawdzie obarczony błędem z tytułu niesynchroniczności pomiarów, jednak błąd ten ma charakter błędu losowego a nie systematycznego.

W ogólności można założyć, że wszystkie punkty sieci w czasie wykonywania pomiarów są w ruchu. Każda obserwacja ma przypisany odpowiedni moment czasu. Aproksymację ruchu punktów reprezentujących badany obiekt wykonuje się jednocześnie z uzgadnianiem obserwacji. W przypadku obserwacji punktów reprezentujących obiekty inżynierskie konieczne jest zwrócenie uwagi, czy należy uwzględnić ciągłość odkształceń.

Wprzypadku sieci statycznej, niezależnie od jej rodzaju, model funkcjonalny ma postać ogólną

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$$

natomiast model stochastyczny przyjmowany jest przy założeniu, że kowariancje obserwacji są równe zeru oraz, że współrzędne punktów odniesienia i obserwacje są niezależne, czyli

$$\mathbf{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{Cov}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Cov}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Cov}(\mathbf{w}) \end{array}\right]$$

Występującą w modelu stochastycznym macierz kowariancji współrzędnych punktów odniesienia aproksymuje się często przy dodatkowych założeniach, takich jak:

- współrzędne są różno dokładne ale nieskorelowane,
- współrzędne są jednakowo dokładne i nieskorelowane,
- współrzędne punktów odniesienia są bezbłędne.

Estymację punktową, prowadzącą do znalezienia wektora niewiadomych, przeprowadza się metodą najmniejszych kwadratów, realizując warunek

$$F = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\mathbf{v} = (\mathbf{w} - \mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{Cov}(\mathbf{x},\mathbf{w})^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \rightarrow \min$$

gdzie :

w – wektor wyrazów wolnych,

A – macierz współczynników,

x – wektor niewiadomych.

Jeśli korzysta się z pseudo odwrotności macierzy, spełniane są dwa warunki:

$$\begin{cases} F_1 = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\mathbf{v} = (\mathbf{w} - \mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{Cov}(\mathbf{x},\mathbf{w})^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \rightarrow \min \\ F_2 = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \rightarrow \min \end{cases}$$

Ogólny model kinematyczny sieci można otrzymać na podstawie powyższego modelu statycznego, wprowadzając funkcję czasu. I tak, w przypadku sieci kinematycznej, model funkcjonalny przyjmie postać ogólną

$$F(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{w}(t)$$

natomiast model stochastyczny ma postać

$$\mathbf{Cov}(\mathbf{x}(t)\ \ \mathbf{w}(t)) = \mathbf{Cov}\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Cov}(\mathbf{x}(t) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Cov}(\mathbf{w}(t) \end{array}\right]$$

Powyższy model może stanowić podstawę do aproksymacji funkcji przemieszczeń pojedynczych punktów oraz kinematycznego wektorowego pola przemieszczeń, przy czym jego postać musi być dla zastosowań praktycznych odpowiednio zmodyfikowana.

OBSERWACJE W MODELU KINEMATYCZNYM

Informacji o stanie geometrycznym obiektów inżynierskich dostarczają pomiary geodezyjne. Opracowane wyniki pomiarów pozwalają na opisanie aktualnego stanu geometrycznego obiektu oraz wyznaczenie zmian zachodzących w czasie, czyli przemieszczeń, odkształceń i ich pochodnych. Ponieważ kinematyczny model przemieszczeń i odkształceń różnych obiektów formułowany jest na podstawie pomiarów ich cech geometrycznych, najlepszym materiałem badawczym są wyniki pomiarów powykonawczych i inwentaryzacyjnych. Dane te są naturalnie niezbędnie dla weryfikacji praktycznej.

W ogólnym przypadku wielkości obserwowane można aproksymować za pomocą nieliniowych modeli, w których wielkości obserwowane reprezentują zmienną objaśnianą, zaś parametry modelu stanowią zmienne objaśniające. Modele takie występują pod ogólną nazwą stochastycznych modeli hybrydowych, czyli modeli zawierających różne warunki nałożone na estymowane parametry. Model kinematyczny może być również estymowany na podstawie równań obserwacyjnych, które uwzględniają czas wykonania danej obserwacji. Każde równanie będzie w tym przypadku zawierało dodatkowe niewiadome, którymi są parametry przyjętego modelu ruchu punktów, na których opiera się dana obserwacja. W zależności od przyjętego modelu ruchu, konieczne będzie sformułowanie stosownego równania obserwacyjnego. Przykładowe równania, zamieszczone w dalszej części tego rozdziału, ilustrują jedynie sposób rozwiązania tego problemu.

Kinematyczne równanie obserwacyjne dla długości poziomych

Długość boku jest jednoznacznie zdefiniowana przez współrzędne (X, Y) dwóch punktówP i K. Załóżmy liniowy model kinematyczny w postaci:

$$\begin{cases} X_P = X_{P0} + a_P t_i \\ Y_P = Y_{P0} + b_P t_i \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} X_K = X_{K0} + a_K t_i \\ Y_K = Y_{K0} + b_K t_i \end{cases}.$$

Można zapisać

$$d_{P-K}^{i} = \sqrt{\left[\left(X_P + a_P t_i\right) - \left(X_K + a_K t_i\right)\right]^2 + \left[\left(Y_P + b_P t_i\right) - \left(Y_K + b_K t_i\right)\right]^2} \ .$$

Po rozwinięciu powyższej funkcji w szereg Taylora otrzymamy równanie obserwacyjne. Jeżeli zamiast funkcji liniowej zastosujemy wielomian n-tego stopnia, typu:

$a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$ – dla współrzędnej X,

$b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_n t^n$ – dla współrzędnej Y,

wtedy równanie obserwacyjne przyjmie następującą postać macierzową:

$$v_{d_{P-K}^i} - \left[-\frac{\Delta X_{P-K}^i}{d_{P-K}^i} \quad -\frac{\Delta Y_{P-K}^i}{d_{P-K}^i} \quad \frac{\Delta X_{P-K}^i}{d_{P-K}^i} \quad \frac{\Delta Y_{P-K}^i}{d_{P-K}^i} \right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathrm{d}X_P & t \times \mathrm{d}a_{1P} & t^2 \times \mathrm{d}a_{2P} & \dots & t^n \times \mathrm{d}a_{nP} \\ \mathrm{d}Y_P & t \times \mathrm{d}b_{1P} & t^2 \times \mathrm{d}b_{2P} & \dots & t^n \times \mathrm{d}b_{nP} \\ \mathrm{d}X_K & t \times \mathrm{d}a_{1K} & t^2 \times \mathrm{d}a_{2K} & \dots & t^n \times \mathrm{d}a_{nK} \\ \mathrm{d}Y_K & t \times \mathrm{d}b_{1K} & t^2 \times \mathrm{d}b_{2K} & \dots & t^n \times \mathrm{d}b_{nK} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(d_{P-K}^i\right)^{pom} - \left(d_{P-K}^i\right)^o$$

Kinematyczne równanie obserwacyjne dla długości przestrzennych

Długość boku w przestrzeni trójwymiarowej definiują współrzędne (X,Y,Z) dwóch punktów P i K. Przy założonym liniowym modelu kinematycznym typu:

$$\begin{cases} X_P = X_{P0} + a_P t_i \\ Y_P = Y_{P0} + b_P t_i \\ Z_P = Z_{P0} + c_P t_i \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} X_K = X_{K0} + a_K t_i \\ Y_K = Y_{K0} + b_K t_i \\ Z_K = Z_{K0} + c_K t_i \end{cases},$$

Równanie obserwacyjne wynika z zależności

$$d_{Pk}(t_i) = \sqrt{[\Delta X(t_i)]^2 + [\Delta Y(t_i)]^2 + [\Delta Z(t_i)]^2}$$

Po przekształcenia można zapisać powyższe równie w następującej postaci macierzowej:

$$v_{d_{P-K}^i} - \left[-\frac{\Delta X_{P-K}^i}{d_{P-K}^i} - \frac{\Delta Y_{P-K}^i}{d_{P-K}^i} \quad -\frac{\Delta Z_{P-K}^i}{d_{P-K}^i} \; \frac{\Delta X_{P-K}^i}{d_{P-K}^i} \; \frac{\Delta Y_{P-K}^i}{d_{P-K}^i} \; \frac{\Delta Z_{P-K}^i}{d_{P-K}^i} \right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathrm{d}X_P & t \times \mathrm{d}a_{1P} & t^2 \times \mathrm{d}a_{2P} & \dots & t^n \times \mathrm{d}a_{nP} \\ \mathrm{d}Y_P & t \times \mathrm{d}b_{1P} & t^2 \times \mathrm{d}b_{2P} & \dots & t^n \times \mathrm{d}b_{nP} \\ \mathrm{d}Z_P & t \times \mathrm{d}c_{1P} & t^2 \times \mathrm{d}c_{2P} & \dots & t^n \times \mathrm{d}c_{nP} \\ \mathrm{d}X_K & t \times \mathrm{d}a_{1K} & t^2 \times \mathrm{d}a_{2K} & \dots & t^n \times \mathrm{d}a_{nK} \\ \mathrm{d}Y_K & t \times \mathrm{d}b_{1K} & t^2 \times \mathrm{d}b_{2K} & \dots & t^n \times \mathrm{d}b_{nK} \\ \mathrm{d}Z_K & t \times \mathrm{d}c_{1K} & t^2 \times \mathrm{d}c_{2K} & \dots & t^n \times \mathrm{d}c_{nK} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(d_{P-K}^i\right)^{pom} - \left(d_{P-K}^i\right)^o$$

Kinematyczne równanie obserwacyjne dla kątów poziomych

Kąt poziomy jest wyznaczony jednoznacznie przez współrzędne (X, Y) trzech punktów C, L, P (centralny, lewy prawy). Skracając rozważania, można zapisać następującą macierzową postać kinematycznego równania obserwacyjnego, przy założonym wielomianowym modelu ruchu

$$v_{\alpha^i} - \left[\frac{\Delta Y_{L-C}^i}{\left(d_{L-C}^i\right)^2} \quad -\frac{\Delta X_{L-C}^i}{\left(d_{L-C}^i\right)^2} \quad -\frac{\Delta Y_{P-C}^i}{\left(d_{P-C}^i\right)^2} \quad \frac{\Delta X_{P-C}^i}{\left(d_{P-C}^i\right)^2} \quad -\left(\frac{\Delta Y_{L-C}^i}{\left(d_{L-C}^i\right)^2} - \frac{\Delta Y_{P-C}^i}{\left(d_{P-C}^i\right)^2}\right) \quad \left(\frac{\Delta X_{L-C}^i}{\left(d_{L-C}^i\right)^2} - \frac{\Delta X_{P-C}^i}{\left(d_{P-C}^i\right)^2}\right) \right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathrm{d}X_L & t \times \mathrm{d}a_{1L} & t^2 \times \mathrm{d}a_{2L} & \ldots & t^n \times \mathrm{d}a_{nL} \\ \mathrm{d}Y_L & t \times \mathrm{d}b_{1L} & t^2 \times \mathrm{d}b_{2L} & \ldots & t^n \times \mathrm{d}b_{nL} \\ \mathrm{d}X_P & t \times \mathrm{d}a_{1P} & t^2 \times \mathrm{d}a_{2P} & \ldots & t^n \times \mathrm{d}a_{nP} \\ \mathrm{d}Y_P & t \times \mathrm{d}b_{1P} & t^2 \times \mathrm{d}b_{2P} & \ldots & t^n \times \mathrm{d}b_{nP} \\ \mathrm{d}X_C & t \times \mathrm{d}a_{1C} & t^2 \times \mathrm{d}a_{2C} & \ldots & t^n \times \mathrm{d}a_{nC} \\ \mathrm{d}Y_C & t \times \mathrm{d}b_{1C} & t^2 \times \mathrm{d}b_{2C} & \ldots & t^n \times \mathrm{d}b_{nC} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\alpha^i\right)^{pom} - \left(\alpha^i\right)^o$$

Kinematyczne równanie obserwacyjne dla przewyższeń

Rozpatrzmy różnicę wysokości pomiędzy punktami P i K. Modele kinematyczne punktów P i K przyjmijmy w postaci liniowych funkcji:

$$Z_P(t) = Z_P(t_o) + a_P t$$
$$Z_K(t) = Z_K(t_o) + a_K t$$

Równanie obserwacyjne przewyższenia

$$h_{PK}(t_i) = Z_K(t_i) - Z_P(t_i) \text{ lub } h_{PK}^i = Z_K^i - Z_P^i$$

zapiszmy przy założeniu, że $t_0 = 0$, stąd

$$vh_i - \mathrm{d}Z_P + \mathrm{d}Z_K - t_i\ \mathrm{d}a_P + t_i\ \mathrm{d}a_K = \Delta h_{PK}^i = h_{PK}^i - \left(h_{PK}^i\right)^o$$

W miejsce liniowej funkcji można zastosować wielomian n-tego stopnia, wtedy

$$Z_P(t) = Z_P(t_0) + a_{1P}t + a_{2P}t^2 + \ldots + a_{nP}t^n\ ,$$
$$Z_K(t) = Z_K(t_0) + a_{1K}t + a_{2K}t^2 + \ldots + a_{nK}t^n .$$

A równanie obserwacyjne przewyższenia przyjmie formę

$$
\begin{aligned}
vh_i \quad & - \mathrm{d}Z_P \quad + \mathrm{d}Z_K \quad - t_i \ \mathrm{d}a_{1P} \quad + t_i \ \mathrm{d}a_{1K} \ - \\
& - \mathrm{d}Z_P \quad + \mathrm{d}Z_K \quad - t_i^2 \ \mathrm{d}a_{2P} \quad + t_i^2 \ \mathrm{d}a_{2K} \ - \\
& \ldots \\
& - \mathrm{d}Z_P \quad + \mathrm{d}Z_K \quad - t_i^n \ \mathrm{d}a_{nP} \quad + t_i^n \ \mathrm{d}a_{nK} \ = \\
= \Delta h_{PK}^i & = h_{PK}^i - \left(h_{PK}^i\right)^o
\end{aligned}
$$

Kinematyczne równanie obserwacyjne można formułować dla dowolnego modelu ruchu. Dla przykładu, rozpatrzmy często stosowany nieliniowy model osiadań (Kadaj R. 1998). Niech:

$$
\begin{aligned}
Z_P(t) &= Z_P(t_0) - s_P\left(1 - e^{-q_P t}\right) \\
Z_K(t) &= Z_K(t_0) - s_K\left(1 - e^{-q_K t}\right)
\end{aligned}
$$

Równanie obserwacyjne przewyższenia $h_{PK}^i = Z_K^i - Z_P^i$ można zapisać w postaci:

$$
\begin{aligned}
& vh_i - \mathrm{d}Z_P + \mathrm{d}Z_K + t_i s_P e^{-q_P t_i} \ \mathrm{d}q_P - t_i s_K e^{-q_K t_i} \ \mathrm{d}q_K = \\
& = \Delta h_{PK}^i = h_{PK}^i - \left(h_{PK}^i\right)^o
\end{aligned}
$$

W powyższym równaniu założono, że maksymalne osiadanie punktów P i K jest ustalone *a priori*.

Zestawiając równania obserwacyjne w postaci liniowego układu typu $\mathbf{Ax} = \mathbf{t} \Leftarrow \ \mathbf{P}$, można wyznaczyć niewiadome, w tym parametry modeli kinematycznych. Parametry modeli kinematycznych mają charakter deterministyczny. W klasycznym ujęciu metody spostrzeżeń pośredniczących, jako zmienne losowe o charakterze stochastycznym traktowane są tak niewiadome w sensie współrzędnych punktów, jak i parametry kinematyczne. W praktyce użyteczne może okazać się rozdzielenie zmiennych losowych od parametrów nielosowych. Naturalnym rozwiązaniem jest w tym przypadku zestawienie równań warunkowych. Oprócz klasycznych warunków, formułowanych analogicznie jak w przypadku obserwacji statycznych, można formułować warunki, jakie muszą spełniać pojedyncze obserwacje, ale przy uwzględnieniu kinematycznego modelu przemieszczeń.

Wektor parametrów rozważanego modelu może opisywać współczynniki wektorowego pola przemieszczeń, określonego przez funkcje współrzędnych punktów x, y, z oraz czasu t. Dla wektorowego pola przemieszczeń (Czaja J. 1971), $\{u_x, u_y, u_z\} = \{u_1, u_2, u_3\}$, określonego w układzie $\{x, y, z\} = \{x_1, x_2, x_3\}$ i zapisanego w postaci:

$$u_1 = a_{000} + a_{100}x_1 + a_{020}x_2 + a_{003}x_3 + a_{120}x_1x_2 + ... + a_t t$$
$$u_2 = b_{000} + b_{100}x_1 + b_{020}x_2 + b_{003}x_3 + b_{120}x_1x_2 + ... + b_t t$$
$$u_3 = c_{000} + c_{100}x_1 + c_{020}x_2 + c_{003}x_3 + c_{120}x_1x_2 + ... + c_t t$$

estymowanymi parametrami będą wielkości $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}$ oraz. a_t, b_t, c_t .

MODEL UOGÓLNIONY

Dowolny układ równań liniowych (nadliczbowy lub uwarunkowany) można zapisać w znanej postaci macierzowej

$$\mathbf{F}\,\mathbf{z} = \mathbf{g} \tag{1}$$

gdzie:

F – macierz współczynników, stanowiących wartości pierwszych pochodnych dla przybliżonych wartości estymowanych parametrów modelu, o wymiarach $(m \times n + u)$;

z – macierz niewiadomych, stanowiących odchyłki losowe lub przyrosty doprzybliżonych wartości estymowanych parametrów modelu, o wymiarach $(n + u \times 1)$;

g – wektor wyrazów wolnych, wynikający z zaobserwowanych wartości zmiennych losowych i przybliżonych wartości estymowanych parametrów modelu, o wymiarach $(m \times 1)$.

Rozwiązanie układu równań (1) może być formułowane dla różnych warunków brzegowych, wynikających ze specyfiki rozważanego zagadnienia, na przykład na podstawie warunków ciągłości odkształceń. Różne warunki brzegowe będą prowadziły do pionowego lub poziomego podziału układu równań (1), a w konsekwencji do układów równań blokowych.

Dla pionowego podziału układu równań (1) można na część niewiadomych **v** narzucić warunek Gaussa–Markowa, a pozostałą część niewiadomych potraktować jako parametry modelu. Wtedy taki układ równań może być zapisany w postaci blokowej

$$[\mathbf{CA}]\begin{bmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{x}\end{bmatrix} = \mathbf{u} \tag{2}$$

co jest równoważne układowi równań **Cv + Ax = u**, przy czym **v** oznacza wektor odchyłek losowych, zaś **x** oznacza wektor parametrów analizowanego modelu.

Dla poziomego podziału układu równań (1) wykorzystamy postać (2), w której na wartości parametrów modelu narzucamy restrykcje (warunki) postaci **Bx = w** . Uwzględniając powyższy warunek, układ równań (2) może być zapisany w formie blokowej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Podział poziomy układu równań (1) zapisanego w postaci (3) może wynikać zwarunków brzegowych, w których górna część równań powinna spełniać model probabilistyczny, zaś dolna część równań powinna spełniać model deterministyczny. Macierze występujące w powyższym układzie równań mają następujące oznaczenia:

C – macierz współczynników przy wektorze odchyłek losowych

v – wektor odchyłek losowych w modelu probabilistycznym;

A – macierz współczynników przy estymowanym wektorze parametrów modelu (**x)** w części probabilistycznej;

x – wektor niewiadomych, czyli estymowanych parametrów (przyrostów do przybliżonych wartości estymowanych parametrów), występujących w modelu probabilistycznym i w modelu deterministycznym;

u – wektor wyrazów wolnych w części probabilistycznej modelu;

B – macierz współczynników przy estymowanym wektorze parametrów **x** w modelu deterministycznym;

w – wektor wyrazów wolnych w modelu deterministycznym.

Zgodnie z zasadą metody najmniejszych kwadratów estymatory nieobciążone układu równań (3) muszą spełniać warunki Gaussa–Markowa wynikające z formy kwadratowej zapisanej za pomocą funkcji Lagrange'a, która ma następującą postać

$$\Psi^2 = \min_{\hat{\mathbf{w}} \cap \mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{w}} \left\{ \left(\mathbf{t}-\hat{\mathbf{t}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{Cov}(\mathbf{t})^{-1} \left(\mathbf{t}-\hat{\mathbf{t}}\right) + 2\mathbf{k}^{\mathrm{T}} \left[\mathbf{C}\left(\mathbf{t}-\hat{\mathbf{t}}\right) + \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{u}\right] \right\} \tag{4}$$

Formę kwadratową (6) można zapisać w postaci funkcji Lagrange'a

$$\Psi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{v} + 2\mathbf{k}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) + 2\mathbf{j}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{w}\right) = \min \tag{5}$$

W powyższych formach występują następujące oznaczenia:

t - wektor zmiennej losowej, czyli wielkości obserwowanych $(n \times 1)$;

$\hat{\mathbf{t}}$ - wektor wartości modelowych wektora **t** $(n \times 1)$ o wartości oczekiwanej $E(\hat{\mathbf{w}}) = \mathbf{w}$;

v - wektor odchyłek losowych w modelu probabilistycznym $(n \times 1)$ związanyze zmienną objaśniającą, czyli z obserwacjami **w** i ich wartościami modelowymi $\hat{\mathbf{t}}$ równaniem $\mathbf{v} = \mathbf{t} - \hat{\mathbf{t}}$, o wartości oczekiwanej $E(\mathbf{v}) = 0$;

Cov(t) - macierz wariancyjno-kowariancyjna dla wielkości obserwowanych $(n \times n)$;

P - nieosobliwa macierz wagowa $(n \times n)$, odpowiadająca odwrotności macierzy kowariancji, czyli $\mathbf{P} = \mathbf{Cov}(\mathbf{t})^{-1}$

j, **k** - wektory współczynników Lagrange'a;

C - macierz współczynników przy wektorze zmiennej losowej, wynikająca z warunków nałożonych na wektor obserwacji **t**;

x - wektor estymowanych parametrów modelu, występujący w części probabilistycznej i części deterministycznej $(u \times 1)$;
A - macierz współczynników $(m \times u)$ przy estymowanym wektorze parametrów **x** (w części probabilistycznej), wynikająca z funkcji wiążących wektor obserwacji **t** z parametrami modelu **x** przy uwzględnieniu **C**;
u - wielkości definiujące warunki funkcyjne $\mathbf{C}(\mathbf{t}-\hat{\mathbf{t}})+\mathbf{Ax}$ nałożone na wektor **t**;
B - macierz współczynników wynikająca z warunków funkcyjnych nałożonych tylko na parametry **x** (czyli wynikająca z charakteru badanego zjawiska, np. z warunków zgodności odkształceń);
w - wektor wyrazów wolnych w części deterministycznej $(r \times 1)$.

W oparciu o model estymacji (5) mogą być prowadzone dalsze badania stanu przemieszczeń i odkształceń obiektów inżynierskich. Wielkościami obserwowanymi mogą być kąty poziome, pionowe i odległości wyznaczane z punktów sieci odniesienia do punktów na badanym obiekcie, odległości pomiędzy punktami badanego obiektu, zmiany nachylenia elementów obiektu względem płaszczyzny poziomej lub na przykład zmiany odchylenia elementów obiektu od linii pionu. Wielkości obserwowane powinny być powiązane z estymowanymi parametrami, przy czym warunki te w przypadku sieci kinematycznej wynikają zarówno z geometrii konstrukcji pomiarowej, jak i z kinematycznego modelu przemieszczeń punktów reprezentujących obiekt. Powyższe warunki funkcyjne można zapisać w postaci ogólnej

$$\mathbf{C}(\mathbf{t}-\hat{\mathbf{t}})+\mathbf{Ax}=\mathbf{u} \tag{6}$$

Ponieważ model (5) ujmuje parametry zmieniające się w czasie, obserwowane wielkości **t** oraz estymowane parametry **x** powinny spełniać warunki figur geometrycznych. Warunki te zapiszmy za pomocą wektora odchyłek losowych **v**, który stanowi przyrosty do wartości modelowych wielkości obserwowanych, czyli

$$\mathbf{v}=\mathbf{t}-\hat{\mathbf{t}} \tag{7}$$

Po zastosowaniu powyższego związku, forma kwadratowa (4) jest minimalizowana względem wektora losowego **v** oraz względem warunków funkcyjnych

$$\mathbf{Bx}=\mathbf{w} \tag{8}$$

nie zawierających składnika losowego. Macierz **C** wynika z warunków figur nałożonych na wartości modelowe wektora zmiennej losowej **t**. Wektor parametrów **x** opisuje współczynniki wektorowego pola przemieszczeń. Wartości przybliżone parametrów **x**, opisujące badane zjawisko, nie są na ogół znane, stąd funkcje względem tych parametrów powinny być w postaci liniowej. Macierz

A stanowi ustalone współczynniki przy estymowanych parametrach **x,** ale przy uwzględnieniu warunków figur, czyli macierzy **C**. Jeżeli wyrażenia funkcyjne, zawierające tylko zmienne x_1, x_2, x_3 i t, zestawimy w postaci macierzy $\mathbf{A}_0$, to macierz

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{A}_0 \tag{9}$$

Warunki funkcyjne (8) względem których następuje minimalizacja formy kwadratowej (4), wynikają z charakteru badanego zjawiska. W analizie odkształceń badanego obiektu warunki te wynikają bezpośrednio z warunków zgodności odkształceń, czyli ze ściśle ustalonych wiążących składowe tensora odkształceń.

Problematyka aproksymacji wektorowego pola przemieszczeń, wyznaczania odkształceń i weryfikowania warunków ciągłości odkształceń jest przedmiotem szczegółowych rozważań zamieszczonych między innymi w pracy (Czaja J. 1971).

Jak wspomniano, warunkiem koniecznym istnienia minimum funkcji Lagrange'a

$$\Psi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} + 2\mathbf{k}^{\mathrm{T}}(\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{u}) + 2\mathbf{j}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{w}) = \min$$

jest zerowanie się wektorów pierwszych pochodnych, zaś wystarczającym (przy spełnieniu koniecznego) są dodatnio określone macierze wynikające z drugich pochodnych. Warunki konieczne prowadzą do układu czterech równań macierzowych,

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \mathbf{0} \\ &\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{j} = \mathbf{0} \\ &\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{u} \\ &\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{w} \end{aligned} \tag{10}$$

które można zapisać w postaci macierzy blokowych(Preweda E. 2002):

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}} & \underset{(n\ w)}{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}} & \underset{(n\ p)}{\mathbf{0}} & \underset{(n\ r)}{\mathbf{0}} \\ \hdashline \underset{(w,n)}{\mathbf{C}} & \underset{(w,w)}{\mathbf{0}} & \underset{(w\ p)}{\mathbf{A}} & \underset{(w,r)}{\mathbf{0}} \\ \hdashline \underset{(p\ n)}{\mathbf{0}} & \underset{(p\ w)}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} & \underset{(p\ p)}{\mathbf{0}} & \underset{(p\ r)}{\mathbf{B}^{\mathrm{T}}} \\ \hdashline \underset{(r\ n)}{\mathbf{0}} & \underset{(r\ w)}{\mathbf{0}} & \underset{(r\ p)}{\mathbf{B}} & \underset{(r\ r)}{\mathbf{0}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \underset{(n\ 1)}{\mathbf{v}} \\ \hdashline \underset{(w,1)}{\mathbf{k}} \\ \hdashline \underset{(p\ 1)}{\mathbf{x}} \\ \hdashline \underset{(r\ 1)}{\mathbf{j}} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} \underset{(n\ 1)}{\mathbf{0}} \\ \hdashline \underset{(w,1)}{\mathbf{u}} \\ \hdashline \underset{(p\ 1)}{\mathbf{0}} \\ \hdashline \underset{(r\ 1)}{\mathbf{w}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \underset{(n\ 1)}{\mathbf{0}} \\ \hdashline \underset{(w,1)}{\mathbf{0}} \\ \hdashline \underset{(p\ 1)}{\mathbf{0}} \\ \hdashline \underset{(r\ 1)}{\mathbf{0}} \end{array}\right] \tag{11}$$

Warunki wystarczające istnienia minimum właściwego są spełnione, ponieważ macierze $\mathbf{P}, \mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{P}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}, \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$ wynikające z drugich pochodnych cząstkowych są dodatnio określone, o ile nie są osobliwe. W przypadku gdy któraś z tych macierzy jest osobliwa, istnieje nieskończenie wiele rozwiązań. Nakładając dodatkowe warunki na estymowane parametry, otrzymuje się jednoznaczne rozwiązanie (minimum właściwe).

Rozwiązanie zadania przeprowadzono poprzez wyznaczenie uogólnionej odwrotności macierzy blokowej złożonej z 16 podmacierzy. Ponieważ główna macierz blokowa jest symetryczna, wobec tego jej uogólniona odwrotność będzie macierzą blokową symetryczną, czyli

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_4 \\ \mathbf{Q}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{Q}_5 & \mathbf{Q}_6 & \mathbf{Q}_7 \\ \mathbf{Q}_3^{\mathrm{T}} & \mathbf{Q}_6^{\mathrm{T}} & \mathbf{Q}_8 & \mathbf{Q}_9 \\ \mathbf{Q}_4^{\mathrm{T}} & \mathbf{Q}_7^{\mathrm{T}} & \mathbf{Q}_9^{\mathrm{T}} & \mathbf{Q}_{10} \end{bmatrix}$$

Szczegółowe rozwiązanie oraz dowody twierdzeń o nie obciążoności estymatorów przedstawiono w (Preweda E. 2002).Poszukiwana macierz rozwiązań układu (11) wyrażona jest iloczynem następujących macierzy blokowych:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{j}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_4 \\ \mathbf{Q}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{Q}_5 & \mathbf{Q}_6 & \mathbf{Q}_7 \\ \mathbf{Q}_3^{\mathrm{T}} & \mathbf{Q}_6^{\mathrm{T}} & \mathbf{Q}_8 & \mathbf{Q}_9 \\ \mathbf{Q}_4^{\mathrm{T}} & \mathbf{Q}_7^{\mathrm{T}} & \mathbf{Q}_9^{\mathrm{T}} & \mathbf{Q}_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Nieobciążone estymatory niewiadomych uogólnionego modelu mają postać:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_2\mathbf{u} + \mathbf{Q}_4\mathbf{w}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_6^{\mathrm{T}}\mathbf{u} + \mathbf{Q}_9\mathbf{w}$$

Wektory współczynników Lagrange'a wyznaczony jest z zależności:

$$\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{Q}_5\mathbf{u} + \mathbf{Q}_7\mathbf{w}$$

$$\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{Q}_7^{\mathrm{T}}\mathbf{u} + \mathbf{Q}_{10}\mathbf{w}$$

Estymator wielkości modelowych:

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{w} - \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{w} - (\mathbf{Q}_2\mathbf{u} + \mathbf{Q}_4\mathbf{w})$$

Nieobciążony estymator wariancji resztowej:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\mathbf{v}}{\mathrm{R}(\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}) - \mathrm{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B})}$$

Macierze kowariancji wektorów $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ wyrażają się następującymi zależnościami:

$$\mathrm{Cov}(\hat{\mathbf{v}}) = \hat{\sigma}^2 \mathbf{Q}_1$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\sigma}^2 \mathbf{Q}_8$$

Estymatory $\hat{\mathbf{v}}$ i $\hat{\mathbf{x}}$ można zapisać w postaci:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{Q}_2 \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{Q}_4 \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{v}^{\mathrm{o}} + \Delta\mathbf{v}_{\mathrm{a}} + \Delta\mathbf{v}_{\mathrm{b}}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_6^{\mathrm{T}} \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{Q}_6^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{Q}_9 \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{o}} + \Delta\mathbf{x}_{\mathrm{a}} + \Delta\mathbf{x}_{\mathrm{b}}$$

Wektory $\Delta\mathbf{v}_{\mathrm{a}}$ i $\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{a}}$ wynikają z przyjęcia części niewiadomych za parametry modelu, natomiast wektory $\Delta\mathbf{v}_{\mathrm{b}}$ i $\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{b}}$ wynikają z restrykcji nałożonych na parametry modelu. Jeżeli na wszystkie niewiadome narzucimy warunek Gaussa–Markowa, wówczas $\Delta\mathbf{v}_{\mathrm{a}} = 0$ i $\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{a}} = 0$. Jeżeli zaś nie wprowadzimy warunków brzegowych, wtedy $\Delta\mathbf{v}_{\mathrm{b}} = 0$ i $\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{b}} = 0$.

Na podstawie przedstawionego rozwiązania układu równań (12) można analizować szczególne przypadki modeli liniowych, które wynikają z warunków obserwacji i charakteru badanego zjawiska.

PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

Model wieloparametrowy

W uogólnionym modelu należy przyjąć:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{t} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{0} \\ \mathrm{Det}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}) &\neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Model uwarunkowany

W uogólnionym modelu trzeba założyć:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{t} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Model wieloparametrowy z restrykcjami

W uogólnionym modelu przyjmiemy:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{t}$$

oraz zakładamy, że macierze symetryczne są bez defektu.

WNIOSKI

W pracy przestawiono uogólnione rozwiązanie geodezyjnych modeli kinematycznych. Należy jednak zwrócić uwagę, że zaburzenia danych mogą powodować powiększanie rzędu macierzy, prowadząc do rozwiązania przez funkcje, które w sposób nieciągły i nieograniczony zależą od wartości zaburzenia. Usunięcie nieciągłości można uzyskać poprzez zawężenie dziedziny zadania przy zachowaniu funkcji celu, czyli stosując regularyzację dyskretną, lub poprzez zachowanie dziedziny zadania, ale zmianie funkcji celu w taki sposób, aby otrzymać zadanie dobrze postawione o rozwiązaniach zbliżonych do rozwiązań oryginalnych (regularyzacja ciągła). Takie zabiegi umożliwiające przejście od zadania źle do dobrze postawionego zadania nazywa się ogólnie regularyzacją. Postępowanie regularyzacyjne nie jest jednoznaczne, uzależnione jest od wartości pewnego parametru, którego wybór wymaga dodatkowej informacji wynikającej z sensu fizycznego zadania, a którego sam rachunek numeryczny nie może dostarczyć. Dlatego wskazane jest rozwiązywanie zadań nieregularnych w trybie konwersacyjnym.

LITERATURA

Beluch J., Plewako M. (1994) Taking Kinematics of Surface into Account then Caculating High Control on Mining Areas. Haifa: Proc. of the Perelmuter Workshop on Dynamic Deformation Models, s. 291–302.

Cacoń S. (2001) Problem wiarygodności geodezyjnych pomiarów deformacji obiektów inżynierskich w relacji obiekt-górotwór. Warszawa: IGiKt. XLVIII, z. 102.

Czaja J. (1971) Aproksymacja wektorowego pola przemieszczeń i odkształceń i jego interpretacja geometryczna i fizyczna. Warszawa:GiK, t. XX.

Czaja J., Preweda E. (2000) Estymacja parametrów liniowych modeli. Modelowanie danych przestrzennych, Warszawa.

Gargula T.(2010) Modele funkcjonalne wyrównania pomiarów okresowych przy wyznaczaniu przemieszczeń powierzchni terenu. Infrastruktura i ekologia terenów wiejskich, Nr 6,s. 177-186.

Kadaj R. (1998) Modele, metody i algorytmy obliczeniowe sieci kinematycznych w geodezyjnych pomiarach przemieszczeń i odkształceń. Kraków: Wyd. AR.

Pfeufer A., Milev G., Prószyński W., Steinberg G., Teskey W.F., Welsh W. (1994) Classification of Models for Geodetic Examination of Deformations. Haifa: Perelmuter Workshop on Dynamic Deformation Models.

Preweda E. (2002) Estymacja parametrów kinematycznego modelu przemieszczeń. Rozprawy Monografie, 110, AGH, Kraków.

Prószyński W., Kwaśniak M. (2006) Podstawy geodezyjnego wyznaczania przemieszczeń. Pojęciai elementy metodyki. Warszawa: OWPW.

Yalçinkaya,M, Bayrak T. (2005) Comparison of Static,Kinematic and Dynamic Geodetic Deformation Models for Kutlugün Landslidein Northeastern Turkey. Springer, Natural Hazards34, s.91–110.

Dr hab. inż. Edward Preweda, prof. n. AGH
Katedra Geomatyki
AGH Akademia Górniczo-Hutnicza
Al. Mickiewicza 30
30-056 Kraków
Paw. C4, p.415
Tel. (12) 6172275
e-mail: edward.preweda@agh.edu.pl