



SPRĘŻYSTOŚĆ I HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ

Modelowanie i zastosowania

Monografia
pod redakcją naukową
Stanisława Jemioła

Seria Monografie Zakładu
Wytrzymałości Materiałów,
Teorii Sprężystości i Plastyczności



optymalną

ensors – mmetries is lasticity 43, optimization y, Design , Dearborn a. Moduły (17) 2003, Część I-III, eśniak [ed], Theoretical , str. 87-96, port of the (n), No. 217, , 1997. dimensional

Rozdział III Cztery typy płaskiej anizotropii na przykładzie modelu kompozytu włóknistego

Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI

1. Kompozyty włókniste

Materiały kompozytowe powstałe przez zbrojenie włóknami izotropowej matrycy są obecnie powszechnie stosowane w technice [3]. Typowymi kompozytami włóknistymi są materiały o osnowie polimerowej. Funkcję osnowy pełnią zwykle żywice syntetyczne (np. żywice epoksydowe lub poliestrowe), włókna zaś są najczęściej szklane, węglowe, borowe i organiczne. Celem wprowadzenia włókien do osnowy jest zwiększenie sztywności i wytrzymałości materiału. Zasadniczym warunkiem uzyskania zamierzonych właściwości kompozytu jest dobre związanie ze sobą jego komponentów. Ta pożądana cecha będzie punktem wyjścia do dyskusji najprostszego modelu teoretycznego kompozytu włóknistego. Dodatkowo należy zaznaczyć, że ograniczenia technologiczne odnośnie sposobu produkcji kompozytów włóknistych sprawiają, że elementy konstrukcyjne wykonane z tego typu materiałów są zazwyczaj tarczami, płytami albo powłokami. Uzasadnione jest więc ograniczenie szczegółowej analizy i podstawowych cech prezentowanego modelu do tzw. zagadnień płaskiego stanu naprężenia.

Rozważane są tylko liniowo-sprężyste relacje konstytutywne wyidealizowanego modelu kompozytu włóknistego. Na przykładzie tego prostego modelu możliwa jest dyskusja i interpretacja rozważań teoretycznych dotyczących symetrii płaskich podwójnie symetrycznych tensorów czwartego rzędu (tzw. tensorów Hooke'a), por. np. [1,4,9]. W pracy [1] po raz pierwszy udowodniono, że płaski tensor Hooke'a opisuje tylko cztery różne grupy symetrii materiału, tj. anizotropię, ortotropię, symetrię regularną oraz izotropię, patrz także rozdział II. Wszystkie te przypadki zostaną zilustrowane na przykładzie izotropowej matrycy zbrojonej jedną lub kilkoma rodzinami włókien ułożonych pod różnymi kątami względem siebie.

2. Model przestrzenny - izotropowa matryca zbrojona jedną rodziną włókien

Modelowany kompozyt składa się z izotropowej matrycy i włókien. Niech p oznacza udział objętościowy włókien w reprezentatywnej objętości kompozytu. Założono pełną

przyczepność między włóknami a matrycą. Dodatkowo przyjęto, że włókna „pracują” jednowymiarowo, tzn. tylko wzdłuż wektora \mathbf{m} , który jest wersorem zgodnym z kierunkiem ułożenia włókien w matrycy. Oznacza to, że jednostkowa energia sprężystości nagromadzona we włóknach kompozytu w funkcji tensora odkształceń kompozytu jest następująca:

$$W_z = \frac{1}{2} E_z (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m})^2 = \frac{1}{2} E_z (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M})^2. \quad (2.1)$$

We wzorze (2.1) E_z oznacza moduł Younga włókna, zaś $\mathbf{M} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$ i może być interpretowany jako tensor struktury, [2]. Wobec tego jednostkowa energia sprężystości kompozytu ma następującą postać

$$W = (1 - p)W_M + pW_z, \quad (2.2)$$

gdzie W_M jest jednostkową energią sprężystości w izotropowej matrycy i wyraża się następującym wzorem:

$$W_M = \frac{E_M}{2(\nu_M + 1)} \left[\frac{\nu_M}{(1 - 2\nu_M)} (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^2 \right]. \quad (2.3)$$

We wzorze (2.3) E_M i ν_M oznaczają odpowiednio moduł Younga i stałą Poissona materiału matrycy. Relację konstytutywną rozpatrywanego kompozytu otrzymamy różniczkując (2.2) po uprzednim podstawieniu (2.1) i (2.3) względem tensora odkształceń. Otrzymamy wtedy:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E_M(1 - p)}{1 + \nu_M} \left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu_M}{(1 - 2\nu_M)} (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \right] + pE_z (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}) \mathbf{M}. \quad (2.4)$$

W celu uproszczenia notacji dalej wprowadzono następujące oznaczenia: $E \equiv E_M$, $\nu \equiv \nu_M$ i $E_z \equiv \eta E$.

Zauważmy, że grupą symetrii kompozytu opisanego relacją (2.4) jest tzw. „płaska” grupa ortogonalna $O(2)$ (tzn. grupa $SO(2)$ tj. wszystkich obrotów względem osi \mathbf{m} oraz odbicia lustrzanego względem płaszczyzny o normalnej \mathbf{m} i złożenia obrotów z odbiciem lustrzanym). Z (2.4) wynika, że kierunki główne wartości własnych tensora naprężenia i odkształcenia nie są zgodne i są modyfikowane przez wyraz z tensorem \mathbf{M} . W płaszczyźnie prostopadłej do włókna kompozyt ma izotropowe własności sprężyste.

Ponieważ działania: śladu tensora, nasunięcia tensorów oraz iloczynu tensorowego są operacjami liniowymi, to relację konstytutywną (2.4) można napisać w równoważnej postaci, wprowadzając tensor czwartego rzędu \mathbf{C} nazywanym tensorem sztywności materiału:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.5)$$

gdzie

$$\mathbf{C} = \frac{E(1 - p)}{1 + \nu} \left(\mathbf{1} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) + p\eta E \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} = (1 - p) \mathbf{C}_M + p\eta E \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}. \quad (2.6)$$

3. Płaski stan naprężenia, matryca zbrojona kilkoma rodzinami włókien

W przypadku płaskiego stanu naprężenia (PSN) włókna kompozytu rozmieszczone są w reprezentatywnej objętości o jednym stałym wymiarze h , który jest grubością warstwy

(tarczy PSN). Wobec tego, będziemy stosowali pojęcie udziału powierzchniowego rodziny włókien (albo będziemy mówili krótko stopień zbrojenia) w reprezentatywnej powierzchni kompozytu. Jednostkową energię sprężystości nagromadzoną w danej n -tej rodzinie włókien kompozytu ułożonych w kierunku o wersorze $\bar{\mathbf{m}}_n$, analogicznie do (2.1), możemy wyrazić następującym wzorem:

$$W_{Z_n} = \frac{1}{2} E_{Z_n} (\bar{\mathbf{m}}_n \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \bar{\mathbf{m}}_n)^2 = \frac{1}{2} E_{Z_n} (\text{tr} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \bar{\mathbf{M}}_n)^2, \quad (3.1)$$

w którym E_{Z_n} oznacza moduł Younga danych włókien, zaś $\bar{\mathbf{M}}_n = \bar{\mathbf{m}}_n \otimes \bar{\mathbf{m}}_n$. W ogólności możemy przyjąć, że zadane jest pole wersorów jednostkowych $\bar{\mathbf{m}}_n(\bar{\mathbf{x}})$, gdzie wektor $\bar{\mathbf{x}}$ określa położenie punktu rozpatrywanej warstwy względem wybranego układu współrzędnych. Pozioma kreska nad literą rdzeniową oznacza, że wektory albo tensory są płaskie. Dana rodzina włókien ma określony stopień zbrojenia t_n (z reguły $t_n \ll 1$).

Zakładamy, że $t = \sum_{n=1}^N t_n < 1$. Wobec tego jednostkowa energia sprężystości kompozytu ma postać:

$$W_{PSN} = (1-t)W_{MPSN} + \sum_{n=1}^N t_n W_{Z_n}, \quad (3.2)$$

gdzie W_{MPSN} jest jednostkową energią sprężystości izotropowej matrycy w przypadku PSN.

Relację konstytutywną kompozytu można napisać w postaci analogicznej do (2.5):

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{PSN} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.3)$$

gdzie

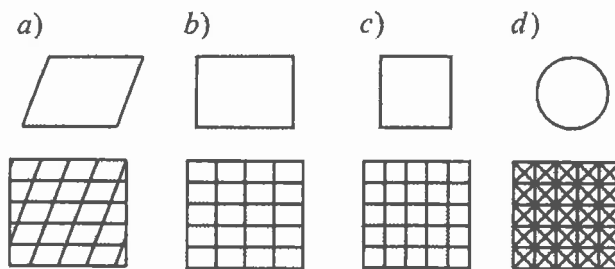
$$\mathbf{C}_{PSN} = \frac{E(1-\nu)}{(1-\nu)^2} (\nu \bar{\mathbf{1}} + (1-\nu) \bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}}) + \sum_{n=1}^N t_n E_{Z_n} \bar{\mathbf{M}}_n \otimes \bar{\mathbf{M}}_n. \quad (3.4)$$

W związku odwrotnym do (3.3) występuje tensor podatności: $\mathbf{S}_{PSN} = \mathbf{C}_{PSN}^{-1}$. Związki między tzw. „stałymi technicznymi sprężystości” a tensorem podatności podano w pkt.5.

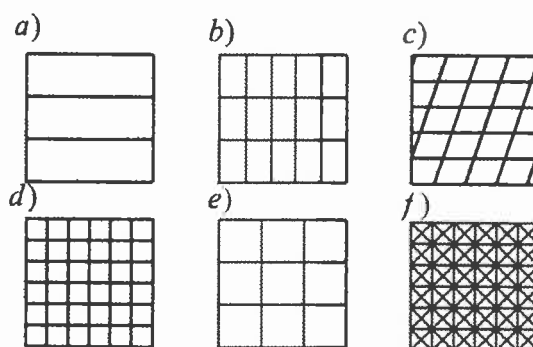
4. Grupy symetrii materiału

Grupa symetrii kompozytu włóknistego o tensorze sztywności (3.4) definiująca rodzaj jego anizotropii zależna jest tylko od iloczynu tensorowego tensorów $\bar{\mathbf{M}}_n$, ponieważ osnowa jest izotropowa. W zależności od liczby rodzin włókien oraz ich wzajemnego ułożenia można pokazać wszystkie typy symetrii jakie rozróżnia tensor sztywności czwartego rzędu w zagadnieniach płaskich, por. rys.4.1. Pokazane na rysunku typy symetrii odpowiadają wszystkim czterem możliwym typom anizotropii materiałów o liniowych własnościach sprężystych, tzn.: a) pełnej anizotropii, b) ortotropii, c) symetrii regularnej i d) izotropii. Interpretacje, zgodne z kompozytem wg modelu (3.4), podano w najprostszym przypadku gdy $E_{Z_n} = \eta E$. Anizotropii odpowiada na rys.4.1a kompozyt z dwiema rodzinami włókien, które „przecinają” się pod kątem $\pi/4$. Jeżeli dwie rodziny włókien o różnym stopniu zbrojenia „przecinają” się pod kątem $\pi/2$, to kompozyt jest materiałem ortotropowym, rys.4.1b. Dwie rodziny włókien o tym samym stopniu zbrojenia, które „przecinają” się pod kątem $\pi/2$, tworzą kompozyt

o symetrii regularnej (symetrii kwadratu względem grupy obrotów), rys.4.1c. Cztery jednakowe rodziny włókien o tym samym stopniu zbrojenia, które przecinają się jak na rys. 4.1d tworzą kompozyt izotropowy (o symetrii koła).



Rysunek 4.1. Typy symetrii tzw. płaskich tensorów Hooke'a (wiersz górny) oraz odpowiadające tym typom symetrii kompozyty włókniste wg modelu (3.4) (wiersz dolny): a) anizotropia, b) ortotropia, c) symetria regularna i d) izotropia



Rysunek 4.2. Przykłady kompozytów o izotropowej matrycy zbrojonej włóknami: a) i b) materiał ortotropowy, d) i e) materiał o symetrii regularnej, f) materiał izotropowy, c) materiał anizotropowy. Na rys. a i d-e w kompozycie występują identyczne rodziny włókien, natomiast w przypadkach b-c rodziny włókien mogą być różne, tzn. mogą różnić się stopniem zbrojenia i sztywnością.

Podane na rys.4.1 przykładowe ilustracje wymienionych typów symetrii w postaci kompozytów włóknistych nie są oczywiście jedynymi możliwymi. Na przykład ortotropii rys.4.1b odpowiada także kompozyt włóknisty z jedną rodziną włókien albo np. kompozyt z dwoma rodzinami włókien prostopadłych o różnym stopniu zbrojenia (albo różnych modułach sztywności włókien), por. rys.4.2.

5. Interpretacja i ograniczenia modelu

Interpretacja prezentowanego modelu kompozytu wymaga przytoczenia podstawowych zależności między składowymi tensora podatności i tzw. „stałymi technicznymi sprężystości”. Pamiętając, że wektory \bar{m} i \bar{n} są wersorami wzory te można przedstawić w następującej postaci:

a) moduł Younga w dowolnym kierunku \bar{n} ,

$$\frac{1}{E(\bar{n})} = (\bar{n} \otimes \bar{n}) \cdot \mathbf{S}_{PSN} \cdot (\bar{n} \otimes \bar{n}), \quad (5.1)$$

b) współczynniki Poissona,

$$-\frac{\nu(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{m}})}{E(\bar{\mathbf{n}})} = -\frac{\nu(\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{n}})}{E(\bar{\mathbf{m}})} = (\bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}}) \cdot \mathbf{S}_{PSN} \cdot (\bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}}), \quad \bar{\mathbf{m}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0, \quad (5.2)$$

c) moduły ścinania,

$$\frac{1}{G(\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{n}})} = \frac{1}{G(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{m}})} = 4(\bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{S}_{PSN} \cdot (\bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}}), \quad \bar{\mathbf{m}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0. \quad (5.3)$$

W przypadku matrycy zbrojonej jedną rodziną włókien, których kierunek zgadza się z jedną z osi układu współrzędnych, reprezentacja tensora sztywności (3.4) w tensorowej bazie ortonormalnej jest następująca:

$$\mathbf{C}_{PSN} \rightarrow \frac{E(1-t)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{t}{1-t} \eta(1-\nu^2) & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Tensor sztywności (5.4) jest tensorem dodatnio określonym jeżeli spełnione są ograniczenia na dodatnią określoność tensora sztywności materiału matrycy oraz $\eta > 0$ i $t \in [0, 1)$. Przypominamy, że tensor sztywności izotropowego materiału PSN jest dodatnio określony jeżeli $E > 0$ i $\nu \in (-1, 1)$. Kompozyt ma symetrię prostokąta ze względu na płaskie obroty. W przypadku PSN materiał anizotropowy o wymienionej symetrii nazywany jest materiałem ortotropowym. Przypominamy, że w przypadku PSN i dowolnego materiału ortotropowego mamy następujący odwrotny związek Hooke'a (kierunki główne ortotropii są zgodne z kierunkami układu współrzędnych):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Porównując odwrotność macierzy (5.4) z (5.5) otrzymamy wzory i interpretacje technicznych stałych sprężystości rozpatrywanego kompozytu:

$$E_1 = E[(1-t) + t\eta], \quad E_2 = E \frac{(1-t) + t\eta}{1 + \frac{t}{1-t} \eta(1-\nu^2)}, \quad G_{12} = (1-t) \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (5.6)$$

$$\nu_{12} = \nu, \quad \nu_{21} = \frac{\nu}{1 + \frac{t}{1-t} \eta(1-\nu^2)},$$

gdzie $\eta = E_z / E$. Także wzory (5.6) pokazują, że otrzymany kompozyt jest szczególnym przypadkiem materiału ortotropowego. Zauważmy, że jeżeli $t = 0$ albo $\eta = 1$, to z (5.6) otrzymamy techniczne stałe sprężystości materiału izotropowego, co potwierdza formalną poprawność zaproponowanego modelu kompozytu. Zauważmy jednak, że wartości t bliskie jedności prowadzą do nierealistycznych przewidywań cech sprężystych kompozytu, gdyż

moduły E_2 i G_{12} dążą do zera, co oczywiście wynika z przyjętego założenia (2.1). Ze wzoru (5.6)₁ wynika, że rozciągając materiał w kierunku zgodnym z ułożeniem włókien obserwujemy wzrost sztywności kompozytu w stosunku do materiału izotropowego osnowy. Wzrost sztywności występuje jeżeli $\eta > 1$ i jest tym większy im większy jest stopień zbrojenia i większy moduł Younga włókna w stosunku do modułu Younga osnowy. Zmniejszenie sztywności występuje gdy $\eta \in (0,1)$. Włókna w tym teście „pracują” tylko jednowymiarowo gdyż wyznaczony współczynnik Poissona (5.6)₄ jest równy współczynnikowi Poissona matrycy. Ponieważ w typowych materiałach izotropowych mamy $\nu > 0$, to ze wzoru (5.6)₂ i $\eta > 1$ wynika, że w teście rozciągania wykonywanym w kierunku prostym do włókien możemy zaobserwować spadek sztywności kompozytu w stosunku do materiału osnowy. Podkreślamy, że zaproponowany model kompozytu włóknistego jest bardzo uproszczony i jego podstawowym ograniczeniem stosowalności jest wartość stopnia zbrojenia, która powinna być znacznie mniejsza od jedności, por. pkt.3. Zakres stosowalności modelu powinien wobec tego wynikać z porównania przewidywań teoretycznych modelu z wynikami badań doświadczalnych. Pełniejszą interpretację pracy kompozytu w jednorodnych stanach naprężenia i odkształcenia otrzymamy analizując wzory (5.1)-(5.3) podstawiając w nich tensor podatności rozpatrywanego kompozytu. Analiza tych wzorów, to bezpośrednia interpretacja testów doświadczalnych, gdzie wersor zgodny z włóknami ma następującą postać:

$$\bar{\mathbf{m}} = \cos \varphi \tilde{\mathbf{b}}_1 + \sin \varphi \tilde{\mathbf{b}}_2. \quad (5.7)$$

W (5.7) $\tilde{\mathbf{b}}_1$ i $\tilde{\mathbf{b}}_2$ są wektorami bazowymi wybranego układu współrzędnych (opisują orientację próbki względem maszyny wytrzymałościowej). Podstawiając (5.6) w (5.5) otrzymujemy reprezentację macierzową tensora podatności $\mathbf{S}_{PSN} = \mathbf{C}_{PSN}^{-1}$. Znajomość tensora podatności pozwala podać interpretację modułów Younga, współczynników Poissona i modułów ścinania w podstawowych testach doświadczalnych.

Z (5.5), (5.1)-(5.3) i (5.7) wynika, że moduły Younga rozpatrywanego kompozytu, w funkcji kąta między kierunkiem zadanego obciążenia (rozciągania-ściskania próbki) a kierunkiem włókien, są następujące:

$$\frac{E(\varphi)}{E} = \frac{8(1-t)[1+(\eta-1)t]}{8-t[8+\eta(1+\nu)(3\nu-5)]-4\eta t(1-\nu^2)\cos 2\varphi - \eta t(1+\nu)^2 \cos 4\varphi}. \quad (5.8)$$

Zauważmy, że z (5.8) wynikają wzory (5.6)_{1,2}, tzn.: $E(0) = E_1$ oraz $E(\pi/2) = E_2$. Maksymalna wartość modułu Younga (5.8) jest niezależna od liczby Poissona matrycy i wynosi $E_{\max} = E_1$ (5.6)₁, co odpowiada kątom $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi$. Minimalne wartości (5.8) zależą natomiast zarówno od wartości kąta φ jak i pozostałych charakterystyk geometrycznych i mechanicznych kompozytu, por. rys.5.1. Analizę wzoru (5.8) można ograniczyć do $\varphi \in [0, \pi/2]$, ze względu na symetrie tensora sztywności kompozytu.

Z (5.5), (5.1)-(5.3) i (5.7) wynika, że współczynniki Poissona są następujące:

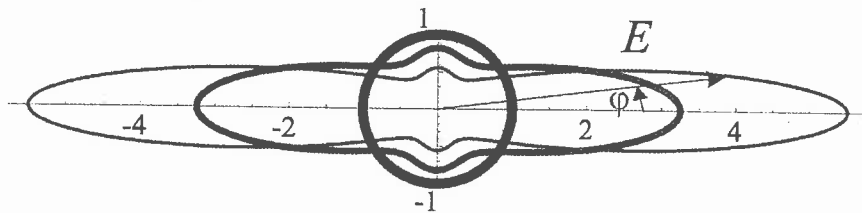
$$\frac{\nu(\varphi)}{E(\varphi)} = \frac{8(1-t)\nu + \eta t(1+\nu)^2 - \eta t(1+\nu)^2 \cos 4\varphi}{8(1-t)[1+(\eta-1)t]}. \quad (5.9)$$

Z (5.9) i (5.8) wynikają wzory (5.6)_{4,5}. Analizę wzoru (5.9) można ograniczyć do $\varphi \in [0, \pi/2]$, ze względu na postać wzoru (5.8), por. także rys.5.2.

Jak wyżej ze wzorów (5.5), (5.1)-(5.3) i (5.7) wynika, że moduły ścinania rozpatrywanego kompozytu z jedną rodziną włókien są następujące:

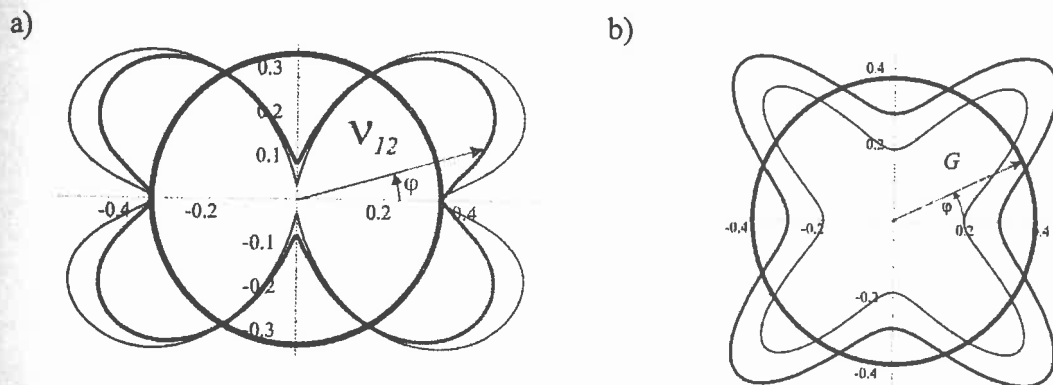
$$\frac{G(\varphi)}{E} = \frac{2(1-t)[1+(\eta-1)t]}{(1+\nu)[4-t(4+\eta(\nu-3))] + \eta t(1+\nu)\cos 4\varphi} \quad (5.10)$$

Aktualne są także uwagi dotyczące zakresu zmienności kąta φ . Porównanie przykładowych wykresów modułów Younga (5.8), współczynników Poissona (5.9) oraz modułów ścinania (5.10) w układzie biegunowym zamieszczono na rys.5.1, 5.2a i 5.2b. Na rysunkach tych pokazano m.in. wpływ stopnia zbrojenia na własności efektywne kompozytu, w przypadku gdy współczynnik Poissona osnowy wynosi $\nu=1/3$ oraz $\eta=E_z/E=10$. Wykresy zamieszczone na rys.5.1 i 5.2 potwierdzają wcześniejsze jakościowe uwagi o rozpatrywanym modelu materiału.



Rysunek 5.1. Wykresy modułów Younga kompozytu, o izotropowej osnowie ($\nu=1/3$) z jedną rodziną włókien o $\eta=10$, przeskalowany przez moduł Younga matrycy $E(\varphi)/E$: linia gruba $t=0$ (materiał osnowy), linia o średniej grubości $t=0.25$, linia cienka $t=0.5$

Na rysunku 5.1 widoczny jest wyraźny wpływ wzrostu stopnia zbrojenia na zwiększenie wartości modułu Younga w kierunku wzdłuż włókien i wyraźny spadek jego wartości w kierunku do włókien prostopadłym. Jest to podstawowa cecha, z której wynika ograniczona stosowalność omawianego modelu teoretycznego kompozytu włókniściego do sytuacji gdy $t \ll 1$.



Rysunek 5.2. Wykresy: a) współczynników Poissona kompozytu $\nu(\varphi)$, b) modułów ścinania kompozytu $G(\varphi)/E$, o izotropowej osnowie ($\nu=1/3$) z jedną rodziną włókien o parametrze $\eta=10$. Linia gruba $t=0$ (materiał osnowy), linia o średniej grubości $t=0.25$, linia cienka $t=0.5$

Wprowadzenie włókien do osnowy powoduje spadek wartości współczynnika Poissona w sytuacji gdy rozciągamy próbkę z kompozytu w kierunku prostopadłym do włókien, patrz rys.5.2a. Wtedy współczynnik Poissona osiąga w tym modelu kompozytu wartość minimalną. Maksymalna wartość współczynnika Poissona jest zależna od stopnia zbrojenia i od η , co wynika ze wzoru (5.9) i występuje przy rozciąganiu próbki pod pewnym kątem do włókien, który także zależy od t i η , por. rys.5.2a. Dla danego: t i η , należy policzyć maksimum funkcji (5.9) względem kąta $\varphi \in [0, \pi/2]$. Na rys.5.2b zamieszczone są wykresy modułów ścinania, z których wynika, że jeżeli włókno jest pod kątem $\pi/4$ w stosunku do zadanych sił ścinających, to sztywność kompozytu na ścinanie jest maksymalna. Minimalna sztywność na ścinanie występuje gdy włókna są równoległe (albo prostopadłe) do zadanych sił ścinających. Widzimy, że jakościowe przewidywania modelu teoretycznego w wymienionych sytuacjach są poprawne. Wnioskiem podstawowym z przeprowadzonej analizy jest spostrzeżenie, że model teoretyczny jakościowo poprawnie oddaje sprężysto-liniową efektywną „pracę” kompozytu włóknistego przy założeniu pełnej przyczepności włókien do matrycy, przy stosunkowo małym udziale objętościowym włókien kompozytu w porównaniu z udziałem objętościowym osnowy. Należy podkreślić, że analiza PSN w pełni oddaje podstawowe cechy także modelu 3D z jedną rodziną prostoliniowych włókien, patrz pkt.2, gdyż materiał w płaszczyźnie prostopadłej do włókien ma izotropowe własności sprężyste.

6. Przykłady

W najprostszym przypadku izotropowa matryca zbrojona jest jedną rodziną włókien i wtedy materiał ma ortotropowe, sprężyste własności efektywne. W diskutowanym modelu kompozytu z izotropową matrycą zbrojoną dowolną rodziną włókien, efektywne własności sprężyste powstałego materiału, w ogólności anizotropowego, są zdefiniowane tensorem sztywności (3.4). W przypadku kompozytu z dwoma rodzinami włókien tensor sztywności kompozytu ma następującą postać:

$$\mathbf{C}_{PSN} = \frac{E(1-t)}{(1-\nu)^2} (\nu \bar{\mathbf{1}} + (1-\nu) \bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}}) + t_1 E_{z1} \bar{\mathbf{M}}_1 \otimes \bar{\mathbf{M}}_1 + t_2 E_{z2} \bar{\mathbf{M}}_2 \otimes \bar{\mathbf{M}}_2, \quad (6.1)$$

gdzie $t = t_1 + t_2$, $\bar{\mathbf{M}}_1 = \bar{\mathbf{m}}_1 \otimes \bar{\mathbf{m}}_1$, $\bar{\mathbf{M}}_2 = \bar{\mathbf{m}}_2 \otimes \bar{\mathbf{m}}_2$. Możliwe są wtedy następujące trzy przypadki:

- i) wektory $\bar{\mathbf{m}}_1$ i $\bar{\mathbf{m}}_2$ wyznaczają dowolny kąt ostry,
- ii) wektory $\bar{\mathbf{m}}_1$ i $\bar{\mathbf{m}}_2$ są prostopadłe i $t_1 \neq t_2$,
- iii) wektory $\bar{\mathbf{m}}_1$ i $\bar{\mathbf{m}}_2$ są prostopadłe i $t_1 = t_2$ oraz $E_{z1} = E_{z2}$.

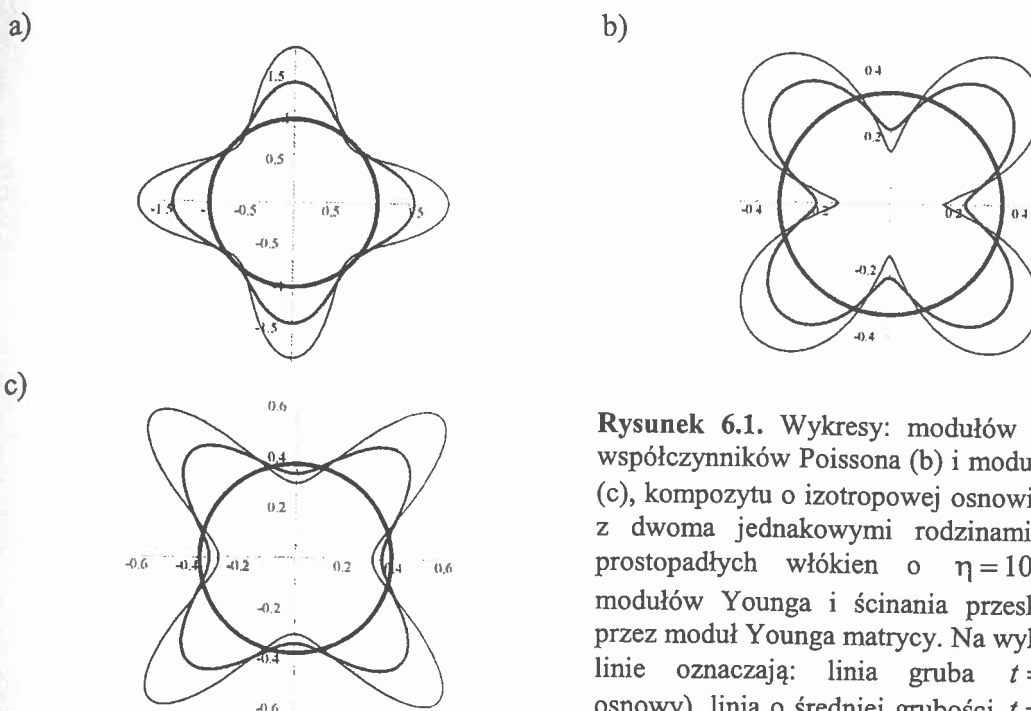
W wymienionych przypadkach materiał kompozytowy jest materiałem: (i) anizotropowym, (ii) ortotropowym i (iii) o symetrii regularnej.

Analizę wyników rozpoczniemy od przypadku (iii), co uwypukli różnicę między materiałem ortotropowym i materiałem o symetrii regularnej. W przypadku (iii) model kompozytu zdefiniowany jest następującym tensorem sztywności:

$$\mathbf{C}_{RPSN} = \frac{E(1-2t)}{(1-\nu)^2} (\nu \bar{\mathbf{1}} + (1-\nu) \bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}}) + t\eta E (\bar{\mathbf{M}}_1 \otimes \bar{\mathbf{M}}_1 + \bar{\mathbf{M}}_2 \otimes \bar{\mathbf{M}}_2), \quad (6.2)$$

gdzie t jest stopniem zbrojenia 1 i 2 rodziny włókien o module Younga $E_z = \eta E$.

Znajomość tensora podatności: $\mathbf{S}_{RPSN} = \mathbf{C}_{RPSN}^{-1}$, pozwala podać interpretację modułów Younga, współczynników Poissona i modułów ścinania w podstawowych testach doświadczalnych, por. [4].



Rysunek 6.1. Wykresy: modułów Younga (a), współczynników Poissona (b) i modułów ścinania (c), kompozytu o izotropowej osnowie ($\nu = 1/3$) z dwoma jednakowymi rodzinami wzajemnie prostopadłych włókien o $\eta = 10$. Wykresy modułów Younga i ścinania przeskalowane są przez moduł Younga matrycy. Na wykresach (a-c) linie oznaczają: linia gruba $t = 0$ (materiał osnowy), linia o średniej grubości $t = 0.05$, linia cienka $t = 0.1$.

Na rys.6.1. zamieszczono odpowiednie wykresy zmienności technicznych stałych sprężystości w układzie biegunowym. W stosunku do materiału ortotropowego materiał o symetrii regularnej ma dodatkowe symetrie względem grupy obrotów, por. rys.4.1 i 4.2. Ze wzrostem stopnia zbrojenia i jego sztywności obserwujemy jednakowy wzrost sztywności kompozytu na rozciąganie (ściskanie) w kierunkach włókien, natomiast spadek tej sztywności w kierunku rozciągania pod kątem $\pi/4$ względem jednej z rodziny włókien. Wtedy także są maksymalne wartości współczynników Poissona. Natomiast minimalne ich wartości występują przy rozciąganiu kompozytu w kierunku wzdłuż włókien.

Wprowadzając w kompozycie o tensorze sztywności (6.2) dwie dodatkowe, jednakowe rodziny włókien odpowiednio pod kątem $\pi/4$ i $3\pi/4$ otrzymamy materiał kompozytowy o izotropowych własnościach efektywnych, por. rys.6.2. W tym przypadku:

$$\sum_{n=1}^4 \bar{\mathbf{M}}_n \otimes \bar{\mathbf{M}}_n = \bar{\mathbf{1}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}}. \quad (6.3)$$

W przypadku (ii) model kompozytu zdefiniowany jest następującym tensorem sztywności:

$$\mathbf{C}_{OPSN} = \frac{E(1-t)}{(1-\nu)^2} (\nu \bar{\mathbf{1}} + (1-\nu) \bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}}) + t_1 E_{z1} \bar{\mathbf{M}}_1 \otimes \bar{\mathbf{M}}_1 + t_2 E_{z2} \bar{\mathbf{M}}_2 \otimes \bar{\mathbf{M}}_2, \quad (6.4)$$

gdzie $t = t_1 + t_2$ oraz rodziny włókien 1 i 2 są prostopadłe, tzn.: $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 = 0$. Zauważmy, że jeżeli $t_2 = 0$, to z (6.4) otrzymamy tensor sztywności kompozytu z jedną rodziną włókien.

7. U
7
Doty
lamir
spręż
powi
w lite
grafit
węgl
Rozt
komj
mate
komj

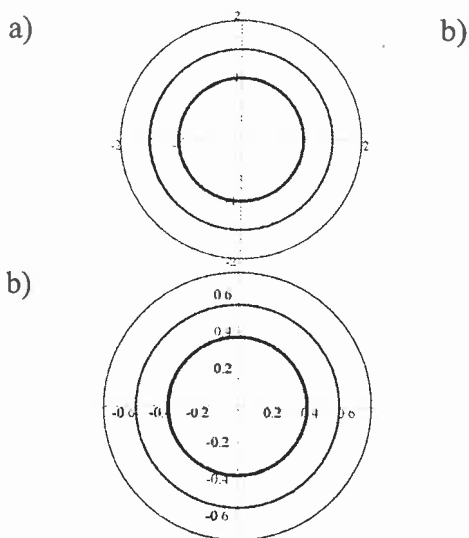
Tec
SI

a)
b)

c)

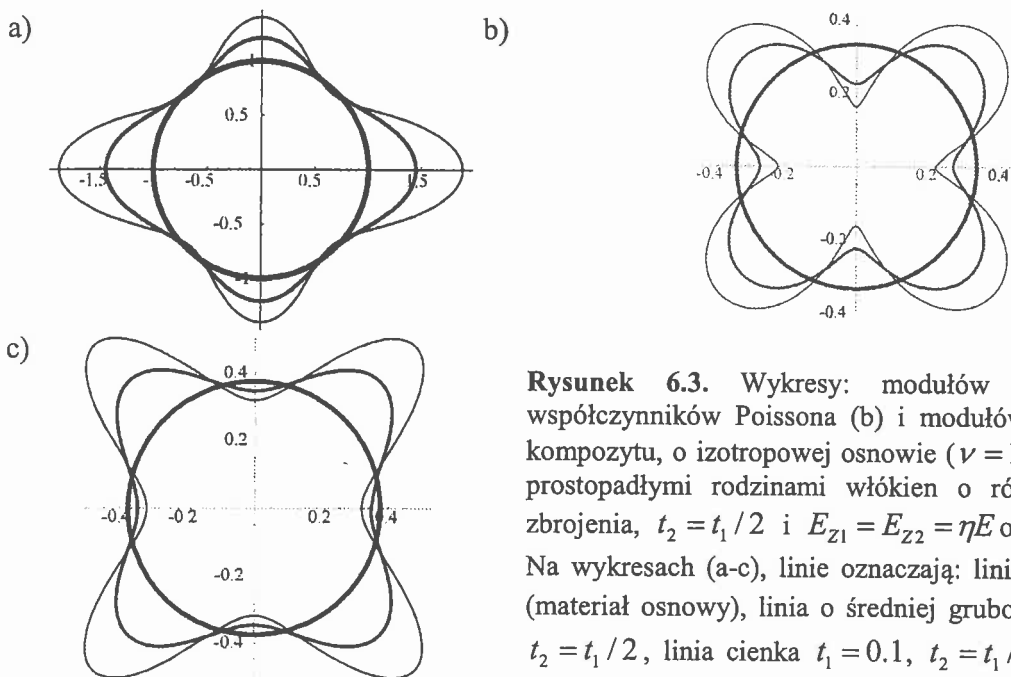
(5.3
kor
orie
Chi
wic
(ry

Z prostopadłości wektorów \mathbf{m}_1 i \mathbf{m}_2 wynika, że ze wzoru (6.4) można wyeliminować jeden z tensorów $\bar{\mathbf{M}}_n$, ponieważ $\bar{\mathbf{M}}_1 + \bar{\mathbf{M}}_2 = \bar{\mathbf{I}}$. Otrzymany kompozyt włóknisty ma ortotropowe własności efektywne.



Rysunek 6.2. Wykresy: modułów Younga (a), współczynników Poissona (b) i modułów ścinania (c) kompozytu, o izotropowej osnowie ($\nu = 1/3$) z czterema jednakowymi rodzinami włókien o $\eta = 10$, które przecinają się pod kątem $\pi/4$. Na wykresach (a-c), linie oznaczają: linia gruba $t = 0$, linia o średniej grubości $t = 0.05$, linia cienka $t = 0.1$ (skalowanie jw.)

Przykładowe wykresy technicznych stałych materiałowych w tym przypadku zamieszczono na rys.7. W stosunku jednak do modelu kompozytu z jedną rodziną włókien otrzymujemy materiał ortotropowy o nieco innych cechach, pożądanym w wielu aplikacjach kompozytów włóknistych. Dodatkowo model o tensorze sztywności (6.4) lepiej jakościowo ilustruje podstawowe cechy dowolnych materiałów ortotropowych i uwypukla także różnice między materiałami ortotropowymi a materiałami o symetrii regularnej.



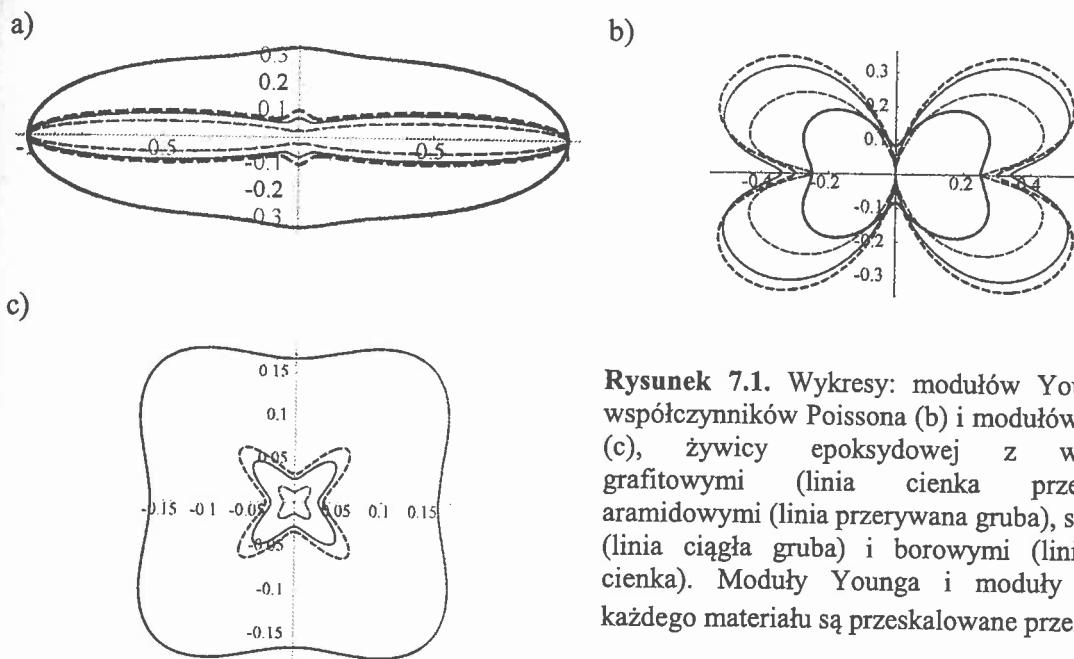
Rysunek 6.3. Wykresy: modułów Younga (a), współczynników Poissona (b) i modułów ścinania (c) kompozytu, o izotropowej osnowie ($\nu = 1/3$) z dwoma prostopadłymi rodzinami włókien o różnym stopniu zbrojenia, $t_2 = t_1/2$ i $E_{z1} = E_{z2} = \eta E$ oraz $\eta = 10$. Na wykresach (a-c), linie oznaczają: linia gruba $t = 0$ (materiał osnowy), linia o średniej grubości $t_1 = 0.05$, $t_2 = t_1/2$, linia cienka $t_1 = 0.1$, $t_2 = t_1/2$ (skalowanie jw.)

7. Uwagi o własnościach sprężystych typowych kompozytów włóknistych

Typowe dane doświadczalne kompozytów włóknistych podane są np. w monografii [6]. Dotyczą one PSN, gdyż z reguły materiały tego typu są stosowane jako cienkie warstwy laminatów. Są to dane orientacyjne, gdyż nie ma w nich pełnej informacji o własnościach sprężystych osnowy i włókien oraz sposobu ułożenia włókien i udziału objętościowego (albo powierzchniowego) włókien. Nawet moduł Younga żywicy epoksydowej podaje się w literaturze jako wartość od ok. 1.5 [GPa] do 7 [GPa], natomiast moduł Younga włókien: grafitowych (włókien węglowych o tzw. dużym stopniu zgrafityzowania) to ok. 420 [GPa], węglowych to ok. 240 [GPa], zaś szklanych wynosi od ok. 50 [GPa] do 100 [GPa]. Rozbieżności w wartościach tzw. technicznych stałych sprężystości w przypadku kompozytów włóknistych wynikają z wielu powodów, np.: rodzaju i właściwości osnowy, materiału włókien (w dużej mierze zależą także od ich średnicy) oraz technologii produkcji kompozytu.

Tablica 7.1. Dane wg: [6]

Techniczne stałe sprężystości	Żywica epoksydowa z włóknami:			
	grafitowymi	aramidowymi	szklanymi	borowymi
E_1 [GPa]	211	77.5	55	211
E_2 [GPa]	5.3	5.6	18.3	21.1
G_{12} [GPa]	2.6	2.1	9.1	7
ν_{12}	0.25	0.34	0.25	0.30



Rysunek 7.1. Wykresy: modułów Younga (a), współczynników Poissona (b) i modułów ścinania (c), żywicy epoksydowej z włóknami: grafitowymi (linia cienka przerywana), aramidowymi (linia przerywana gruba), szklanymi (linia ciągła gruba) i borowymi (linia ciągła cienka). Moduły Younga i moduły ścinania każdego materiału są przeskalowane przez E_1 .

Na podstawie danych zamieszczonych w tab.7.1 podano na rys.7.1 wykresy funkcji (5.1)-(5.3), por. także przykłady z pkt.5 i 6. Zauważmy, że wyraźnie anizotropowe własności kompozytu ujawniają się w próbach rozciągania (ściskania) próbek kompozytu przy różnej orientacji włókien kompozytu w stosunku do zadanego obciążenia, patrz rys.7.1a. Charakterystyczne cechy anizotropowych własności sprężystych kompozytów włóknistych widoczne są także na wykresach współczynników Poissona (rys.7.1b) i modułów ścinania (rys.7.1c).

8. Uwagi i wnioski

- i) Model teoretyczny kompozytu włóknistego zaproponowany w pkt.2 jest często stosowany w mechanice kompozytów, nie podaje się tam jednak konsekwentnego wyprowadzenia relacji konstytutywnych z rozważań energetycznych. Trudno jest wobec tego wskazać kto był pierwszym twórcą tego modelu, por. np. [5] i literaturę tam cytowaną.
- ii) W pracy pokazano konsekwentne wyprowadzenie relacji konstytutywnych zagadnień płaskiego stanu naprężenia. Podano ograniczenia modelu kompozytu, zarówno z punktu widzenia założeń upraszczających jak i interpretacji tzw. efektywnych własności sprężystych.
- iii) Stosując zaproponowany model zilustrowano wszystkie grupy symetrii płaskich tensorów Hooke'a. W tym celu wprowadzono odpowiednią liczbę różnie zorientowanych rodzin włókien. Tę samą grupę symetrii tensorów Hooke'a można zrealizować na wiele sposobów, w zależności od sztywności albo stopnia zbrojenia poszczególnych rodzin włókien i ich wzajemnego ułożenia. Pomimo iż typy anizotropii liniowych relacji konstytutywnych mogą być jednakowe to własności efektywne modelowanych kompozytów istotnie różnie.
- iv) Model ten ze względu na swą prostotę może być efektywnie wykorzystywany na wstępnym etapie projektowania efektywnych własności sprężystych kompozytów włóknistych.

Bibliografia

- [1] Blinowski A., Ostrowska-Maciejewska J., Rychlewski: Two-dimensional Hooke's tensor-isotropic decomposition, effective symmetry criteria, Arch. Mech., 48, pp. 325-345, 1996.
- [2] Boehler J.P. [ed]: *Applications of tensor functions in solid mechanics*, CISM Courses and Lectures No. 292, Springer-Verlag, Wien-New York, 1987.
- [3] Gibson L.J., Ashby M.F.: *Cellular solids: structure and properties*, Pergamon Press, Oxford-Toronto, 1988.
- [4] Jemioło S.: *Applications of invariants of double symmetric fourth-order tensors in optimization theory of elastic anisotropic materials*, Reports to the Ford Motor Company, Design Optimization/Vehicle Safety, Research Department-Scientific Research Laboratories, Dearborn Michigan, 1999.
- [5] Jemioło S.: O tarczach i typach anizotropii materiałów liniowo sprężystych, Theoretical Foundations of Civil Engineering, Polish-Ukrainian Transactions, W. Szcześniak [ed], str. 87-96, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2006.
- [6] Jemioło S., Gajewski M.: Cztery typy symetrii płaskich tensorów Hooke'a na przykładzie modelu kompozytu włóknistego, Theoretical Foundations of Civil Engineering, Polish-Ukrainian Transactions, W. Szcześniak [ed], str. 405-416, Oficyna Wydawnicza PW, Dnepropetrovsk-Warszawa 2005.
- [7] Jemioło, S., Lewiński, P., Kwieciński, M., Wojewódzki, W.: Tensor and vector-valued constitutive models for nonlinear analysis of reinforced concrete structures, in *Inelastic Solids and Structures*, Antoni Sawczuk Memorial Volume, ed. M.Kleiber and J.A.Konig, Pineridge Press, Swansea, U.K., pp.197-209, 1990.
- [8] Kurnik W., Tylikowski A.: *Mechanika elementów laminowanych*, OW PW, Warszawa 1997.
- [9] Vianello M.: Symmetry classes for elasticity tensors, Arch. Mech., 49, pp. 197-208, 1997.

Publikacje z serii wydawniczej „Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności” są prezentowane w zakładce „Prace naukowe” na stronie internetowej Oficyny Wydawniczej Politechniki Warszawskiej:

www.wydawnictwopw.pl

Oficina Wydawnicza Politechniki Warszawskiej prowadzi sprzedaż:

- ◆ stacjonarną – w księgarniach OWPW
– Gmach Główny Politechniki Warszawskiej przy Placu Politechniki 1
– ul. Noakowskiego 18/20
- ◆ internetową –
<http://www.wydawnictwopw.pl>
- ◆ wysyłkową – tel. 22 234-75-03
fax 22 234-70-60
e-mail: oficina@wpw.pw.edu.pl



ISBN 978-83-7814-066-5



9 788378 140665