Rozdział IV Trajektorie wartości własnych w zagadnieniach płaskich

Aleksander SZWED, Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI

1. Wstęp

Zagadnienie wyznaczenia trajektorii wartości własnych płaskich pól tensorowych drugiego rzędu ma podstawowe znaczenie w analizie pracy konstrukcji tarczowych i płytowych. W celu racjonalnego kształtowania albo zbrojenia konstrukcji w tarczach wyznacza się np. trajektorie naprężeń głównych zaś w płytach trajektorie momentów głównych. Znalezienie wartości własnych stanu naprężenia i odkształcenia albo tensora momentów jest zagadnieniem algebraicznym, natomiast znalezienie kierunków głównych tych pól sprowadza się z reguły do odpowiedniej interpretacji wyników badań elastooptycznych albo do numerycznego całkowania nieliniowych równań różniczkowych z zadanymi warunkami początkowymi, por. np. [3,6,7]. Należy zaznaczyć, że problem jest złożony i trudno go zalgorytmizować. Standardowo programy metody elementów skończonych zawierają tylko algorytmy znajdowania wartości własnych, zaś kierunki własne są znajdowane algebraicznie tylko w punktach całkowania. Nie otrzymuje się wobec tego trajektorii tych pól. Zarówno w przypadku tarcz jak i płyt zagadnienie na wyznaczenie wartości własnych i ich trajektorii jest analogiczne. W pracy podano przykładowe wyniki obliczeń numerycznych w przypadku płyt cienkich Kirchhoffa. Zamieszczamy także przykładowe testy, odpowiadające znanym rozwiązaniom analitycznym, które weryfikują zastosowane algorytmy numeryczne.

Rozdział ten jest kontynuacją wcześniejszych prac autorów, patrz [1,2] i literaturę tam cytowaną, w których analizowane były m.in. zagadnienia modelowania i klasyfikacji typów symetrii materiałów kompozytowych (o izotropowej osnowie wzmocnionej ciągłymi włóknami) oraz zadanie wyznaczenia trajektorii wartości własnych symetrycznych pól tensorowych w tarczach i płytach. Obecnie rozpatrujemy obciążoną równomiernie płytę prostokątną, która jest na dwóch przeciwległych brzegach swobodnie podparta i na dwóch pozostałych utwierdzona. W celu zdefiniowania tensora sztywności płyty stosujemy model kompozytu włóknistego analizowanego w rozdziale III. Głównym celem jest wyznaczenie trajektorii momentów i krzywizn głównych w przypadkach gdy tensor sztywności płyty ma co najmniej grupę symetrię ortotropii. Zastosowany prosty model kompozytu pozwala na ilościową i jakościową analizę wpływu stopnia zbrojenia płyty na przebieg trajektorii.

2. Sformułowanie zagadnienia wyznaczenia trajektorii wartości własnych w przypadku płaskich symetrycznych pól tensorowych drugiego rzędu

Zagadnienie własne w przypadku płaskiego pola tensorowego drugiego rzędu $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ formułuje się w następujący sposób:

$$(\mathbf{T}(\mathbf{x})-T_i(\mathbf{x})\mathbf{I})\mathbf{v}_i(\mathbf{x})=\mathbf{0},\ \mathbf{x}\in\Omega. \tag{2.1}$$

We wzorze (2.1) $\mathbf{I}$ jest tensorem jednostkowym, $\mathbf{v}_i(\mathbf{x})$ ($i=1,2$) to pole wektora własnego odpowiadającego wartości własnej $T_i(\mathbf{x})$ pola tensorowego $\mathbf{T}(\mathbf{x})$. Zazwyczaj w zadaniach mechaniki kontinuum, z zagadnienia brzegowego wyznaczamy pole $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, a następnie rozwiązujemy zagadnienie własne w konkretnych punktach obszaru Ω. Zagadnienie to ma wtedy charakter czysto algebraiczny.

Każdy symetryczny i płaski tensor drugiego rzędu można rozłożyć na część kulistą i dewiatorową zgodnie ze wzorem:

$$\mathbf{T}=\frac{1}{2}(\mathrm{tr}\mathbf{T})\mathbf{I}+\mathbf{D}=\mathbf{K}+\mathbf{D}. \tag{2.2}$$

Z kolei każdy tensor kulisty możemy przedstawić w następującej postaci: $\mathbf{K}(\mathbf{x})=k(\mathbf{x})\mathbf{I}$, co oznacza, że wektory własne mogą być dowolne. Wynika z tego, że jeżeli pole tensorowe w danym punkcie obszaru Ω „degeneruje się" do tensora izotropowego to występują tzw. punkty osobliwe, patrz [6] str. 211-215. Stąd wniosek, że poza punktami osobliwymi zagadnienie własne może być sformułowane wyłącznie dla części dewiatorowej pola tensorowego $\mathbf{T}(\mathbf{x})$. Mówiąc precyzyjniej w tym sformułowaniu wszystkie typy punktów osobliwych sprowadzają się tylko do jednego przypadku, w którym dewiator jest zerowy. Ponieważ celem pracy jest wyznaczenie trajektorii, to wprowadzamy pewien unormowany dewiator o postaci:

$$\overline{\mathbf{D}}=\sqrt{2}\frac{\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|}. \tag{2.3}$$

W (2.3) wprowadzono następującą normę symetrycznego tensora drugiego rzędu: $\|\cdot\|=\sqrt{\mathrm{Tr}(\mathbf{D}^2)}=\sqrt{\mathbf{D}.\mathbf{D}}$ (kropką oznaczono iloczyn skalarny tensorów). Warto zauważyć, że tensor $\overline{\mathbf{D}}$ ma następujące własności:

$$\mathrm{Tr}(\overline{\mathbf{D}})=0,\ \overline{\mathbf{D}}^2=\mathbf{I},\ \mathrm{Det}(\overline{\mathbf{D}})=-1. \tag{2.4}$$

Jest to więc tensor ortogonalny o interpretacji odbicia lustrzanego (albo obrotu z odbiciem lustrzanym), którego druga potęga realizuje operację identycznościową. Łatwo sprawdzić, że wartości własne i odpowiadające im tensory własne w przypadku tensora $\overline{\mathbf{D}}$ wynoszą:

$$\overline{D}_1=1,\ \mathbf{m}\otimes\mathbf{m},\quad \overline{D}_2=-1,\ \mathbf{I}-\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}, \tag{2.5}$$

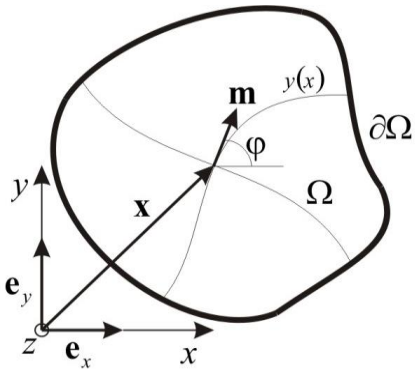
gdzie: $\mathbf{m}=\cos\varphi\,\mathbf{e}_x+\sin\varphi\,\mathbf{e}_y$, jest wektorem własnym wyznaczonym z dokładnością do znaku o jednostkowej długości ($\|\mathbf{m}\|=1$), por. rys.2.1.

Tensor (2.3) ma więc postać:

$$\overline{\mathbf{D}}=2\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}-\mathbf{I}, \tag{2.6}$$

zaś jego reprezentacja w bazie $\{\mathbf{e}_i\}$, $i=x,y$ jest następująca:

$$\overline{\mathbf{D}} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$



Rysunek 2.1. Interpretacja kąta φ i wektora własnego $\mathbf{m}$

Macierze z prawej i lewej strony reprezentacji diagonalnej tensora $\overline{\mathbf{D}}$ są reprezentacjami ortogonalnych tensorów realizujących obrót w przestrzeni dwuwymiarowej o jednostkowym wyznaczniku. Z (2.7) wynika m.in., że

$$\mathrm{tg}2\varphi = \frac{\overline{D}_{xy}(x,y)}{\overline{D}_{xx}(x,y)} = \frac{D_{xy}(x,y)}{D_{xx}(x,y)}, \tag{2.8}$$

gdzie podkreśliliśmy, że składowe pola tensorowego są funkcjami składowych wektora $\overline{\mathbf{x}}$ określającego położenie cząstki w obszarze Ω oraz że wzór (2.8) jest identyczny dla składowych dewiatora nieunormowanego. Ponieważ z rys. 1 wynika interpretacja kąta φ oraz funkcji $tg\varphi$ jako pochodnej funkcji $y(x)$ ($\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$), a także ze względu na tożsamość trygonometryczną:

$$\frac{2\mathrm{tg}\phi}{1-\mathrm{tg}^2\phi} = \mathrm{tg}2\phi, \tag{2.9}$$

równanie (2.8) przekształcić możemy do następującej postaci:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{2\overline{D}_{xx}}{\overline{D}_{xy}}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - 1 = 0. \tag{2.10}$$

Równanie to definiuje dwie rodziny ortogonalnych krzywych, jedną rodzinę $y_{(1)}$ dla pierwszej wartości własnej i drugą rodzinę $y_{(2)}$ dla drugiej. Z równania (2.10) otrzymujemy zatem dwa równania różniczkowe nieliniowe o postaci,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\overline{D}_{xx}}{\overline{D}_{xy}} \pm \sqrt{1+\left(\frac{\overline{D}_{xx}}{\overline{D}_{xy}}\right)^2} = 0. \tag{2.11}$$

Równania te całkujemy numerycznie gdyż w ogólności nie potrafimy znaleźć rozwiązania analitycznego. Jest to zatem zagadnienie Cauchy'ego z warunkami początkowymi zadanymi osobno dla każdej krzywej. Osobliwość w równaniach (2.11) występuje tylko wtedy, gdy

$\overline{D}_{xy} = 0$, a to oznacza, że kierunki główne pokrywają się z osiami układu współrzędnych. Z $(2.4)_3$ wynika, że wtedy, gdy: $\overline{D}_{xy} = 0$, składowa przyjmuje wartość $\overline{D}_{xx} = \pm 1$.

Z faktu, że analizujemy pole tensorów wynika, że w każdym punkcie obszaru Ω, kąt φ jest funkcją $\bar{\mathbf{x}}$. Wzór (2.8) (albo analogiczny wzór dla pola $\mathbf{T}(\bar{\mathbf{x}})$) przy ustalonym $\varphi = \varphi_n = const$, definiuje (w postaci funkcji uwikłanej) równanie linii izoklinicznej [3,6]:

$$F(x,y) = \operatorname{tg} 2\varphi_n = \frac{2T_{xy}(x,y)}{T_{xx}(x,y) - T_{yy}(x,y)}, \tag{2.12}$$

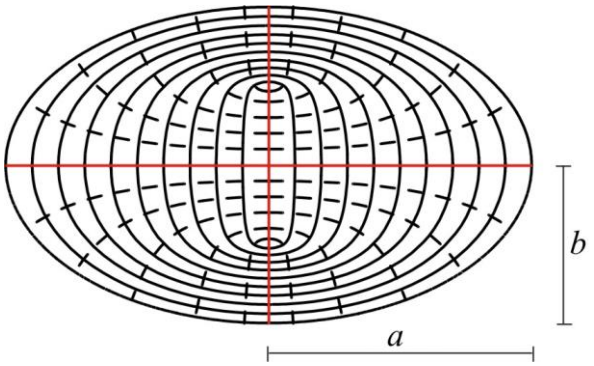
gdzie $\varphi_n = const$ nazywany jest parametrem izokliny, natomiast pole tensorowe ma interpretację np. stanu naprężenia w tarczy. Z wyprowadzenia wzoru (2.12) wynika, że liniami izoklinicznymi (nazywanymi krócej izoklinami) są miejsca geometryczne punktów w obszarze Ω, w których każde z naprężeń głównych ma niezmienny kierunek. Znając składowe stanu naprężenia można wykreślić izokliny. Należy zaznaczyć, że izokliny otrzymuje się doświadczalnie stosując metody elastooptyki. Znajomość izoklin pozwala na graficzne wykreślenie trajektorii naprężeń głównych nazywanych liniami izostatycznymi, patrz [3,6] i przykład 1 w pkt.3. Zagadnienie poszukiwania trajektorii naprężeń głównych sprowadza się do znalezienia układu współrzędnych, w którym reprezentacja stanu naprężenia jest diagonalna.

3. Przykłady zastosowań w analizie płyt cienkich Kirchhoffa

Zagadnienie wyznaczenia trajektorii wartości własnych unormowanych dewiatorów symetrycznych płaskich tensorów drugiego rzędu zilustrowane zostanie na przykładzie płyt Kirchhoffa. Wyznaczone zostaną trajektorie unormowanego dewiatora tensora momentu, które dla płyt izotropowych pokrywają się z trajektoriami tensora krzywizn.

Przykład 1. Płyta eliptyczna utwierdzona na brzegu o stosunku wymiarów a/b=5/3

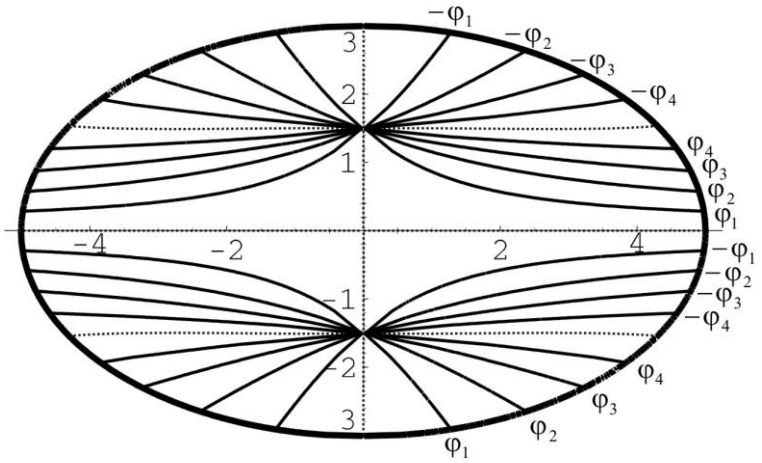
Zadanie dotyczy płyty eliptycznej o stosunku wymiarów $a/b = 5/3$ wykonanej z materiału izotropowego i utwierdzonej na całym brzegu. Rozwiązanie tego zadania jest elementarne i nie będziemy go tutaj przytaczać.



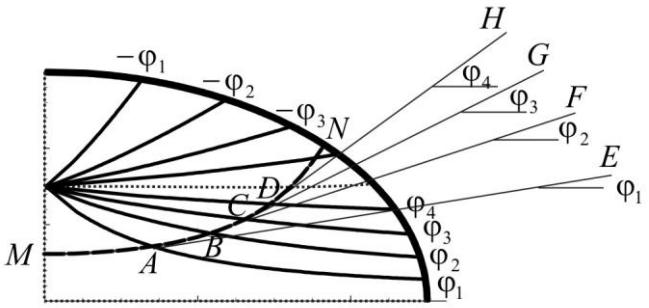
Rysunek 3.1. Trajektorie wartości własnych dewiatora tensora momentów w przypadku płyty eliptycznej utwierdzonej na całym brzegu

Wyznaczenie trajektorii wartości własnych unormowanego dewiatora tensora momentów w płycie zgodnie z (2.11) sprowadza się do rozwiązania nieliniowych równań różniczkowych z warunkami początkowymi jak to przedstawiono w pkt.2. Warto podkreślić, że w przypadku tego zadania poszukiwane trajektorie nie zależą od współczynnika Poissona materiału płyty, a jedynie od stosunku charakterystycznych wymiarów płyty. Oczywiste jest, że z rozwiązania tego zadania można także uzyskać wyniki dotyczące płyty kołowej jak i pasma płytowego, gdzie znane są rozwiązania analityczne równań (2.11). Na rys.3.1 zaprezentowano trajektorie wartości własnych dewiatora tensora momentów.

Dodatkowo, na przykładzie tej płyty pokazano, por. rys.3.2, linie izokliniczne wyznaczone dla różnych wartości parametru φ. Wszystkie izokliny przechodzą przez tzw. punkty osobliwe, a izokliny skrajne, tzn. dla: $\varphi = 0$ i $\varphi = \frac{\pi}{4}$, pokrywają się z wyznaczonymi z równania $\frac{\overline{D}_{xx}}{\overline{D}_{xy}} = 0$ liniami osobliwymi (na rys.3.2 i 3.3 oznaczone linią przerywaną), zaś na przecięciu tych linii znajdują się tzw. punkty osobliwe [6].



Rysunek 3.2. Wykresy izoklin przy różnych wartościach parametru $\varphi = \varphi_n = const$ ($\varphi_1 = \frac{\pi}{20}$, $\varphi_2 = \frac{2\pi}{20}$, $\varphi_3 = \frac{3\pi}{20}$ i $\varphi_4 = \frac{4\pi}{20}$)



Rysunek 3.3. Interpretacja wykreślnego sposobu wyznaczania trajektorii na podstawie wykresów izoklin

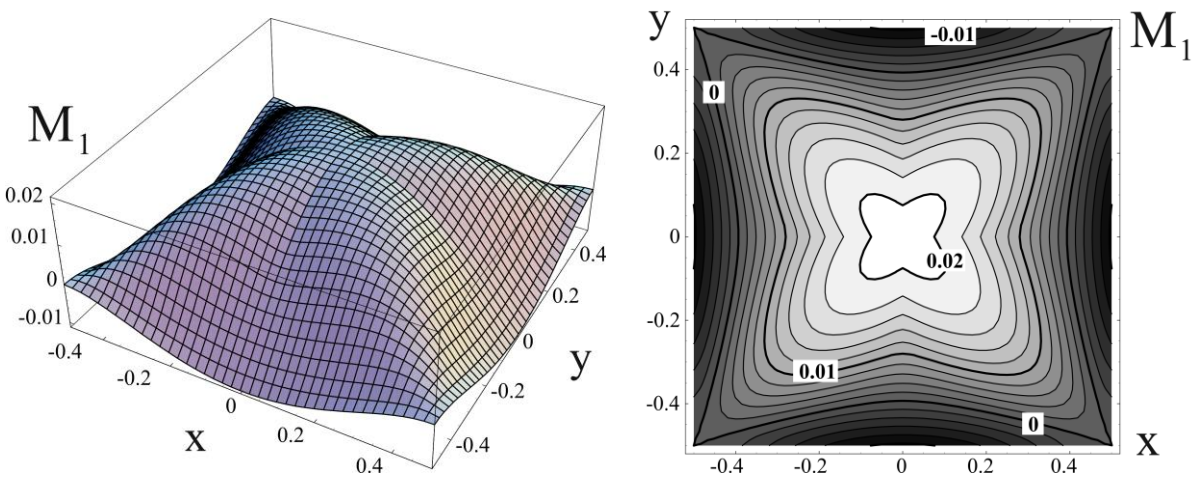
Sposób graficzny wyznaczenia trajektorii *MN* sprowadza się do wykreślenia dla każdej linii izoklinicznej rodziny równoległych linii pod kątem φ_n (interpretowanym jak na rys.3.1)

zgodnym z parametrem danej izokliny. Przecięcia kierunków pewnych linii (na rys.3.3, linii *AE*, *BF*, *CG* i *DH*) utworzą w przybliżeniu trajektorię.

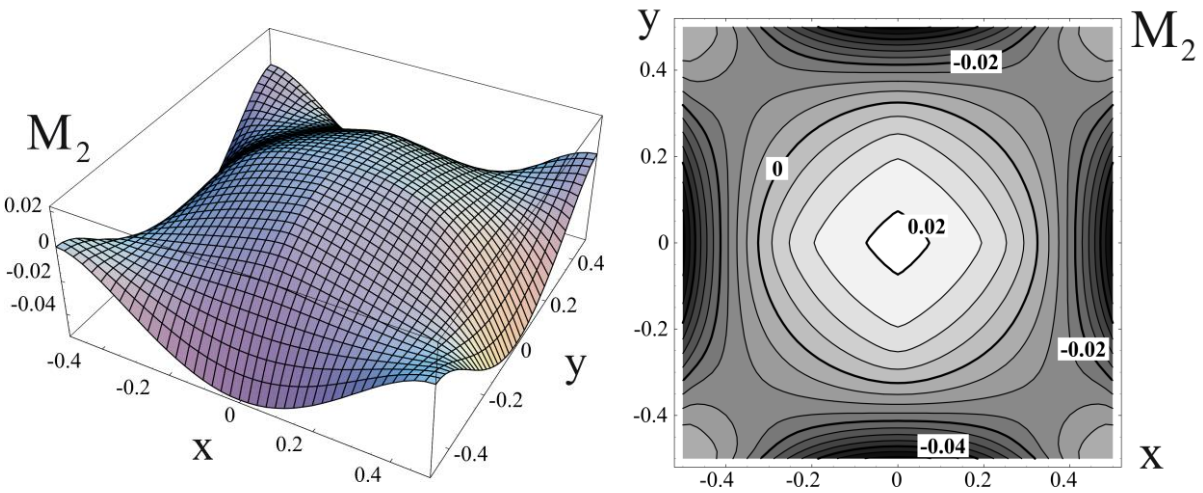
Przykład 2. Płyta kwadratowa utwierdzona na wszystkich brzegach i obciążona równomiernie

W przypadku izotropowej płyty kwadratowej utwierdzonej na wszystkich brzegach i obciążonej równomiernie, składowe tensora momentu wyznaczono metodą Ritza-Timoshenki. Funkcję aproksymującą ugięcie przyjęto w postaci odpowiednich wielomianów.

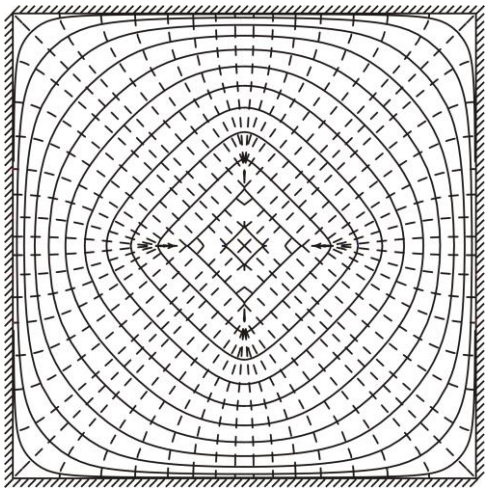
Na rys.3.4 i 3.5 przykładowo zaprezentowano wykresy warstwicowe i przestrzenne momentów głównych w analizowanej płycie. Z kolei na rys.3.6 zamieszczono wykresy trajektorii wartości własnych dewiatora tensora momentów. Na tym samym rysunku widoczne są cztery punkty osobliwe.



Rysunek 3.4. Wykres przestrzenny i warstwicowy maksymalnego momentu głównego M_1. Mnożnik do wartości: $q\,a^2$



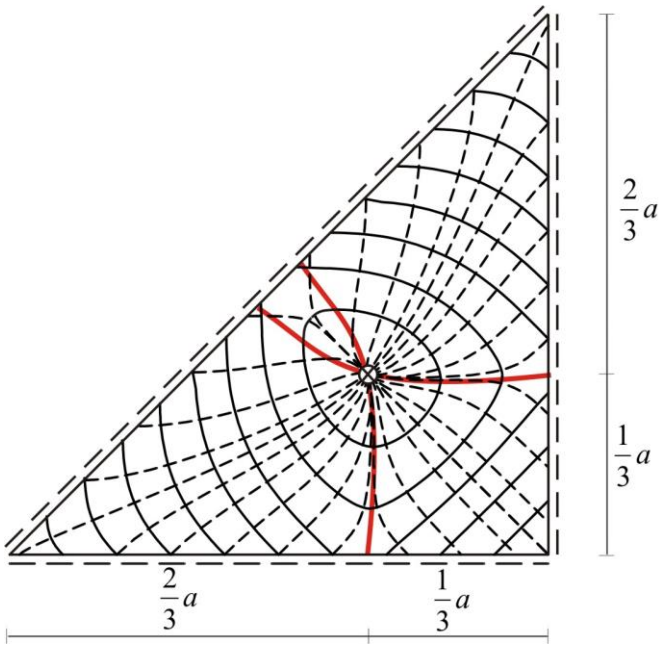
Rysunek 3.5. Wykres przestrzenny i warstwicowy minimalnego momentu głównego M_2. Mnożnik do wartości: $q\,a^2$



Rysunek 3.6. Wykresy trajektorii wartości własnych dewiatora tensora momentów w przypadku utwierdzonej płyty izotropowej w kształcie kwadratu

Zestawienie wykresów warstwicowych momentów głównych i wykresów trajektorii tych momentów stanowi pełną informację o analizowanym polu tensorowym. Obecnie standardem jest np. w programach MES możliwość wykonania wykresów warstwicowych uporządkowanych wartości własnych.

Przykład 3. Przegubowo podparta płyta trójkątna wykonana z materiału izotropowego obciążona siłą skupioną



Rysunek 3.7. Wykresy trajektorii wartości własnych dewiatora tensora momentów w przypadku płyty trójkątnej obciążonej siłą skupioną i przegubowo podpartej na wszystkich brzegach

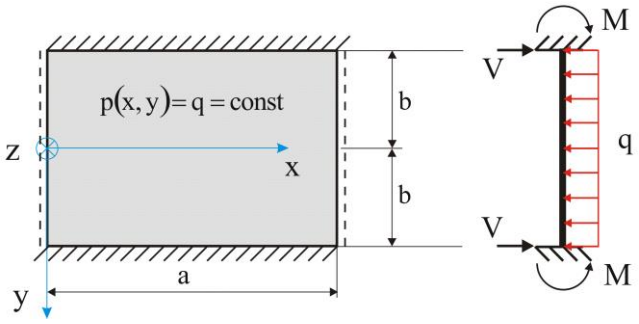
Analizowana jest przegubowo podparta płyta w kształcie prostokątnego trójkąta równoramiennego wykonana z materiału izotropowego i obciążona siłą skupioną jak na

rys.3.7. Zadanie znalezienia składowych tensora momentu zostało rozwiązane podwójnymi szeregami sinusowymi, por. np.[4]. Na rys.3.7 zaprezentowano trajektorie wartości własnych dewiatora tensora momentu w płycie. W otoczeniu punktu przyłożenia siły skupionej trajektorie zbliżają się do centrycznie ułożonych kół i promieniście rozchodzących się linii, a więc do rozwiązania zadania na trajektorie w płycie kołowej obciążonej siłą skupioną albo jak w każdym zagadnieniu kołowo symetrycznym (rozwiązanie to można uzyskać np. z prezentowanego w tym punkcie przykładu dotyczącego płyty eliptycznej). Punkt osobliwy jest pod siłą tj. w miejscu przecięcia linii osobliwych, patrz rys.3.7.

4. Sformułowanie i rozwiązanie zadania zginania prostokątnej płyty ortotropowej obciążonej równomiernie

Analizujemy zadanie zginania prostokątnej płyty ortotropowej obciążonej równomiernie, która jest na dwóch przeciwległych brzegach swobodnie podparta i na dwóch pozostałych utwierdzona, por. rys.4.1. W rozwiązaniu zadania stosujemy metodę pojedynczych szeregów Fouriera [4].

Rozpatrzymy dwa przypadki płyty wykonanej z żywicy epoksydowej zbrojonej włóknami szklanymi. Taki typ kompozytu włóknistego zastosujemy do równomiernie obciążonej płyty prostokątnej, która jest swobodnie podparta na dwóch przeciwległych krawędziach i utwierdzona na pozostałych. Przeanalizujemy układ włókien zgodny z kierunkami podparcia płyty w jednym lub dwóch kierunkach, czyli o osiach głównych ortotropii pokrywających się z osiami układu współrzędnych, por rys.4.1. Przebadamy także szczególny przypadek płyty wykonanej z kompozytu o symetrii regularnej.



Rysunek 4.1. Zagadnienie brzegowe prostokątnej płyty swobodnie podpartej na dwóch przeciwległych brzegach i utwierdzonej na pozostałych obciążonej równomiernie.

Ponieważ funkcja obciążenia jest funkcją stałą $p(x,y)=q$ to współczynniki rozwinięcia obciążenia w pojedynczy szereg sinusowy wynoszą,

$$q_n = \frac{2q}{a}\int_0^a \sin(\alpha_n x)\mathrm{d}x = \frac{4q}{\alpha_n a} = \frac{4q}{(2n-1)\pi}, \quad \text{gdzie} \quad \alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{a} \quad \text{dla} \quad n \in N. \tag{4.1}$$

W przypadku zbrojenia dwoma ortogonalnymi rodzinami włókien tensor sztywności kompozytu ma postać, por. [1]:

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-t)}{(1-\nu)^2}\left(\nu\bar{\mathbf{1}} + (1-\nu)\bar{\mathbf{I}}\otimes\bar{\mathbf{I}}\right) + t_1 E_{Z1}\overline{\mathbf{M}}_1\otimes\overline{\mathbf{M}}_1 + t_2 E_{Z2}\overline{\mathbf{M}}_2\otimes\overline{\mathbf{M}}_2, \tag{4.2}$$

gdzie całkowity stopień zbrojenia wynosi: $t = t_1 + t_2 < 1$; E, ν są modułem Younga i liczbą Poissona izotropowej matrycy, E_Z modułem Younga zbrojenia oraz $\overline{\mathbf{M}}_n = \overline{\mathbf{m}}_n \otimes \overline{\mathbf{m}}_n$; zaś $\bar{\mathbf{I}}$ i $\bar{\mathbf{1}}$ płaskim tensorem jednostkowym odpowiednio drugiego i czwartego rzędu. Gdy wersory kierunków zbrojenia $\overline{\mathbf{m}}_1$ i $\overline{\mathbf{m}}_2$ są prostopadłe i $t_1 \neq t_2$, to mamy przypadek ortotropii, zaś gdy wersory $\overline{\mathbf{m}}_1$ i $\overline{\mathbf{m}}_2$ są prostopadłe i $t_1 = t_2$, to mamy materiał o symetrii regularnej.

Jeżeli włókna są rozmieszczone (równomiernie w całej płycie) zgodnie z osiami układu współrzędnych x i y na rys.4.1, to reprezentacja tensora sztywności (4.2) w tensorowej bazie zgodnej z notacją Voigta [5] jest następująca:

$$\mathbf{C} \to E \begin{bmatrix} \dfrac{1-t_1-t_2}{1-\nu^2} + t_1\eta & \nu\dfrac{1-t_1-t_2}{1-\nu^2} & 0 \\ \nu\dfrac{1-t_1-t_2}{1-\nu^2} & \dfrac{1-t_1-t_2}{1-\nu^2} + t_2\eta & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-t_1-t_2}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

w której $\eta = E_Z / E$ jest stosunkiem modułów zbrojenia i matrycy. Do obliczeń przyjmujemy następujące dane liczbowe dla żywicy epoksydowej: $E = 4.3\,GPa$, $\nu = 0.25$ i włókien szklanych $E_Z = 86.0\,GPa$. Stąd uzyskujemy $\eta = 20.0$. Kierunki i stopnie zbrojenia będą przyjmowane w kilku wariantach. Gdy przyjmiemy, że $t_2 = 0$, to zbrojenie występuje jedynie w kierunku współrzędnej x, natomiast gdy $t_1 = 0$, to zbrojenie jest w kierunku y. Symetria regularna wystąpi gdy $t_1 = t_2$. Wykorzystując definicje sztywności płyty ortotropowej wg zależności:

$$\mathbf{D} = \frac{h^3}{12}\mathbf{C}, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{D} \to \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

wprowadzamy parametry sztywności płyty o postaci,

$$\delta = \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}, \qquad \gamma = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} \qquad \text{oraz} \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{\delta + \gamma}{2}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{\delta - \gamma}{2}}. \tag{4.5}$$

Po wykorzystaniu (4.3) i (4.4) w (4.5) otrzymamy następujące wzory:

$$\delta = \sqrt{\frac{1-t_1-t_2+t_1\eta(1-\nu^2)}{1-t_1-t_2+t_2\eta(1-\nu^2)}}, \qquad \gamma = \frac{1-t_1-t_2}{1-t_1-t_2+t_2\eta(1-\nu^2)}. \tag{4.6}$$

Na rys.4.2 przedstawiono zależność parametrów δ i γ dla przyjętych danych materiałowych. Z danych wynika, że parametr γ spełnia ograniczenie $0 \le \gamma \le 1$, co implikuje zawsze jeden przypadek rozwiązania zadania zginania rozpatrywanej płyty. Wobec tego funkcja ugięcia płyty ma postać:

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ w_n^S + A_n \operatorname{ch}(\alpha_n \varepsilon y)\cos(\alpha_n \mu y) + D_n \operatorname{sh}(\alpha_n \varepsilon y)\sin(\alpha_n \mu y) \right\} \sin(\alpha_n x). \tag{4.7}$$

Stałe całkowania A_n i D_n wyznaczymy z warunków brzegowych utwierdzenia dla $y = b$:

$$w(x,b) = 0, \qquad \Phi_y(x,b) = 0, \tag{4.8}$$

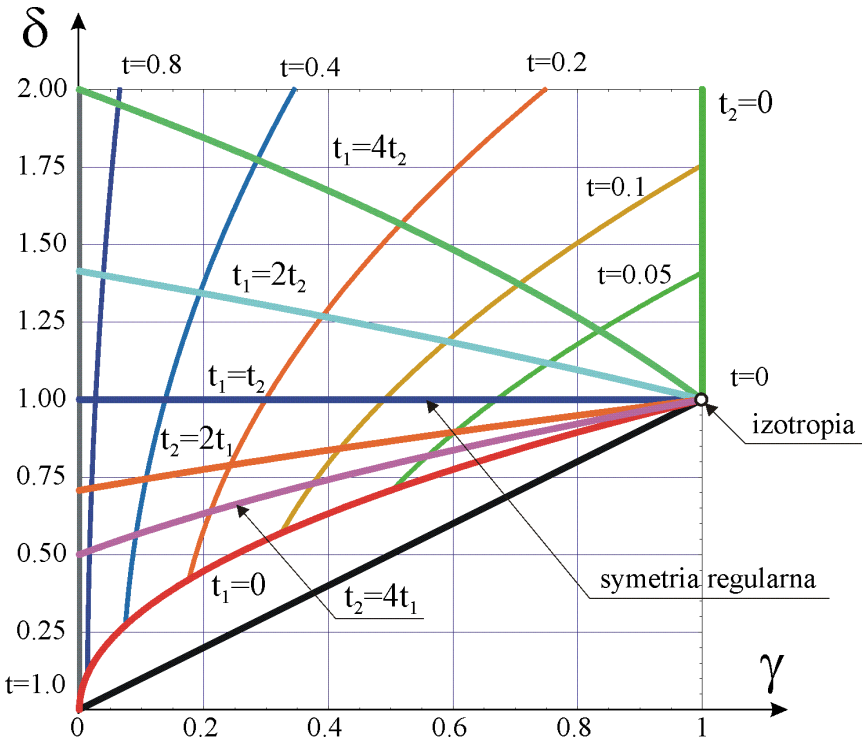
otrzymując:

$$A_n = -2w_n^S \frac{\varepsilon \operatorname{ch}(\alpha_n \varepsilon b)\sin(\alpha_n \mu b) + \mu \cos(\alpha_n \mu b)\operatorname{sh}(\alpha_n \varepsilon b)}{\varepsilon \sin(2\alpha_n \mu b) + \mu \operatorname{sh}(2\alpha_n \varepsilon b)},$$
$$D_n = 2w_n^S \frac{\varepsilon \cos(\alpha_n \mu b)\operatorname{sh}(\alpha_n \varepsilon b) - \mu \operatorname{ch}(\alpha_n \varepsilon b)\sin(\alpha_n \mu b)}{\varepsilon \sin(2\alpha_n \mu b) + \mu \operatorname{sh}(2\alpha_n \varepsilon b)}. \qquad (4.9)$$

Całka szczególna w funkcji ugięcia (4.7) i zależnościach (4.9) określona jest wzorem :

$$w_n^S = \frac{4q}{\pi D_{22}(2n-1)\alpha_n^4\left(\varepsilon^2+\mu^2\right)^2}, \quad \text{gdzie} \quad \alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{a} \quad \text{dla} \quad n \in N. \qquad (4.10)$$

Wielkości składowych tensorów momentów i krzywizn otrzymujemy ze standardowych wzorów dla płyt ortotropowych, patrz np. [4,5].



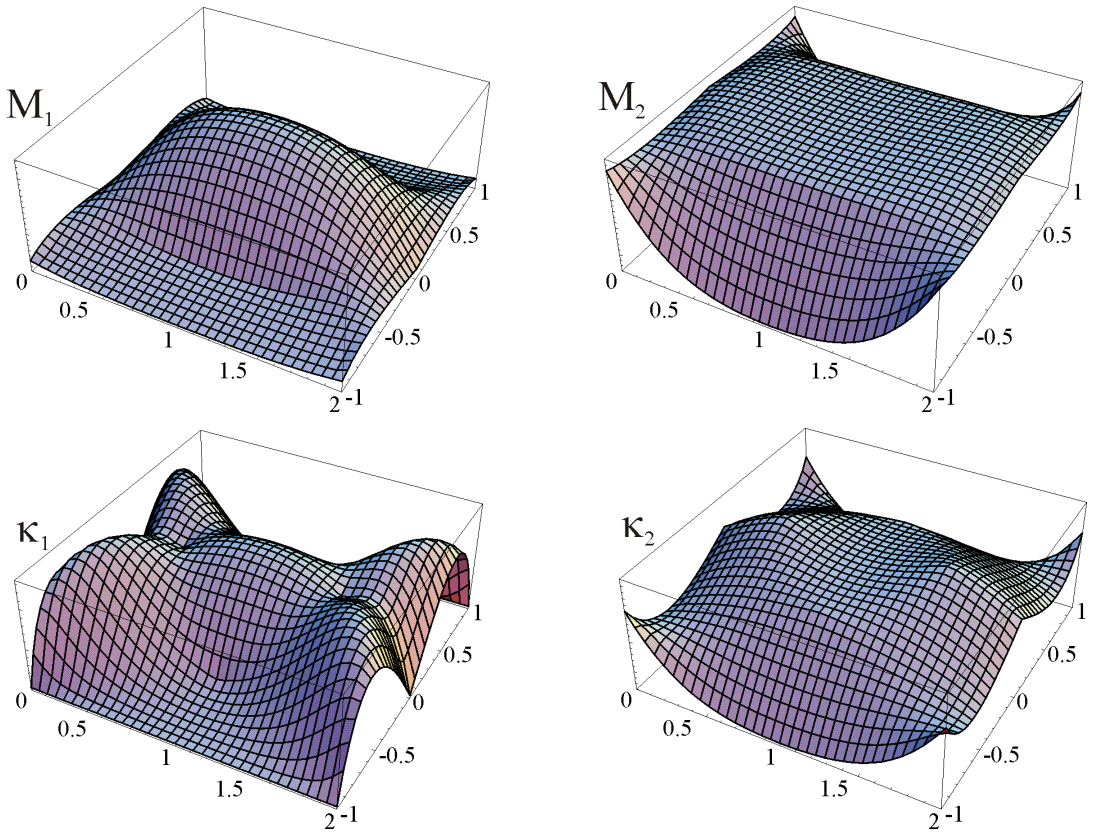
Rysunek 4.2. Zależność parametrów sztywności w funkcji ilości zbrojenia i jego proporcji w ortogonalnych kierunkach

W dalszej części pracy pokazujemy tylko uzyskane wyniki numeryczne zagadnienia wyznaczenia trajektorii pól tensorowych momentów i krzywizn (bez prezentacji sformułowania zagadnienia początkowego i jego dyskusji, odsyłając Czytelnika do pracy [1] i literatury tam cytowanej). Stosujemy program MATHEMATICA [8] w celu rozwiązania odpowiednich, nieliniowych równań różniczkowych.

5. Analiza wyników dla płyt zbrojonych włóknami

W punkcie tym przedstawimy analizę jakościową i ilościową wpływu ilości zbrojenia i sposobu jego ułożenia w płycie kwadratowej o wymiarach $a = 2m$, $b = 1m$ i grubości $h = 2cm$, por. rys.4.1. Rozpatrzymy przypadek zbrojenia ułożonego w kierunku współrzędnej x dla dwóch stopni zbrojenia $t = 0.05$ i $t = 0.2$. Analizujemy także zbrojenie ułożone

w kierunku współrzędnej y dla dwóch stopni zbrojenia $t=0.05$ i $t=0.2$. W przypadku symetrii regularnej zbrojenie ułożone jest w kierunku współrzędnych x i y dla $t=0.05$ i $t=0.2$. Przyjmując powyższe dane możemy zilustrować podstawowe przypadki typów symetrii i stopnia zbrojenia. Zgodnie ze wzorami (2.6) odpowiada to różnym wartościom parametrów sztywności w obszarach możliwych ich kombinacji, patrz rys.4.2. Na przykład dla symetrii regularnej mamy $\delta=1$. Jeżeli dodatkowo $\gamma=1$ to uzyskamy izotropię, gdzie trajektorie pól momentów i krzywizn pokrywają się.



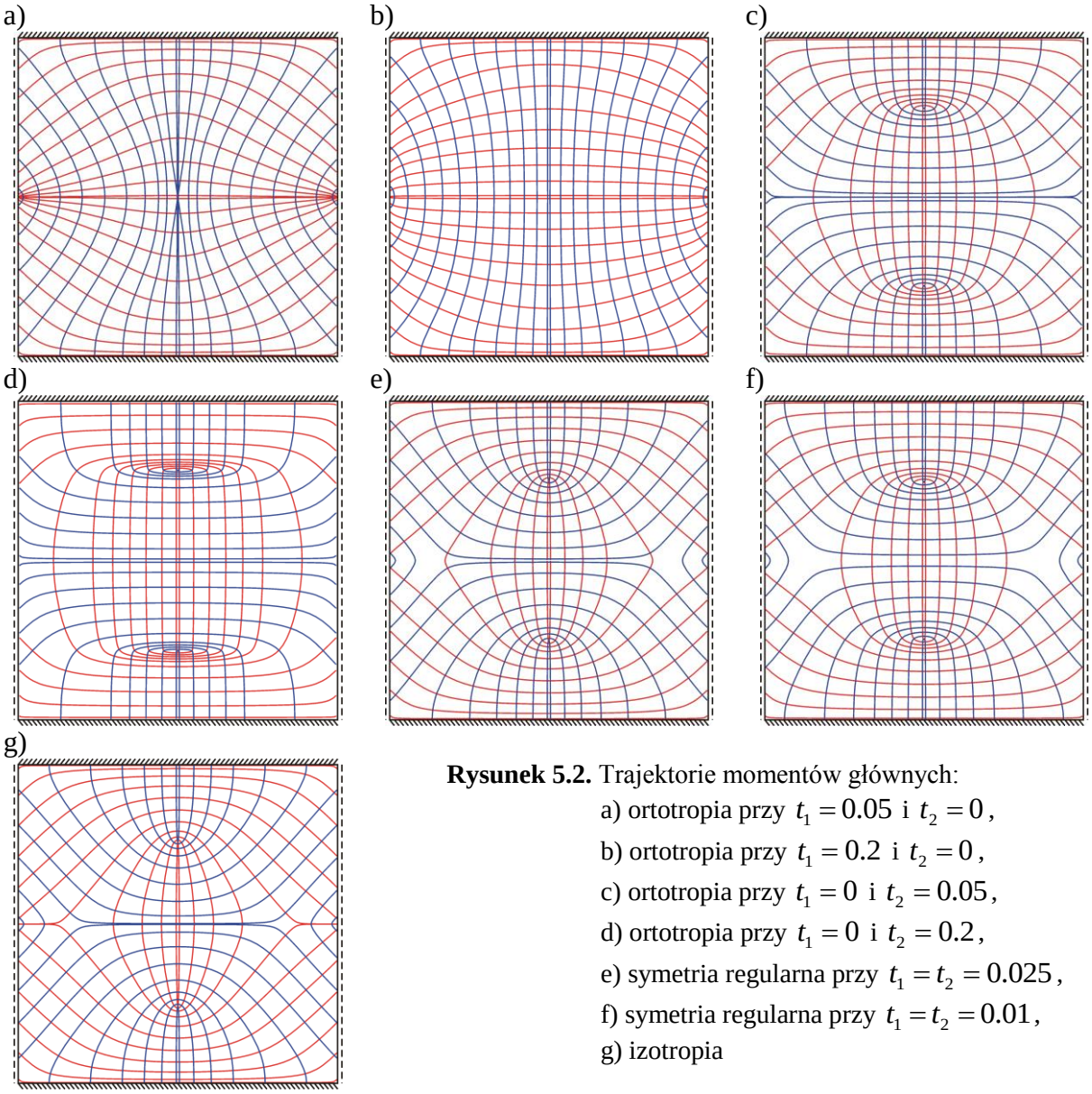
Rysunek 5.1. Wykresy maksymalnego i minimalnego momentu głównego oraz maksymalnej i minimalnej krzywizny głównej w przypadku materiału ortotropowego przy $t_1=0$ i $t_2=0.2$

Poniżej dokonamy jakościowego porównania wykresów wielkości kinematycznych i sił przekrojowych oraz ich trajektorii.

Na rys.5.1 zamieszczono przykładowe wykresy funkcji momentów głównych w przypadku materiału ortotropowego, w którym włókna zbrojenia są ułożone w kierunku osi y ze stopniem zbrojenia $t_2=0.2$. Na tym samym rysunku pokazano wykresy funkcji krzywizn głównych. Porównując te wykresy z odpowiednimi wykresami dla izotropii (których tu nie zamieszczamy) zauważymy silny wpływ wprowadzonych włókien zbrojenia na rozkłady sił przekrojowych. Należy podkreślić, że wpływ zbrojenia na pola krzywizn głównych jest mniej istotny. Potwierdza to zasadność stosowania zbrojenia w celu zwiększenia sztywności zginanej płyty.

Na rys.5.2 zamieszczono łącznie wykresy trajektorii dla obu momentów głównych w rozpatrywanych przypadkach ortotropii, symetrii regularnej i izotropii. Z pokazanych wykresów widać wpływ zarówno kierunku ułożenia zbrojenia jak i jego wartości.

Na rys.5.3 podano łącznie wykresy trajektorii maksymalnego momentu głównych i maksymalnej krzywizny głównej w rozpatrywanych przypadkach anizotropii. Z pokazanych wykresów widać silny wpływ zarówno kierunku ułożenia zbrojenia jak i jego wartości zwłaszcza na trajektorie momentów głównych. Analogiczne wykresy trajektorii minimalnego momentu głównego i minimalnej krzywizny głównej przedstawiono na rys.5.4. Z łącznego porównania wykresów widać, że wprowadzona anizotropia ma najistotniejszy wpływ na momenty główne, zaś o krzywiznach głównych decydują głównie warunki brzegowe.

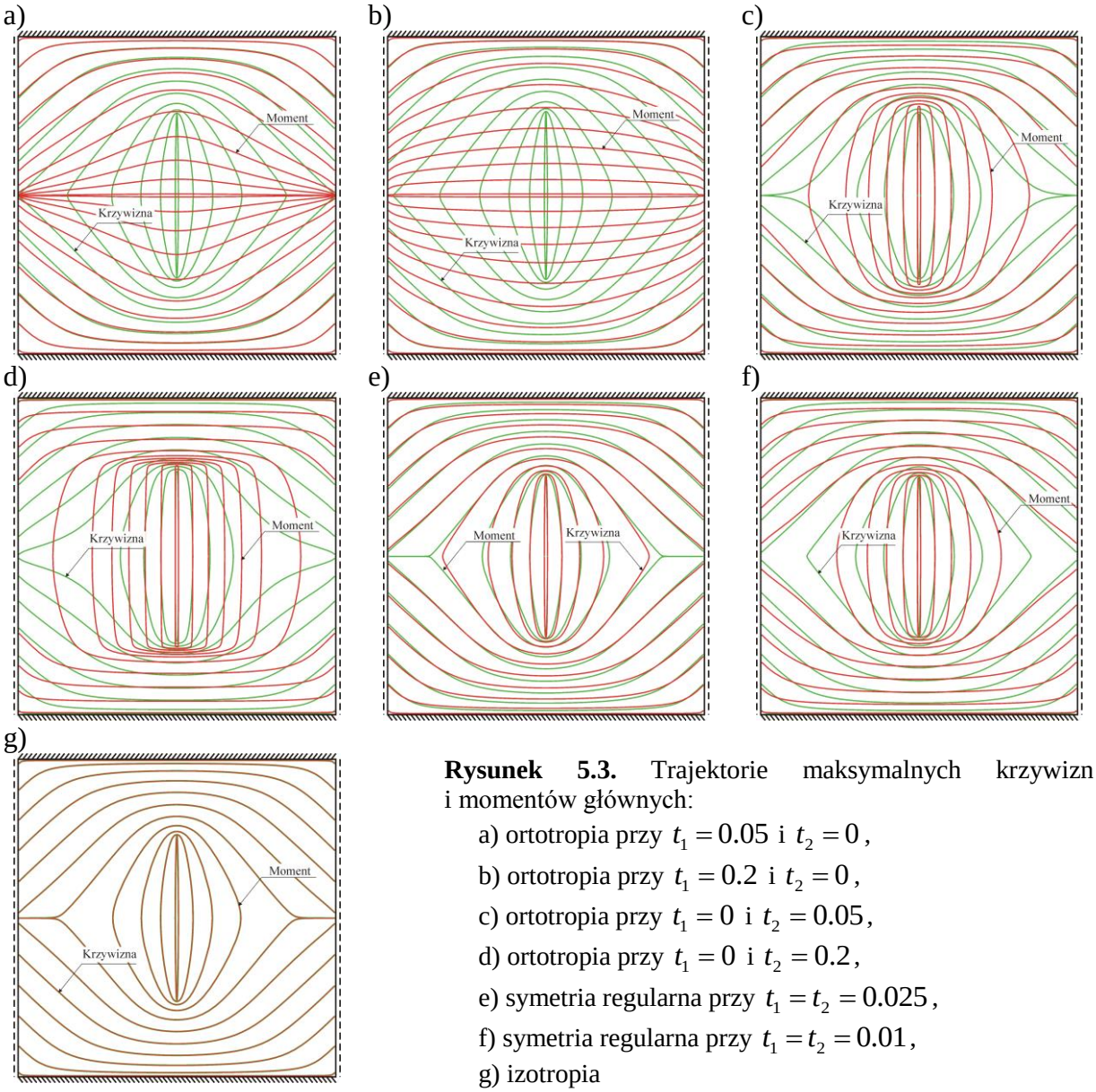


Rysunek 5.2. Trajektorie momentów głównych:
a) ortotropia przy $t_1 = 0.05$ i $t_2 = 0$,
b) ortotropia przy $t_1 = 0.2$ i $t_2 = 0$,
c) ortotropia przy $t_1 = 0$ i $t_2 = 0.05$,
d) ortotropia przy $t_1 = 0$ i $t_2 = 0.2$,
e) symetria regularna przy $t_1 = t_2 = 0.025$,
f) symetria regularna przy $t_1 = t_2 = 0.01$,
g) izotropia

W przypadku symetrii regularnej i małym stopniu zbrojenia trajektorie momentów i krzywizn głównych są podobne jak dla izotropii, por. rys.5.3e i g oraz rys.5.4e i g. Zwiększenie stopienia zbrojenia w płycie zmienia jednak przebiegi trajektorii, zwłaszcza w przypadku momentów głównych, por. rys.5.3e, f i g oraz rys.5.4e, f i g.

W przypadku ortotropii charakter trajektorii momentów i krzywizn zasadniczo odbiega od przypadku izotropii, nawet w sytuacji małego stopnia zbrojenia, por. rys.5.3a, c i g oraz rys.5.4a, c i g. Szczególnie istotne jest to w jaki sposób wykonane jest zbrojenie względem krawędzi płyty, co jest oczywiste ze względu na występujące warunki brzegowe.

Odpowiednio zwiększając stopień zbrojenia w kierunkach prostopadłych do brzegów płyty zmieniamy charakter przebiegu trajektorii, patrz rys.5.3a-d i g oraz rys.5.4a-d i g. Zauważamy silny wpływ zbrojenia na rozkłady trajektorii momentów oraz składowych tensora momentów, por. także rys.5.1.



Rysunek 5.3. Trajektorie maksymalnych krzywizn i momentów głównych:

a) ortotropia przy $t_1 = 0.05$ i $t_2 = 0$,

b) ortotropia przy $t_1 = 0.2$ i $t_2 = 0$,

c) ortotropia przy $t_1 = 0$ i $t_2 = 0.05$,

d) ortotropia przy $t_1 = 0$ i $t_2 = 0.2$,

e) symetria regularna przy $t_1 = t_2 = 0.025$,

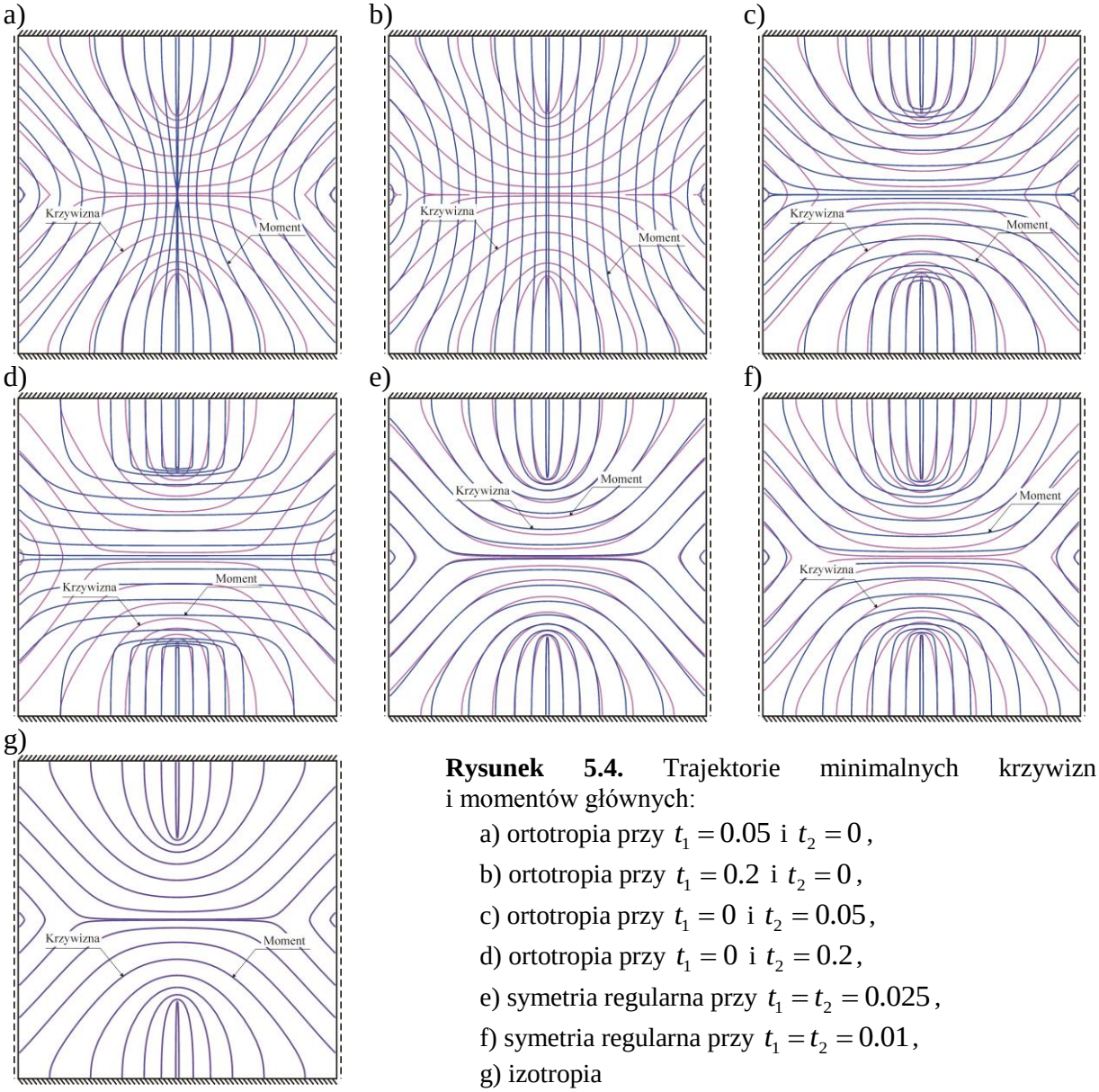
f) symetria regularna przy $t_1 = t_2 = 0.01$,

g) izotropia

W przypadku trajektorii krzywizn istotny jest natomiast wpływ warunków brzegowych. Jest to zgodne z podstawowymi cechami pracy płyty, w której o polach kinematycznych decydują głównie warunki brzegowe, zaś o polach statycznych decyduje także rozkład zbrojenia.

Znajomość trajektorii momentów głównych w płytach izotropowych jest pomocna w kształtowaniu zbrojenia wprowadzającego anizotropię w materiale płyty. W ogólności zagadnienie badania przebiegu trajektorii jest złożone, gdyż w praktyce inżynierskiej stosuje się płyty niejednorodne, które są różnie zbrojone w podobszarach. Takie postępowanie prowadzi jednocześnie do zmiany sztywności płyty jak i przebiegu trajektorii w całej płycie. Z reguły nie powtarza się rozwiązania tak zaprojektowanej niejednorodnej i anizotropowej płyty, co może prowadzić do nieprzewidzianych różnic w pracy elementu konstrukcji.

W pracy analizowano jedynie jednorodne, ortotropowe płyty w celu znalezienia trajektorii momentów i krzywizn głównych. Szczególną uwagę zwrócono na jakościowe różnice w otrzymanych rozwiązaniach dla płyt wykonanych z izotropowej matrycy zbrojonej ciągłymi włóknami w porównaniu z płytą izotropową. Do rozwiązania zagadnienia zastosowano metodę analityczno-numeryczną, która pozwala na kompleksowe ujęcie zagadnienia. Przykładową płytę Kirchhoffa rozwiązano metodę pojedynczych szeregów sinusowych, natomiast w celu całkowania nieliniowych równań różniczkowych trajektorii z odpowiednimi warunkami początkowymi zastosowano numeryczne procedury programu Mathematica. Ze względu na występowanie możliwych osobliwości w postaci linii i punktów w przebiegu trajektorii praktycznie każdą płytę należy rozpatrywać indywidualnie.



Rysunek 5.4. Trajektorie minimalnych krzywizn i momentów głównych:

a) ortotropia przy $t_1 = 0.05$ i $t_2 = 0$,

b) ortotropia przy $t_1 = 0.2$ i $t_2 = 0$,

c) ortotropia przy $t_1 = 0$ i $t_2 = 0.05$,

d) ortotropia przy $t_1 = 0$ i $t_2 = 0.2$,

e) symetria regularna przy $t_1 = t_2 = 0.025$,

f) symetria regularna przy $t_1 = t_2 = 0.01$,

g) izotropia

Z przeprowadzonej analizy wynika, że w przypadku występowania symetrii regularnej w płycie trajektorie momentów i krzywizn głównych są podobne jak dla izotropii. Zwiększenie zbrojenia w takiej płycie istotniej modyfikuje trajektorie momentów głównych. W przypadku zastosowania zbrojenia prowadzącego do ortotropii charakter trajektorii momentów i krzywizn zasadniczo odbiega od izotropii. Nawet dla małego stopnia zbrojenia

wpływ jest znaczący, zaś zwiększając stopień zbrojenia w kierunkach prostopadłych do brzegów płyty zmieniamy charakter przebiegu trajektorii. Szczególnie istotne jest to w jaki sposób wykonane jest zbrojenie względem krawędzi płyty, co jest oczywiście uwarunkowane występującymi warunkami brzegowymi. Z łącznego porównania przebiegu trajektorii dla różnych wariantów wprowadzenia zbrojenia widać, że indukowana anizotropia ma najistotniejszy wpływ na trajektorie momentów, zaś o trajektoriach krzywizn decydują głównie warunki brzegowe. Z przedstawionych wykresów widać tendencje do narastania dysproporcji w przebiegu trajektorii momentów i krzywizn w funkcji sposobu i ilości wprowadzonego zbrojenia.

6. Uwagi i podsumowanie

i) Zaproponowano sformułowanie zagadnienia na wyznaczenie trajektorii symetrycznego pola tensorowego drugiego rzędu w zagadnieniach płaskich mechaniki kontinuum, w którym wydzielono odpowiednio unormowane pole dewiatorowe. Pozwoliło to na uproszczenie zagadnienia w sytuacji różnego rodzaju punktów osobliwych.
ii) Wykazano, że zagadnienie na poszukiwanie trajektorii sprowadza się do odpowiedniego zagadnienia początkowego, w którym poszukuje się kierunków własnych ortogonalnego tensora o interpretacji odbicia lustrzanego. Podano także geometryczną interpretację wprowadzonego unormowanego dewiatora, którego obrót w przestrzeni dewiatorów jest opisany dwukrotnie większym kątem niż obrót wektorów własnych w dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Pozwoliło to m.in. na stosunkowo proste wyjaśnienie znanych metod graficznych otrzymywania wykresów trajektorii na podstawie znajomości linii izoklinicznych.
iii) Zamieszczono kilka przykładów wyznaczenia trajektorii momentów głównych w płytach Kirchhoffa. W celu rozwiązania nieliniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu z odpowiednimi warunkami początkowymi zastosowano program Mathematica [8].
iv) W dalszym ciągu zagadnieniem otwartym jest algorytmizacja tego zagadnienia. Podstawowy problem nie wynika tylko z trudności związanych z rozwiązywaniem nieliniowych równań różniczkowych, ale z konieczności znalezienia warunków początkowych na formalnie dowolnym brzegu rozpatrywanego obszaru i warunków początkowych na podobszarach rozgraniczonych liniami osobliwości. Dodatkowo mogą występować izolowane punkty osobliwe jak pokazano to na przykładach.

Bibliografia/ References

[1] Gajewski M., Jemioło S., Szwed A.: Trajektorie wartości własnych płaskich symetrycznych pól tensorowych drugiego rzędu, Theoretical Foundations of Civil Engineering – XIII, ed. by W. Szcześniak, Warsaw 2005, str. 341-348.
[2] Jemioło S., Gajewski M.: Cztery typy symetrii płaskich tensorów Hooke'a na przykładzie modelu kompozytu włóknistego, Theorethical Foundations of Civil Engineering, Polish-Ukrainian Transactions, W. Szcześniak [ed], str. 405-416, Oficyna Wydawnicza PW, Dnepropetrovsk-Warszawa 2005.
[3] Jastrzębski P., Mutermilch J., Orłowski W.: *Wytrzymałość materiałów* , część 1, Arkady, Warszawa 1985.
[4] Kączkowski Z.: *Płyty, obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1980.
[5] Лехницкий С.Г.: Анизотропные пластинки, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва-Ленинград, 1947.
[6] Orłoś Z. [red.]: Doświadczalna analiza odkształceń i naprężeń, PWN, Warszawa 1977.

[7] Szwed A., Jemioło S., Gajewski M.: O wyznaczeniu trajektorii wartości własnych stanu naprężenia i odkształcenia w tarczach anizotropowych, VIII Seminarium Ukraińsko-Polskie, Proc. Theoretical Foundations of Civil Engineering, str. 311-318, 2000.
[8] Wolfram S., The MATHEMATICA book, Wolfram Media/Cambridge University Press, 1996.

Rozdział w monografii:

Sprężystość i hipersprężystość. Modelowanie i zastosowania,

S. Jemioło [red.],
Oficyna Wydawnicza PW,
Warszawa 2012

ISBN: 978-83-7814-066-5

Publikacje z serii wydawniczej „Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności" są prezentowne w zakładce „Prace naukowe" na stronie internetowej Oficyny Wydawniczej Politechniki Warszawskiej:

www.wydawnictwopw.pl

Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej prowadzi sprzedaż:

- stacjonarną – w księgarniach OWPW – Gmach Główny Politechniki Warszawskiej przy Placu Politechniki 1 – ul. Noakowskiego 18/20
- internetową – http://www.wydawnictwopw.pl
- wysyłkową – tel. 22 234-75-03 fax 22 234-70-60 e-mail: oficyna@wpw.pw.edu.pl

ISBN 978-83-7814-066-5

SPRĘŻYSTOŚĆ I HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ. Modelowanie i zastosowania

SPRĘŻYSTOŚĆ I HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ

Modelowanie i zastosowania

Monografia
pod redakcją naukową
Stanisława Jemioło

Tom 1

Seria Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności

Seria Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności

TOM 1
SPRĘŻYSTOŚĆ I HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ. MODELOWANIE I ZASTOSOWANIA (pod red. nauk. Stanisława Jemioło)

TOM 2
ZAGADNIENIA STATYKI SPRĘŻYSTYCH PÓŁPRZESTRZENI WARSTWOWYCH (Stanisław Jemioło, Aleksander Szwed)

TOM 3
DEFORMACJE I WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW I ELEMENTÓW KONSTRUKCJI (Stanisław Jemioło, Aleksander Szwed)

TOM 4
HIPERSPRĘŻYSTOPLASTYCZNOŚĆ (Stanisław Jemioło, Marcin Gajewski)

TOM 5
TERMOSPRĘŻYSTOŚĆ I PRZEPŁYW CIEPŁA W MATERIAŁACH ANIZOTROPOWYCH ((pod red. nauk. Stanisława Jemioło)

Seria wydawnicza
Monografie Zakładu
Wytrzymałości Materiałów,
Teorii Sprężystości
i Plastyczności

Tom 1

Wydział Inżynierii Lądowej
Politechniki Warszawskiej

SPRĘŻYSTOŚĆ I HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ

Modelowanie i zastosowania

Monografia
pod redakcją naukową
Stanisława Jemioło

Seria Monografie Zakładu
Wytrzymałości Materiałów,
Teorii Sprężystości i Plastyczności

Warszawa 2016

Publikacja jest I tomem Serii Wydawniczej
„Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów,
Teorii Sprężystości i Plastyczności”

Opiniodawcy
Dr hab. inż. Aniela Glinicka, prof. PW
Dr hab. inż. Leszek Małyszko, prof. UWM

Redaktor naukowy
Stanisław Jemioło

Projekt okładki
Danuta Czudek-Puchalska

© Copyright by Zakład Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności
Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2012, 2016

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych, w tym nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w Internecie bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich

ISBN 978-83-7814-066-5

Druk i oprawa: Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Warszawskiej, tel. 22 234-55-93
Oficyna Wydawnicza PW, ul. Polna 50, 00-644 Warszawa. Wydanie II uzup. Zam. nr 535/2015

Przedmowa do wydania I

Oddana do rąk Czytelników monografia dotyczy sprężystości i hipersprężystości. Autorami poszczególnych rozdziałów są pracownicy Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności, Instytutu Inżynierii Budowlanej Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej. Cztery pierwsze rozdziały poświęcone są liniowej teorii sprężystości materiałów izotropowych i anizotropowych. Piąty rozdział dotyczy nieliniowej teorii sprężystości małych przemieszczeń i odkształceń materiałów transwersalnie izotropowych. Kolejne rozdziały od szóstego do czternastego dotyczą hipersprężystości i teorii dużych deformacji.

Zagadnienia prezentowane w monografii są od wielu lat przedmiotem zainteresowań naukowych pracowników Zakładu. Są to zarówno zagadnienia klasyczne, takie jak zagadnienie skręcania prętów pryzmatycznych, wyznaczania trajektorii pól tensorowych naprężeń i odkształceń w tarczach oraz momentów zginających w płytach, jak i implementacje numeryczne nieliniowych relacji konstytutywnych sprężystości w systemie metody elementów skończonych ABAQUS. Dalsze rozdziały dotyczą teorii hipersprężystości, której efektywne zastosowania wiążą się z rozwojem metod numerycznych i możliwości obliczeniowej komputerów. Według opinii autorów *podstawową trudnością, która jest niezależna od rozwoju metod numerycznych, jest wybór adekwatnego modelu materiału,* określenie parametrów i funkcji materiałowych oraz ich weryfikacja doświadczalna. Wobec tego w monografii uwypuklone są zagadnienia dotyczące teorii relacji konstytutywnych hipersprężystości.

Stanisław Jemioło

Przedmowa do wydania II

W wydaniu drugim monografii dodano pięć rozdziałów, trzy z nich dotyczą sprężystości małych odkształceń, natomiast dwa rozdziały są związane z relacjami konstytutywnymi hipersprężystości materiałów anizotropowych.

Stanisław Jemioło

Spis treści

Rozdział I

Swobodne skręcanie prętów pryzmatycznych o przekroju w kształcie wycinka koła albo pierścienia....9

Stanisław JEMIOŁO, Aleksander SZWED

Rozdział II

Tarcze i rodzaje anizotropii materiałów liniowo sprężystych....35

Stanisław JEMIOŁO

Rozdział III

Cztery typy płaskiej anizotropii na przykładzie modelu kompozytu włóknistego....45

Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI

Rozdział IV

Trajektorie wartości własnych w zagadnieniach płaskich....57

Aleksander SZWED, Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI

Rozdział V

Niejednorodne, nieliniowe materiały transwersalnie izotropowe i ich implementacja MES....73

Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI

Rozdział VI

Optymalne orientacje materiału ortotropowego....83

Stanisław JEMIOŁO

Rozdział VII

Drgania własne kamertonu jako przykład testowy MES....89

Marcin GAJEWSKI, Stanisław JEMIOŁO

Rozdział VIII

Zagadnienia brzegowe 2D liniowej sprężystości materiałów anizotropowych - zastosowanie systemu PDE MATLAB....95

Marcin GAJEWSKI, Stanisław JEMIOŁO

Rozdział IX

Najprostsze modele hipersprężystości materiałów izotropowych....103

Stanisław JEMIOŁO

Rozdział X

Przykłady modeli materiałów ściśliwych i mało-ściśliwych....115

Stanisław JEMIOŁO

Rozdział XI

Implementacja numeryczna w MES modeli CNH i MCNH....133

Stanisław JEMIOŁO

Rozdział XII

Hipersprężysta kula obciążona własnym ciężarem jako test numeryczny zadania kontaktowego....143

Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI, Cezary AJDUKIEWICZ

Rozdział XIII

Ortotropowy materiał Saint-Venanta-Kirchhoffa....149

Stanisław JEMIOŁO

Rozdział XIV

Szczególne przypadki ortotropowego materiału SVK....161

Stanisław JEMIOŁO

Rozdział XV

Przykłady modeli SVK....169

Stanisław JEMIOŁO

Rozdział XVI

Implementacja MES modeli konstytutywnych hipersprężystych materiałów zbrojonych włóknami....179

Stanisław JEMIOŁO, Marcin GAJEWSKI

Rozdział XVII

Symulacja numeryczna i weryfikacja doświadczalna testu rozciągania płaskownika z uwzględnieniem teorii sprężysto – plastyczności dużych deformacji....187

Cezary AJDUKIEWICZ, Marcin GAJEWSKI, Stanisław JEMIOŁO

Rozdział XVIII

Uogólnienia modeli konstytutywnych ortotropowego materiału SVK w płaskich zagadnieniach hipersprężystości....199

Stanisław JEMIOŁO

Rozdział XIX

Porównanie modeli materiałów ortotropowych w zagadnieniach płaskich....215

Stanisław JEMIOŁO