

IMPLEMENTACJA MES MODELI KONSTITUTYWNYCH HIPERSPRĘŻYSTYCH MATERIAŁÓW ZBROJONYCH WŁÓKNAMI

Marcin Gajewski*, Stanisław Jemiolo**

1. Wstęp

Zagadnienia związane z modelowaniem konstytutywnym hipersprężystych materiałów anizotropowych są ostatnio coraz częściej rozpatrywane, np. w mechanice kompozytów o elastomerowych matrycach, biomechanice miękkich tkanek oraz teorii sprężysto-plastyczności dowolnych deformacji, por. [4,6,7].

Sformułowanie modeli materiałów anizotropowych, z zastosowaniem teorii reprezentacji funkcji tensorowych [3], prowadzi do relacji konstytutywnych, w których oprócz tensorów parametrycznych występuje znaczna liczba stałych materiałowych. Stwarza to znaczne trudności przy ich interpretacji i wyznaczaniu na podstawie, z reguły niekompletnych, wyników badań doświadczalnych, patrz np. [6]. Wobec tego celem pracy jest zaproponowanie i implementacja numeryczna w programie ABAQUS [1,2], najprostszyc modeli hipersprężystych materiałów transwersalnie izotropowych. Analizowane modele mogą być interpretowane jako dwuskładnikowy kompozyt, w którym izotropowa matryca jest zbrojona jedną rodziną włókien. Punktem wyjścia proponowanych modeli jest założenie o addytywnej dekompozycji funkcji jednostkowej energii sprężystości (JES) na dwie części, z których jedna opisuje energię nagromadzoną w matrycy, a druga energię rodziny włókien. Wyznaczenie danych materiałowych w takim przypadku sprowadza się m.in. do określenia stałych sprężystości części składowych kompozytu i ich udziałów objętościowych.

^{*)} Marcin Gajewski, Mgr inż., Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Mechaniki Konstrukcji Inżynierskich, Al. Armii Ludowej, 16, 00-637, Warszawa, Polska. Tel.: +48 22 234 64 69, Fax: +48 22 825 69 85, E-mail: m.gajewski@il.pw.edu.pl.

^{**)} Stanisław Jemiolo, Prof. nzw. dr hab. inż., Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Mechaniki Konstrukcji Inżynierskich, Al. Armii Ludowej, 16, 00-637, Warszawa, Polska. Tel.: +48 22 234 64 69, Fax: +48 22 825 69 85, E-mail: s.jemiolo@il.pw.edu.pl..

2. Propozycja modeli konstytutywnych hipersprężystych materiałów zbrojonych włóknami

2.1. Zależności podstawowe

Z zasady zachowania energii mechanicznej oraz zasady zachowania pędu, momentu pędu i masy, otrzymuje się następujące zależności na pochodną materialną funkcji JES:

$$\dot{W} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}, \quad (1)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{S} i \mathbf{T} , są odpowiednio tensorami naprężenia Cauchy'ego, Kirchhoffa oraz I i II tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa. Ponadto w (1) J oznacza wyznacznik tensora gradientu deformacji \mathbf{F} , \mathbf{D} jest tensorem prędkości deformacji, a tensor \mathbf{E} jest tensorem odkształcenia Lagrange'a (kropka w (1) oznacza iloczyn skalarny tensorów). Z lokalnego sformułowania zasady zachowania energii mechanicznej (1), dla dostatecznie regularnego potencjału jednostkowej energii sprężystej $W(\mathbf{F}, \mathbf{X})$, wynika, że

$$\mathbf{S}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \frac{\partial W(\mathbf{F}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{F}}, \quad (2)$$

gdzie \mathbf{X} jest wektorem określającym położenie cząstki w ciele (w konfiguracji odniesienia, która w tej pracy jest konfiguracją naturalną). Warto przypomnieć, że między I i II tensorem naprężenia Pioli Kirchhoffa oraz tensorem naprężenia Cauchy'ego zachodzą następujące tożsamości: $\mathbf{S} = \mathbf{F}\mathbf{T}$, $J\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\mathbf{F}^T$. Tensory \mathbf{S} i $\boldsymbol{\sigma}$ występują odpowiednio w równaniach równowagi w konfiguracji odniesienia i w konfiguracji aktualnej.

Z zasady obiektywności i danej w konfiguracji początkowej symetrii materiału, określonej przez zbiór tensorów parametrycznych $\{\mathbf{P}_i\}$, wynika że funkcja JES nie może być bezpośrednio zależna od tensora \mathbf{F} , jak i od wektora \mathbf{X} , por. [6]. Spełnienie zasady obiektywności i wymagania symetrii, wymusza rozpatrywanie JES jako funkcji zależnej od nieredukowalnych niezmienników: dowolnego, obiektywnego pola tensora odkształcenia (np. \mathbf{E}) lub pola tensora deformacji (np. $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$, $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$) i pól tensorów parametrycznych. Wobec powyższych uwag można rozpatrywać funkcje JES, np. w postaci:

$$W = \tilde{W}(\mathbf{B}, \mathbf{P}_i) = \Psi(I_i); \quad i = 1, \dots, I, \quad (3)$$

gdzie $\{I_i\}$ jest zbiorem niezmienników bazy funkcji JES. Z (1)-(3) wynika relacja konstytutywna między tensorem Kirchhoffa $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\mathbf{F}^T$ i tensorem deformacji Cauchy'ego-Greena \mathbf{B} . Tego typu relacje konstytutywne są wygodne do implementacji w programie MES ABAQUS.

Szczegółową analizę wymagań stawianych funkcji JES można znaleźć np. w pracach [5,6]. Poruszane są tam zagadnienia dotyczące wymagań: wypukłości, poliwyypukłości, quasi-wypukłości i wypukłości pierwszego rzędu. Wymagania te zapewniają m.in. istnienie rozwiązań odpowiednich zagadnień brzegowych hipersprężystości, por. [5] i literaturę tam cytowaną.

2.2. Propozycje funkcji JES kompozytu o izotropowej matrycy ze zbrojeniem jedną rodziną włókien

Modelowany kompozyt składa się z izotropowej matrycy i włókien, o udziale objętościowym $p \in [0,1)$, ułożonych zgodnie z polem $\mathbf{m}(\mathbf{X})$. Zakłada się pełną przyczepność między włóknami a matrycą. Dodatkowo przyjmuje się, że włókna „pracują” jednowymiarowo, tzn. tylko wzdłuż wektora \mathbf{m} . Znajomość pola wektorowego \mathbf{m} pozwala zdefiniować pole tensorowe $\mathbf{M} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$, w którym tensor \mathbf{M} jest interpretowany jako tensor parametryczny w (3). Zakładamy, że JES kompozytu składa się z dwóch części, których udział jest proporcjonalny do udziału objętościowego i ma postać:

$$\Psi = (1-p)\Psi_M + p\Psi_Z, \quad (4)$$

gdzie Ψ_M jest funkcją JES matrycy i zależy tylko od niezmienników izotropowych tensora \mathbf{B} , natomiast Ψ_Z jest funkcją JES włókien:

$$\Psi_Z = \frac{E_Z}{4}(I_4 - 1)^2, \quad (5)$$

gdzie $I_4 = \text{tr}\hat{\mathbf{M}}$, oraz

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{F}\mathbf{M}\mathbf{F}^T. \quad (6)$$

Parametr E_Z ma interpretację początkowego modułu Younga rodziny włókien.

Funkcja JES materiału matrycy opisana zostanie przy pomocy dwóch znanych w literaturze modeli hipersprężystych materiałów ściśliwych: neo-Hooke’a (NH) i Ciarleta (C), por. [5]. W przypadku modelu NH funkcja JES ma postać:

$$\Psi_M^{CNH} = \frac{\mu_0}{2}(I_1 - 3) + \frac{\lambda_0}{4}(J^2 - 1) - \left(\mu_0 + \frac{\lambda_0}{2}\right) \ln J, \quad (7)$$

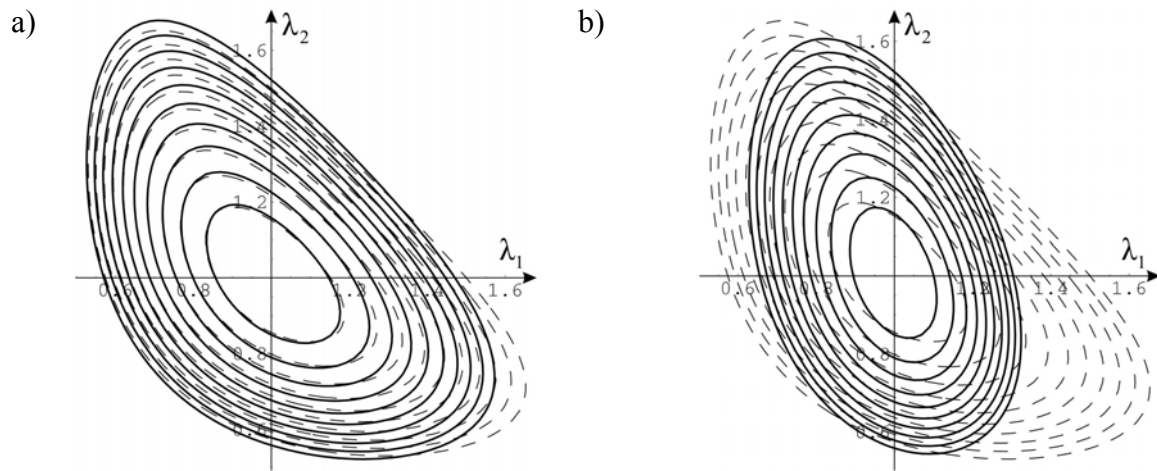
gdzie $I_1 = \text{tr}\mathbf{B}$, zaś μ_0 i λ_0 oznaczają stałe sprężystości (identyczne jak w związku Hooke’a teorii liniowej sprężystości).

Na rys.1 przedstawiono wykresy warstwiczne funkcji JES określonej wzorem (4) z uwzględnieniem (5) i (7) (w zależności od wydłużeń głównych λ_1 i λ_2 (przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia $\lambda_3 = 1$ (PSO)), w przypadku materiału izotropowego (linie przerywane) oraz materiału kompozytowego (tj. $p=0.1$) i różnych stosunkach modułu Younga włókien zbrojenia i matrycy (linie ciągłe). Na rys.1 włókna zbrojenia mają kierunek zgodny z λ_1 . W przypadku deformacji jednorodnych PSO mamy $S_\alpha = \partial W / \partial \lambda_\alpha$ ($\alpha = 1,2$), czyli gradient funkcji JES definiuje stan naprężenia. Na rys.1b wyraźnie zauważalna jest „silna” anizotropia materiału. Kierunek wyróżniony materiału zmienia się zgodnie z (6), co jest charakterystyczne dla teorii nieliniowej.

Ponieważ potencjał Ψ_M^{CNH} w przypadku materiału NH nie jest funkcją poliwypukłą, por. [5], to także potencjał materiału kompozytowego (KNH) wg (4)-(7) nie jest funkcją poliwypukłą. Wobec tego rozpatrujemy także funkcję JES materiału matrycy w postaci:

$$\Psi_M^C = \frac{\mu_o}{2} \left[f(I_1 - 3) + (1-f)(\tilde{I}_2 - 3) \right] + \frac{1}{4} \left[\lambda_o - 2\mu_o(1-f) \right] J^2 + \left[\frac{1}{2} \lambda_o + \mu_o \right] \ln J - \frac{1}{4} \left[\lambda_o - 2\mu_o(1-f) \right], \quad (8)$$

która wynika z zastosowania modelu C. We wzorze (8) występuje niezmiennik: $\tilde{I}_2 = \text{tr}(\text{cof}\mathbf{B})$, zaś pozostałe oznaczenia są identyczne jak w (7). Funkcja (8) jest poliwypukła i spełnia odpowiednie warunki wzrostu potencjału sprężystości gdy: $\mu_o > 0$, $f \in (0,1)$ i $\lambda_o > 2\mu_o(1-f)$, patrz [5]. Model materiału kompozytowego (KC) otrzymamy podstawiając (5) i (8) do (4).



Rys.1. Wykresy warstwiczne JES w przypadku PSO w funkcji wydłużeń głównych λ_1 i λ_2 . Materiał izotropowy NH (linie przerywane), kompozyt KNH o matrycy izotropowej ($\mu_o = E_M$, $\lambda_o = 2.6 E_M$) zbrojonej rodziną włókien ułożonych w kierunku 1, o udziale objętościowym $p = 0.1$ (linie ciągłe): a) $E_z/E_M = 1$, b) $E_z/E_M = 10$

Fig.1. Contour plots of stored energy function for plane strain case as a function of main elongation λ_1 and λ_2 . Isotropic material NH (dashed lines), composite KNH with isotropic matrix ($\mu_o = E_M$, $\lambda_o = 2.6 E_M$) reinforced with fibers family set in direction 1, of volume ratio $p = 0.1$ (solid lines): a) $E_z/E_M = 1$, b) $E_z/E_M = 10$

3. Implementacja numeryczna w programie MES ABAQUS

Modele materiałów transwersalnie izotropowych przedstawione w pkt.2 zaimplementowano w programie metody elementów skończonych ABAQUS. W tym celu zaprogramowano w języku FORTRAN tzw. procedurę materiałową UMAT, por. [2]. Oprócz związków konstytutywnych modeli KNH i KC, niezbędna jest również znajomość postaci stycznego operatora czwartego rzędu w związku przyrostowym:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}, \quad (10)$$

gdzie symbol „ \circ ” oznacza pełne nasunięcie tensorów. Symbolem „ \diamond ” oznaczono pochodną Jaumana, por. np. [1].

Sposób wyznaczenia operatora w związku (10) pokażemy na przykładzie modelu KNH. Funkcja JES w postaci (4), przy uwzględnieniu (5) i (7), jest funkcją trzech niezmienników, czyli:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \dot{I}_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} \dot{I}_4, \quad (11)$$

gdzie

$$\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} = (1-p) \frac{\mu_0}{2}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial J} = (1-p) \left(\frac{\lambda_0}{2} J - \frac{1}{J} \left(\frac{\lambda_0}{2} + \mu_0 \right) \right), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} = \frac{1}{2} p E_z (I_4 - 1). \quad (12)$$

Z kolei pochodne materialne niezmienników I_1 , J i I_4 wynoszą odpowiednio:

$$\dot{I}_1 = 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}, \quad \dot{J} = J \operatorname{tr} \mathbf{D}, \quad \dot{I}_4 = 2\hat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{D} \quad (13)$$

Po podstawieniu (12) i (13) do (11) i uwzględnieniu zależności (1), wyznaczamy relację konstytutywną modelu KNH:

$$\boldsymbol{\tau} = (1-p) \left(\mu_0 \mathbf{B} + \left(\frac{\lambda_0}{2} J^2 - \frac{\lambda_0}{2} - \mu_0 \right) \mathbf{I} \right) + p E_z (I_4 - 1) \hat{\mathbf{M}}. \quad (14)$$

Następnie obliczamy pochodną Jaumana tensora naprężenia Kirchhoffa, prawostronnie wyłączamy z otrzymanego wyrażenia tensor \mathbf{D} i w wyniku otrzymujemy operator czwartego rzędu:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & (1-p) \left[\mu_0 (\mathbf{I} \diamond \mathbf{B} + \mathbf{B} \diamond \mathbf{I}) + \lambda_0 J^2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] + \\ & + 2p E_z \hat{\mathbf{M}} \otimes \hat{\mathbf{M}} + p E_z (I_4 - 1) (\hat{\mathbf{M}} \diamond \mathbf{I} + \mathbf{I} \diamond \hat{\mathbf{M}}). \end{aligned} \quad (15)$$

W przypadku modelu KC postępujemy podobnie. Relacja konstytutywna modelu KC ma następującą postać:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & (1-p) f \mu_0 \mathbf{B} + (1-p) \mu_0 (1-f) (I_1 \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) + \\ & + (1-p) \left(\left(\frac{\lambda_0}{2} - \mu_0 (1-f) \right) J^2 - \left(\frac{\lambda_0}{2} - \mu_0 \right) \right) \mathbf{I} + p E_z (I_4 - 1) \hat{\mathbf{M}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Natomiast w (10) mamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & (1-p) \mu_0 (f + I_1 (1-f)) (\mathbf{I} \diamond \mathbf{B} + \mathbf{B} \diamond \mathbf{I}) + 2(1-p) \mu_0 (1-f) \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \\ & - (1-p) \mu_0 (1-f) (\mathbf{I} \diamond \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2 \diamond \mathbf{I}) - 2(1-p) \mu_0 (1-f) \mathbf{B} \diamond \mathbf{B} + \\ & + (1-p) \left(\frac{\lambda_0}{2} - \mu_0 (1-f) \right) J^2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2p E_z \hat{\mathbf{M}} \otimes \hat{\mathbf{M}} + p E_z (I_4 - 1) (\hat{\mathbf{M}} \diamond \mathbf{I} + \mathbf{I} \diamond \hat{\mathbf{M}}). \end{aligned} \quad (17)$$

Poprawność implementacji modeli: KNH i KC w programie ABAQUS sprawdzono testami numerycznymi dla jednorodnych pól stanu naprężenia i odkształcenia. W tych przypadkach rozwiązania analityczne zadań wynikają z relacji konstytutywnych (14) i (16).

Stosując zaprogramowaną procedurę UMAT otrzymywano wyniki numeryczne z dokładnością co najmniej do czterech cyfr znaczących w porównaniu do wyników rozwiązań analitycznych.

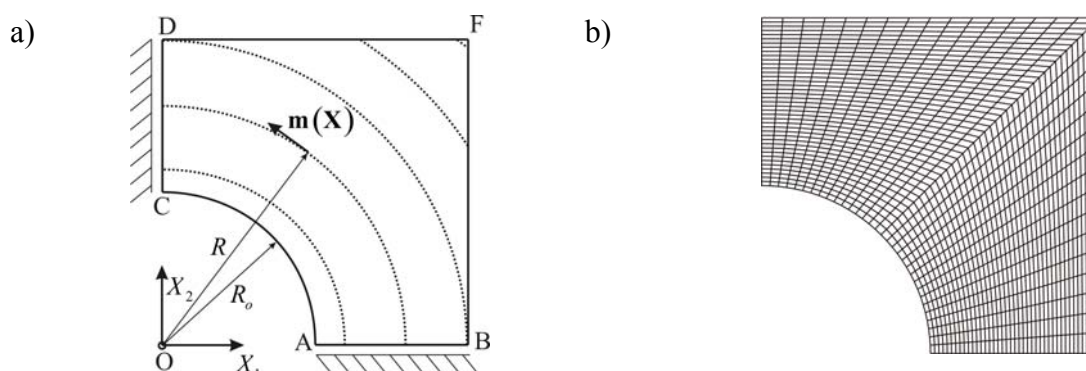
4. Przykład numeryczny

Zadanie dotyczy dwukierunkowego rozciągania hipersprężystej, kwadratowej tarczy (PSO) z otworem kołowym, w której zadane jest następujące pole tensora parametrycznego:

$$\mathbf{m}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} (X_1 \mathbf{b}_1 + X_2 \mathbf{b}_2) \Rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{X}) \rightarrow \frac{1}{X_1^2 + X_2^2} \begin{bmatrix} X_1^2 & X_1 X_2 \\ X_1 X_2 & X_2^2 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

W konsekwencji (18) tensory sztywności modeli materiałów transwersalnie izotropowych KNH i KC (odpowiednio (15) i (17)) są zależne od zmiennej Lagrange'a \mathbf{X} . Oznacza to, że tarcza zbrojona jest włóknami ułożonymi jak na rys.2a. Wobec tego materiał tarczy jest niejednorodny.

Poszukujemy rozwiązania zadania o symetriach pokazanych na rys.2a, czyli rozwiązujemy tylko jedną czwartą tarczy, z siatką MES jak na rys.2b. Przyjęto następujące wymiary tarczy: $|OA| = |AB| = |OC| = |CD| = 1[\text{jd}]$ (jd oznacza jednostkę długości), czyli $R_o = 1[\text{jd}]$.



Rys. 2. a) Geometria, warunki brzegowe oraz sposób ułożenia włókien zbrojenia, b) Siatka MES

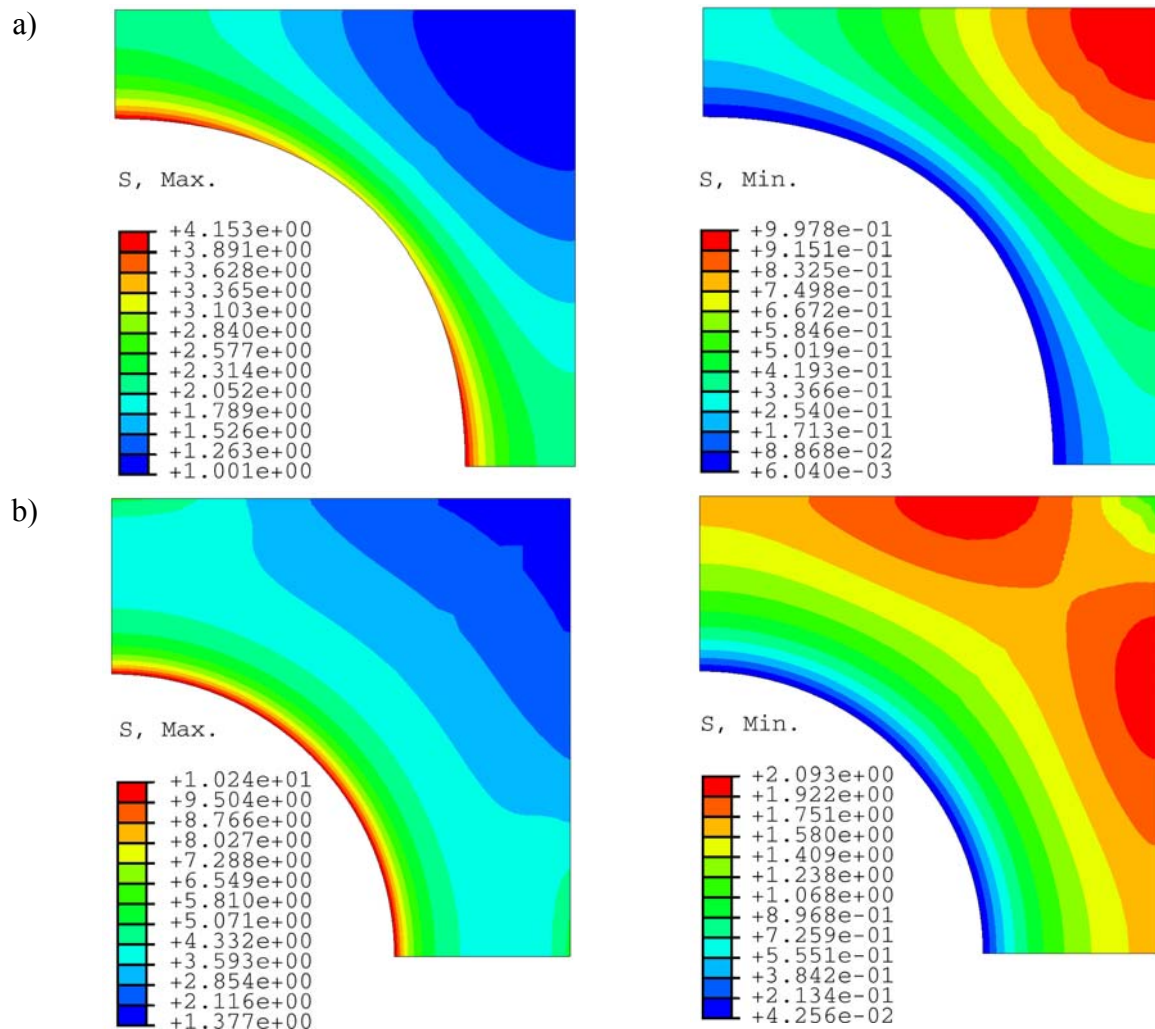
Fig. 2. a) Geometry, boundary conditions and fibers reinforcement arrangement, b) FEM mesh

Na brzegu AB i CD przyjęto warunki symetrii odpowiednio w postaci: $u_2=0$ i $u_1=0$. Na brzegu AC założono zerowe naprężeniowe warunki brzegowe. Obciążenie tarczy jest realizowane na brzegu BF i DF przez przemieszczeniowe warunki brzegowe, które odpowiednio mają postać: $u_1=1[\text{jd}]$ i $u_2=1[\text{jd}]$.

Podstawowym celem tego przykładu jest porównanie rozwiązań zadania w przypadku hipersprężystego materiału izotropowego i zaimplementowanych modeli hipersprężystych materiałów zbrojonych włóknami.

W analizowanym przykładzie przyjęto następujące dane materiałowe: $p = 0.05$, $\mu_0 = 1.0 E_M$, $\lambda_0 = 1.5 E_M$, $E_Z = 26 E_M$ (model KNH), gdzie E_M jest początkowym modułem Younga materiału matrycy. Dodatkowo w przypadku modelu materiału KC przyjęto $f = 0.2$,

por. (8). Przykładowe wyniki, dotyczące modelu KC, w porównaniu do modelu jednorodnego materiału izotropowego pokazano na rys.3. Na wykresach naprężeń głównych widoczne są istotne, jakościowe i ilościowe różnice wyników w konfiguracji aktualnej, między rozwiązaniami dla materiału izotropowego i anizotropowego. Ponieważ rozpatrywane w teście deformacje nie były bardzo duże z punktu widzenia teorii hipersprężystości, to różnice wyników między modelami KC i KNH były pomijalnie małe.



Rys. 3. Wykresy warstwiczne maksymalnego i minimalnego naprężenia głównego w płaszczyźnie PSO w przypadku: a) materiału izotropowego C, b) materiału zbrojonego włóknami obwodowo KC

Fig. 3. Contour plots in plane strain plane of maximal and minimal main stresses for: a) isotropic material C, b) material KC with circular reinforcement

4. Podsumowanie

W pracy zaproponowano stosunkowo prostą klasę modeli konstytutywnych hipersprężystości dla niejednorodnych materiałów transwersalnie izotropowych, o interpretacji materiałów kompozytowych z izotropową matrycą zbrojoną ciągłymi włóknami. Przyjęto założenie o addytywnej dekompozycji funkcji jednostkowej energii sprężystości, w postaci (4). Zaproponowana klasa modeli sprowadza się, w aproksymacji do teorii liniowej, do klasycznego modelu kompozytu włóknistego, w którym przyjmuje się pełną przyczepność

włókien do matrycy oraz wprowadza założenie o jednowymiarowej odkształcalności włókien. Podano dwa przykłady tego typu modeli hipersprężystości i zaimplementowano je w programie MES ABAQUS. Zaprogramowano tzw. procedurę użytkownika UMAT. Zaproponowano testy numeryczne sprawdzające poprawność implementacji.

Literatura

- [1] ABAQUS *Theory manual*, Version 6.1., 2000, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket.
- [2] ABAQUS/Standard *User's manual*, Version 6.1., 2000, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket.
- [3] Boehler J.P. (ed): *Applications of tensor functions in solid mechanics*. CISM Courses and Lectures, no. 292, 1987, Wien-New York, Springer-Verlag.
- [4] Bonet J., Burton A.J.: "A simple orthotropic, transversely isotropic hyperelastic constitutive equation for large strain computations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 162, 1998, pp. 151-164.
- [5] Jemioło S.: „Studium hipersprężystych własności materiałów izotropowych. Modelowanie i implementacja numeryczna”, *Prace Naukowe, Budownictwo z. 140*, 2002, str. 1-308, OWPW.
- [6] Jemioło S., Telega J.J.: "Modelling elastic behaviour of soft tissues, Part II. Transverse isotropy", *Eng. Trans.*, vol. 49, no. 2-3, 2001, pp. 241-281.
- [7] Spencer A.J.M.: *Deformations of fibre-reinforced materials*, 1972, Oxford, Clarendon Press.

FEM IMPLEMENTATION OF HYPERELASTIC CONSTITUTIVE MODELS FOR MATERIALS WITH FIBERS REINFORCEMENT

Marcin Gajewski, Stanisław Jemioło

The main objective of this article is proposition and FEM implementation in ABAQUS system a simplest class of hyperelastic constitutive models for transversally isotropic non-homogeneous materials. Used simplification is needed because there is no complete experimental data for transversally isotropic materials for large deformations. A key point for formulation of aforementioned constitutive models is assumption of additive decomposition of stored energy function into two parts: one connected with isotropic matrix and the other with the fibers family. Experimental data in such case can be determined in separate tests for isotropic matrix and for fibers family and combined via volume ratio parameter. Two hyperelastic transversally isotropic models of non-homogeneous materials are proposed and implemented in ABAQUS using UMAT subroutine written in FORTRAN code. Numerical problem of bi-directional elongation of plane strain slab with circular hole and circular reinforcement solved in this paper is treated as illustrative and benchmark task.