

# MODEL HIPERSPRĘŻYSTOŚCI IZOTROPOWYCH NIEŚCIŚLIWYCH ELASTOMERÓW

## Cz.3. Analiza lokalnego wyboczenia ściskanych grubościennych cylindrów w zakresie dużych deformacji

Stanisław Jemioło, Marcin Gajewski  
Instytut Mechaniki Konstrukcji Inżynierskich - PW

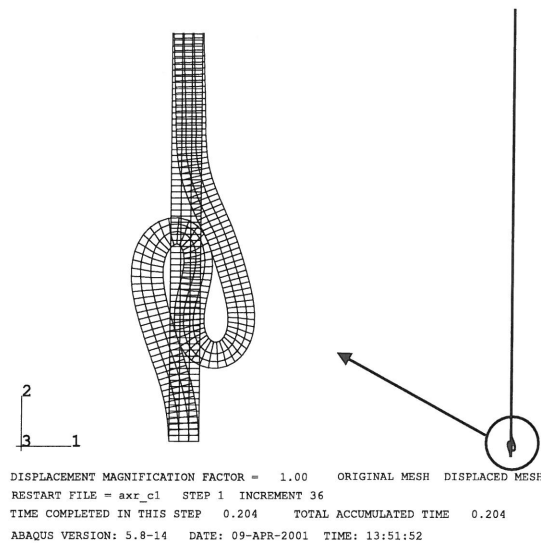
### 1. Wstęp

W cz.1 i cz.2 artykułu zamieściliśmy podstawowe informacje i testy numeryczne MES zaproponowanego modelu elastomerów [I.6] w ramach teorii hipersprężystości materiałów nieściśliwych. Celem tej części pracy jest zastosowanie diskutowanego wcześniej modelu gumy w nieliniowej analizie zagadnienia lokalnego wyboczenia cylindrów w zakresie dużych deformacji sprężystych. Będziemy stosowali program ABAQUS v.5.8 [1] oraz zaimplementowane tam algorytmy iteracyjne. W zagadnieniach brzegowych hipersprężystości konieczne jest zastosowanie, do rozwiązywania układów nieliniowych równań algebraicznych MES, metod, które są uogólnieniem metody Newtona-Raphsona, w szczególności w postaci tzw. algorytmu Riksa-Wempera [4-6] i Crisfilda [2,3], por. także [1,II.9,II.21]. Rozpatrywać będziemy cylindry o przekroju kołowym i eliptycznym. Nie wprowadzamy do modelu numerycznego żadnych imperfekcji kształtu cylindrów i przyjmujemy, że materiał gumy jest materiałem jednorodnym.

### 2. Zagadnienie osiowo-symetryczne

W zadaniu tym rozpatrujemy osiowo-symetryczne deformacje walca gumowego wg modelu materiału M.3 o przekroju kołowym (dane wg Tablicy 1, cz.1, [II.17]). Wymiary walca są następujące: promień wewnętrzny 0.95, promień zewnętrzny 1.05, wysokość 20.0 (jednostek długości). Ze względu na symetrię zadania zaproponowany model MES ma siatkę elementów skończonych złożoną z 3000 elementów CAX4H [1] (3 elementy po grubości walca). Przyjęto następujące warunki brzegowe: założono zerowe przemieszczenia dolnej podstawy walca, zaś obciążenie ściskające zrealizowano na górnej podstawie walca, zadając przemieszczenie w kierunku osi walca (przemieszczenia węzłów w kierunku prostopadłym są swobodne). Ponieważ rozpatrywano bardzo duże lokalne deformacje walca to założono możliwość kontaktu między powierzchniami bocznymi walca. Kontakt zamodelowano przyjmując współczynnik tarcia równy 1 (zastosowano opcję programu ABAQUS v.5.8, \*FRICTION, ROUGH, [1,I.1]), czyli założono kontakt bez możliwości poślizgu. Należy zaznaczyć, że jest to znaczna idealizacja zjawiska tarcia pomiędzy elementami gumowymi (autorzy nie dysponują jednak dokładnymi danymi o współczynniku tarcia dla gumy analizowanej przez Treloara [I.15]). Z punktu widzenia złożoności obliczeń numerycznych zastosowanie współczynnika tarcia różnego od 1 nie wprowadza w analizowanym zadaniu żadnych dodatkowych trudności. Należy podkreślić, że uzyskanie rozwiązania MES zadania tu analizowanego wymaga kilkudziesięciu godzin pracy komputera środowiskowego dużej

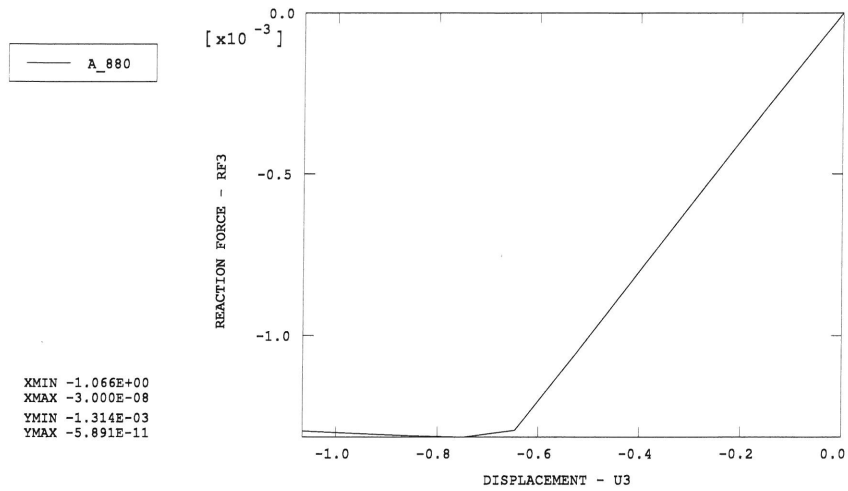
mocy Sun HPC E10000 (Starfire) (konfiguracja: 12 procesorów 400 MHz, RAM 2048 MB, architektura SMP). Przykładowy wynik uzyskany dla 36 iteracji podano na Rys.2.1. Jest to typowa deformacja ściany cylindra po utworzeniu się pierwszej „fałdy” przy dolnej podstawie cylindra. Należy zaznaczyć, że w trakcie dalszego wzrostu przemieszczeń pionowych górnej podstawy cylindra deformacje koncentrowały się w tym samym miejscu, które pokazano na Rys. 2.1.



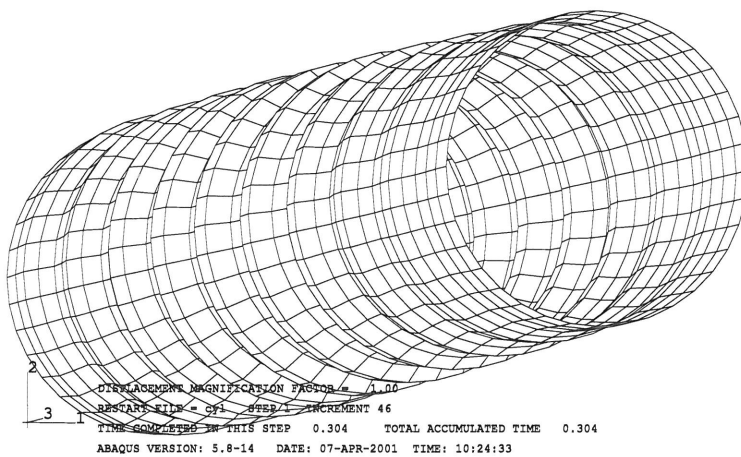
Rys.2.1. Osiowo-symetryczna deformacja ściskanego cylindra. Konfiguracja początkowa i aktualna.

### 3. Cylinder o przekroju kołowym

W punkcie poprzednim *a priori* zakładaliśmy osiowo-symetryczną deformację cylindra. Obecnie odstawimy od tego założenia. Rozpatrzmy model powłokowy i model 3D. Dane materiałowe i geometrię cylindra przyjmujemy identyczne jak w pkt.2. W przypadku modelu powłokowego cylindra założono siatkę MES złożoną z 1440 elementów powłokowych dla dużych deformacji z tzw. zredukowanym całkowaniem S4R [1] (zastosowanie elementów ze zredukowanym całkowaniem wynika z więzów nieściśliwości materiału). Przyjęto następujące warunki brzegowe: w węzłach podstawy dolnej wyzerowano wszystkie stopnie swobody, natomiast w węzłach podstawy górnej zadano tylko przemieszczenia zgodne z osią walca. Na Rys. 3.1 pokazano zależność pomiędzy reakcją w wybranym węźle na podstawie górnej walca w funkcji przemieszczenia. Konfigurację końcową powłoki otrzymano po 47 przyrostach i 115 iteracjach, stosując tzw. zmodyfikowany algorytm Riksa [I.1], por. Rys.3.2. Rozpatrując model 3D cylindra uzyskano rozwiązanie dla znacznie większych jego deformacji, przy tych samych parametrach sterujących algorytmem Riksa. W przypadku modelu 3D cylindra założono siatkę MES złożoną z 10800 elementów skończonych (liczba węzłów 25344) C3D8H [1], trzy elementy po grubości cylindra. Wybrane konfiguracje walca pokazano na Rys. 3.3. Zauważmy, że początkowe deformacje walca lokalizują się w pobliżu dolnej podstawy (por. Rys.3.3.a), następnie pojawiają się sfałdowania na całej długości cylindra (por. Rys.3.3.b), później zaś ulegają one zmniejszeniu (por. Rys.3.3.c) i w konfiguracji końcowej koncentrują się w górnej części walca.

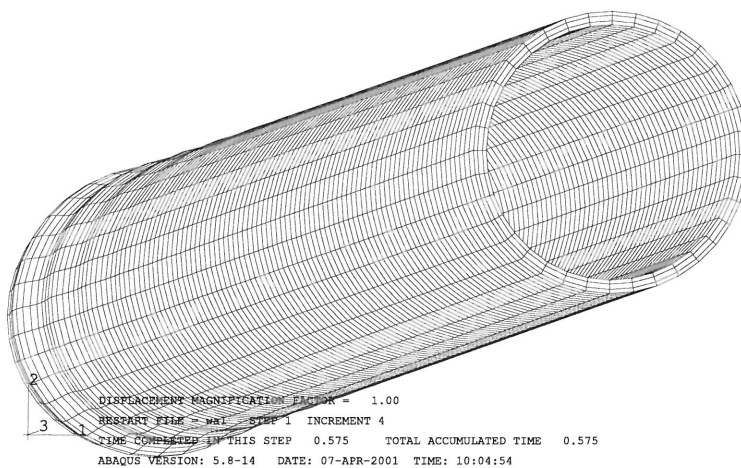


Rys.3.1. Ścieżka równowagi, zależność pomiędzy reakcją w węzle górnej podstawy walca (model powłokowy MES) a przemieszczeniem.

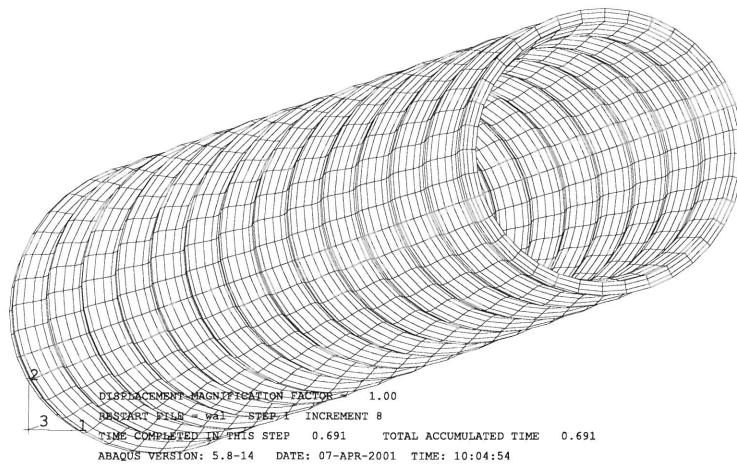


Rys.3.2. Cylinder o przekroju kołowym (model powłokowy MES). Konfiguracja końcowa.

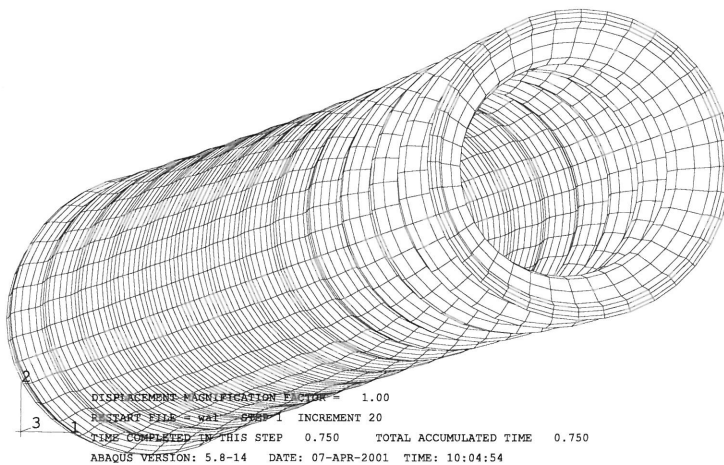
a)



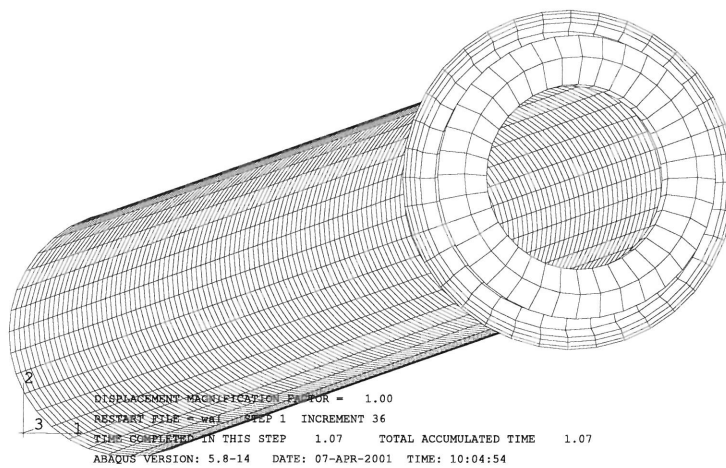
b)



c)



d)

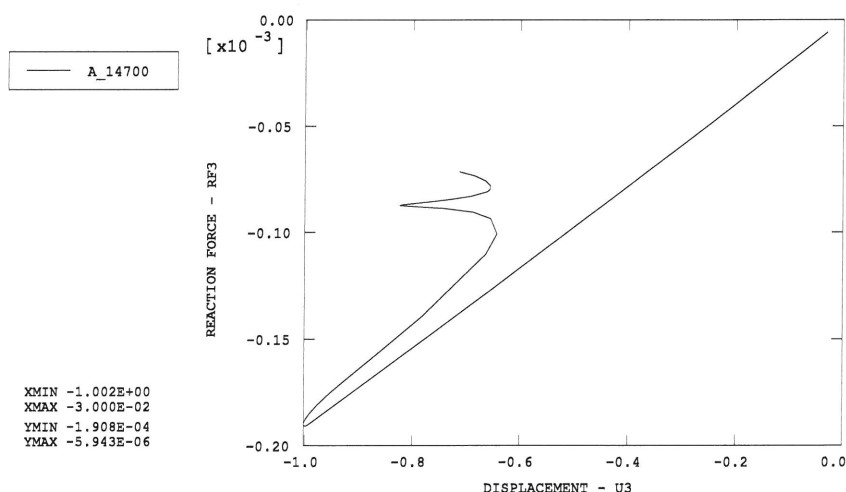


Rys.3.3. Cylinder o przekroju kołowym (model 3D MES). Konfiguracje cylindra dla wybranych kolejnych przyrostów przemieszczenia: a) 4-tego, b) 8-ego, c) 20-ego, d) konfiguracja końcowa (przyrost 36).



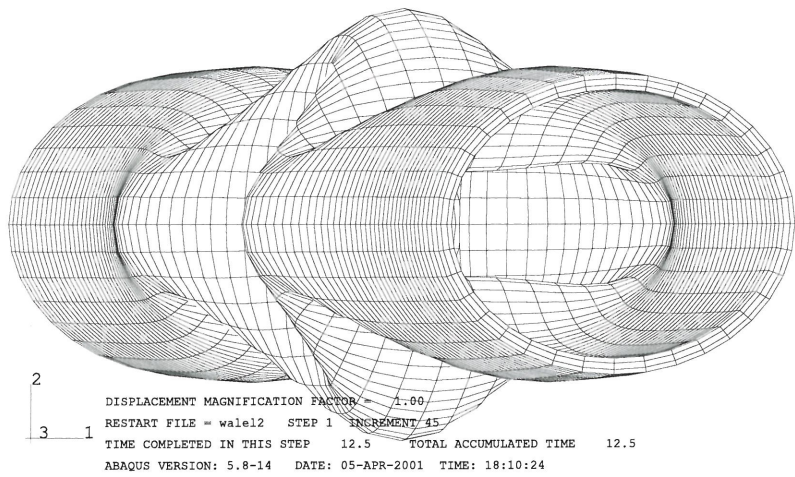
#### 4. Cylinder o przekroju eliptycznym

W przypadku cylindra gumowego o przekroju eliptycznym zastosowano siatkę MES z identyczną liczbą i rodzajem elementów skończonych 3D jak dla cylindra kołowego (stałe materiałowe gumy założono identycznie jak w pkt. 2 i 3). Przyjęto następujące wymiary dla głównych osi elipsy: 1.15 i 0.95 (wymiary zewnętrzne). Grubość ścianek cylindra wynosi 0.1. Wysokość cylindra jest identyczna jak w pkt. 2 i 3. Warunki brzegowe: dolna podstawa jest utwierdzona, zaś w górnej podstawie wyzerowano przemieszczenia prostopadłe do osi walca (zachowano w ten sposób eliptyczny kształt powierzchni górnej). Obciążenie realizowano przemieszczeniami wzdłuż osi walca. Parametry sterujące algorytmem Riksa zdefiniowano identycznie jak w zadaniu z walcem kołowym. Wykonano 161 iteracji w 45 przyrostach. Należy zauważyć, że w przypadku cylindra eliptycznego otrzymujemy jakościowo inne rozwiązania niż podane w pkt.3. Ścieżkę równowagi pokazano na Rys.4.1. Ze względu na ograniczoną liczbę stron artykułu zamieszczamy tylko wybrane wyniki, które są reprezentatywne dla analizowanego zagadnienia.

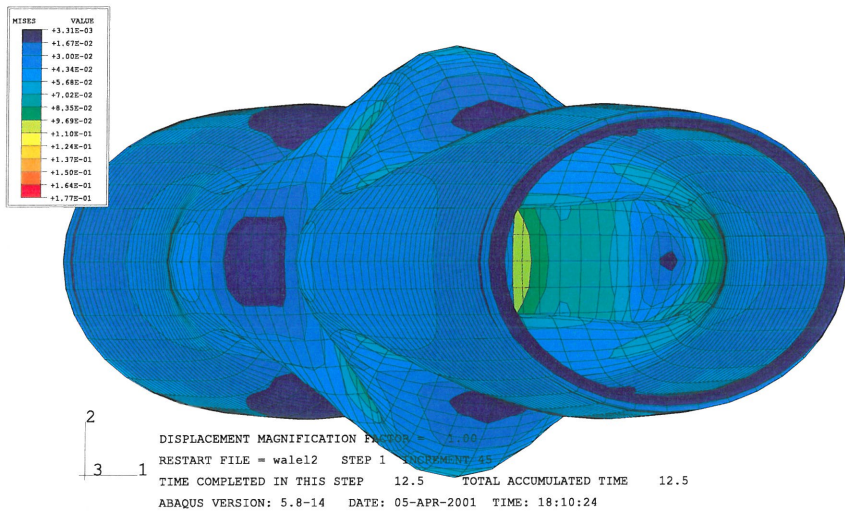


Rys.4.1. Ścieżka równowagi, zależność pomiędzy reakcją w węzle górnej podstawy walca (o przekroju eliptycznym) a przemieszczeniem.

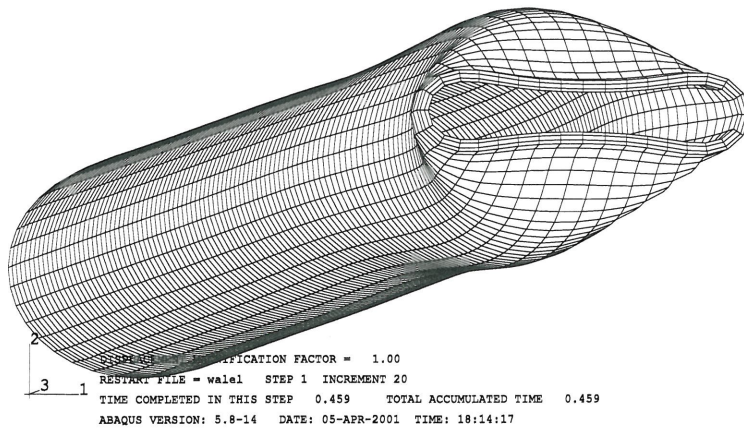
Konfigurację końcową pokazano na Rys.4.2. Wykresy warstwiczne naprężeń zastępczych Misesa zamieszczono na Rys.4.3. Widzimy, że wartości tych naprężeń są bardzo małe, co potwierdza, że nawet dla bardzo dużych deformacji cylindra jesteśmy w zakresie umiarkowanie dużych odkształceń sprężystych gumy. Należy podkreślić, że w przypadku cylindra o przekroju eliptycznym, w całym procesie założonego obciążenia, deformacje lokalizowały się w okolicach połowy jego wysokości, czyli odmiennie niż dla walca kołowego, por. pkt.3. Jeżeli założymy identyczne warunki brzegowe jak dla cylindra kołowego (patrz pkt.3) to także i w tym przypadku deformacja cylindra eliptycznego ma inny charakter. Kończącą konfigurację pokazaliśmy na Rys.4.4. Pomimo, że odkształcenia w konfiguracji końcowej lokalizują się przy podstawie górnej (czyli podobnie jak dla walca kołowego), to w odróżnieniu od cylindra kołowego nie zaobserwowano przemieszczania się fałd na całej powierzchni bocznej walca. Odkształcenia od początku lokalizują się przy podstawie górnej. Wzrost obciążenia powoduje wyłącznie ich zwiększenie (a nie zmianę charakteru deformacji jak w przypadku walca kołowego). Na Rys.4.2. widać, że dalsze zwiększanie obciążenia spowodowałoby kontakt ścian cylindra, dlatego obliczenia zostały przerwane dla 45 przyrostu.



Rys.4.2. Cylinder o przekroju eliptycznym, konfiguracja końcowa.



Rys.4.3. Cylinder o przekroju eliptycznym, konfiguracja końcowa. Wykresy naprężeń zastępczych Misesa.



Rys.4.4. Cylinder o przekroju eliptycznym, konfiguracja końcowa. Warunki brzegowe są identyczne jak w przypadku walca kołowego analizowanego w pkt.3.

W przypadku walca o przekroju eliptycznym analizowano także model powłokowy MES powyższych zadań. Ogólne wnioski są podobne jak dla walca kołowego, por. pkt.3, tzn. stosując model 3D, w porównaniu z modelem powłokowym, uzyskujemy rozwiązanie numeryczne tych zadań dla znacznie większych deformacji (przy tych samych parametrach sterujących algorytmem iteracyjnym Riksa).

## 5. Uwagi końcowe

Podkreślamy, że lokalne wyboczenie rozpatrywanych cylindrów występuje bez zakładania jakichkolwiek imperfekcji ich kształtu i niejednorodności materiału. Rozpatrywane w analizie numerycznej MES siatki są regularne i odpowiednio symetryczne. Przyjęty model materiału gumo-podobnego jest stabilny w sensie Druckera (por. definicję stabilności relacji konstytutywnych materiałów hipersprężystych podaną w podręcznikach programu ABAQUS [1,I.1-I.3]). Przyjmując identyczne parametry sterujące algorytmem iteracyjnym Riksa-Crisfielda zauważono, że znacznie większe deformacje cylindrów można otrzymać w przypadku modeli 3D w stosunku do odpowiadających im modeli powłokowych. Wynika to głównie z istnienia lokalnie bardzo dużych obrotów cząstek cylindra wywołanych jego deformacją. W sformułowaniu 3D hipersprężystości nie mamy żadnych ograniczeń na lokalne obroty cząstek ciała. Uzyskane numerycznie deformacje cylindrów (kolejne ich konfiguracje) w przypadku modeli 3D są jednak ograniczone przez dopuszczalne deformacje elementów skończonych (niedopuszczalne jest tzw. przenicowanie elementu skończonego, co jest oczywiste). Kolejnym ograniczeniem znacznych deformacji cylindrów jest możliwość kontaktu powierzchni bocznych walca. Podany w pkt. 2 przykład ilustruje, że uwzględnienie zjawiska kontaktu (łącznie z tarciami) jest w programie ABAQUS v.5.8 możliwe do zastosowania w ramach standardowych opcji programu ABAQUS, ale znacznie wydłuża to czas obliczeń. Z drugiej strony kontakt występuje zawsze po lokalnym wyboczeniu ścianek cylindrów. Wyniki obliczeń prezentowane w pkt. 3 i 4 dotyczą takich deformacji cylindrów, dla których nie występowało zjawisko kontaktu. Należy zaznaczyć, że dla walców modelowanych elementami 3D obliczenia numeryczne przerwano tylko z powodu braku wolnej przestrzeni dyskowej na zbiory wynikowe (max zbiory wynikowe nie mogły przekraczać w sumie 18 Gb), a nie z powodu „złego uwarunkowania numerycznego” zadania. Kolejnym etapem dalszej pracy powinno być przeanalizowanie: w przypadku zadania podanego w pkt.2, wpływu grubości i wysokości cylindra, natomiast w przypadku zadań prezentowanych w pkt. 3 i 4 dodatkowo należy zbadać wpływ nieregularności założonej siatki MES, co wiąże się z możliwością poszukiwania niesymetrycznych lokalnych wyboczeń cylindrów. Przypominamy, że dla odpowiednio regularnych potencjałów hipersprężystości (i ograniczonej klasy zagadnień brzegowych) dysponujemy tylko twierdzeniami o istnieniu rozwiązania a nie o ich jednoznaczności, por. np. [I.4] oraz np. Rys.4.1. Wobec tego, z punktu widzenia teorii hipersprężystości, dla modeli jednorodnych materiałów z odpowiednio regularną funkcją jednostkowej energii sprężystej, analiza możliwych deformacji cylindrów i ich lokalnego i/lub globalnego wyboczenia jest ważniejsza niż analiza wyboczenia w klasycznym sensie, gdzie *a priori* zakłada się istnienie imperfekcji, które determinują charakter ich deformacji.

## Podziękowania:

Praca pierwszego z autorów (S.J.) była częściowo finansowana z Grantu KBN Nr 7 T07A 04318 oraz Grantu Rektorskiego PW pt.: "Modele konstytutywne hipersprężystych materiałów gumopodobnych w ramach teorii dużych odkształceń. Identyfikacja parametrów materiałowych i implementacja numeryczna w systemie ABAQUS." Prezentowane w pracy

wyniki obliczeń zostały uzyskane z wykorzystaniem zasobów komputerowych Centralnego Ośrodka Informatyki Politechniki Warszawskiej.

## **Literatura**

- [1] ABAQUS/Standard *User's manual*, Version 5.8., Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket, 1998.
- [2] Crisfield M.A. (1981): A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”, *Computers and Structures*, Vol. 13, pp. 55-62.
- [3] Crisfield M.A. (1983): An arc-length method including line searches and accelerations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **19**, pp. 1269-1289.
- [4] Riks E. (1972): The application of Newton's method to the problem of elastic stability, *J. Appl. Mech.*, December, pp. 1060-1065.
- [5] Riks E. (1979): An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *Int. J. Solids Structures*, **15**, 529-551.
- [6] Riks E. (1987): Progress in collapse analyses, *J. Pressure Vessel and Technology*, February, **109**, 33-41.

## **HYPERELASTIC MODEL OF INCOMPRESSIBLE ISOTROPIC ELASTOMERS**

### **Part 3. Analysis of local buckling of compressed thick cylinders in the range of large deformations**

Stanisław Jemioło, Marcin Gajewski  
Institute of Structural Mechanics – WUT

#### **Summary**

The hyperelastic model of elastomers proposed in the first part of this paper has been applied to the analysis of local buckling of rubber cylinders. The elliptical and circular cross-section cylinders for the axi-symmetric, shell and 3D models of finite element mesh are discussed. The finite element program ABAQUS v. 5.8 with the Riks-Crisfield algorithm has been used. The considered cylinders are without any imperfections of shape and they are made of homogeneous rubber-like material, which is stable in the Drucker sense. Different types of deformations and local buckling of elastomer cylinders are observed.