Materiały Konferencji
MathPAD 2008

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu
19-22 sierpnia 2008

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA

Redakcja materiałów:
Mirosław Majewski (e-mail: mirek.majewski@yahoo.com)
Robert Skiba (e-mail: robo@mat.uni.torun.pl)

Okładkę projektował Mirosław Majewski

ISBN 978-83-231-2296-8

Printed in Poland

WYDAWNICTWO NAUKOWE UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA
ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń
Redakcja: tel. (056) 611 42 95, fax 611 47 05
dwyd@umk.pl
Dystrybucja: ul. Reja 25, 87-100 Toruń
Tel./fax (056) 611 42 38
books@umk.pl
www.wydawnictwoumk.pl
Wydanie I
Skład: Mirosław Majewski, Robert Skiba
Druk: Drukarnia Cyfrowa UMK
ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń, tel. (056) 611 22 15

Trzy równoważne definicje okręgu - konstrukcje przy pomocy programu Geometry Expressions.

Kamila Majewska

majewska.camila@gmail.com

Streszczenie

Wiele współczesnych definicji i twierdzeń matematycznych narodziło się już w starożytności. Niektóre z nich pomimo długiego upływu lat nadal są „żywe" i chętnie stosowane, inne nieco odeszły w zapomnienie. Sytuacja ta ma miejsce również w przypadku definicji okręgu przedstawianej uczniom już w szkole podstawowej. Artykuł ma na celu prezentację trzech różnych, aczkolwiek równoważnych sobie definicji okręgu. Praca jest także ukłonem w stronę współczesnych środków dydaktycznych - prezentuje możliwość wprowadzenia pewnych pojęć za pomocą programu Geometry Expressions.

Wprowadzenie

Grecja była jedną z pierwszych, a zarazem głównych kolebek rozwoju starożytnej cywilizacji. Już wówczas dbano o rozwój wszelkich aspektów życia - zarówno cielesnych, jak i umysłowych. Skutkiem takiej postawy był ciągły rozwój sztuki, kultury, a także nauki. To starożytność dała podwaliny wielu współczesnym dziedzinom nauki, także matematyce. W uczonych głowach postawały intuicje matematyczne, twierdzenia, a także definicje aktualne do dnia dzisiejszego . W tym czasie rozwinęły się również trzy różne, aczkolwiek równoważne definicje okręgów. Najstarsza z nich pochodzi z VI wieku p.n.e. jej sformułowanie przypisuje się Talesowi[2]. Druga definicja jest dziełem Euklidesa[3](III wiek p.n.e.), zaś trzecia należy do Apoloniusza[4] (II wiek p.n.e.). Najczęściej używaną, a co za tym idzie najbardziej znaną definicją jest definicja Euklidesa, popularyzowana przez współczesne podręczniki szkolne. Oczywiście środki jakie w swojej pracy wykorzystywał

---

[2] Tales z Miletu(ur. ok. 624 p.n.e., zm. ok. 545 p.n.e.), starożytny grecki filozof, matematyk, astronom, inżynier, polityk, podróżnik i kupiec, zaliczany do siedmiu mędrców starożytnej Grecji, uznawany za twórcę podstaw nauki i filozofii europejskiej. Tales prowadził badania nad udowodnieniem swoich twierdzeń oraz twierdzeń wcześniej postawionych przez matematyków egipskich, dając podstawy nauce przez zapoczątkowanie systematycznej rozbudowy pojęć i twierdzeń geometrycznych. Przypisuje się mu wiele twierdzeń z geometrii współczesnej.

[3] Autor pierwszych prac teoretycznych z matematyki. Główne jego dzieło to Elementy (traktat arytmetyczny i geometryczny, obejmujący swym zakresem podstawowe zagadnienia obu tych nauk). Elementy są pierwszą próbą aksjomatycznego ujęcia geometrii i były podstawowym podręcznikiem geometrii do XIX wieku.

[4] Apoloniusz z Pergi , żył ok. 260 p.n.e. - ok. 190 p.n.e., matematyk i astronom grecki, interesował się głównie geometrią a zwłaszcza krzywymi stożkowymi. Napisał traktat Κωνικά (Konika - "Stożkowe"), w którym opisuje i nadaje nazwy takim krzywym jak elipsa, parabola i hiperbola, już w starożytności nazywano go "Wielkim Geometrą".

Euklides znacznie odbiegają od tych używanych w dzisiejszej szkole. Współczesny nauczyciel ma szeroką gamę wyboru. Jedną z możliwości jest oczywiście komputer z odpowiednim oprogramowaniem. Koncepcja jaką prezentuję bazuje na programie Geometry Expressions umożliwiającym dynamiczną wizualizację rozważań geometrycznych. Program Geometry Expressions został opracowany przez grupę Saltire Software, umożliwia on pracę zarówno pod systemem Windows jak i w rodzinie systemów Linux.

Trzy różne spojrzenia na definicję okręgu

Z uwagi na przyzwyczajenia szkolne zrezygnujmy z chronologii historycznej i rozpocznijmy od definicji szkolnej.

Definicja 1 (okrąg Euklidesa)

Okręgiem o danym środku C i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny P, których odległość od środka C jest równa długości r danego odcinka.

Program Geometry Expressions umożliwia prezentację tej definicji okręgu.

1. Korzystając z opcji Elementy zaznaczmy punkt C - środek przyszłego okręgu.

2. Prowadzimy odcinek o początku w punkcie C, zaś końcowi odcinka przypisujemy punkt P.

3. Zaznaczmy odcinek CP i korzystając z podmenu Deklaracje określamy długość odcinka równą r.

Aby narysować dowolny punkt okręgu Euklidesa o środku C i promieniu r można postąpić następująco.

4. Korzystając z podmenu Elementy zaznaczamy dowolny punkt Q na płaszczyźnie.

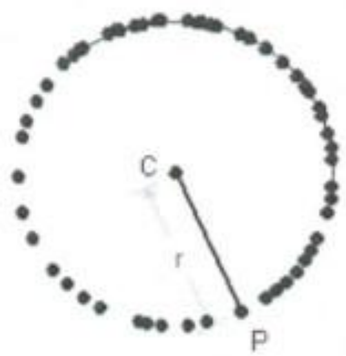
5. Prowadzimy odcinek CQ o początku w punkcie C, zaś końcowi odcinka przypisujemy punkt Q .

6. Zaznaczmy odcinek CQ i korzystając z podmenu Deklaracje określamy długość odcinka równą r, program samodzielnie dopasuje długość odcinka CQ.

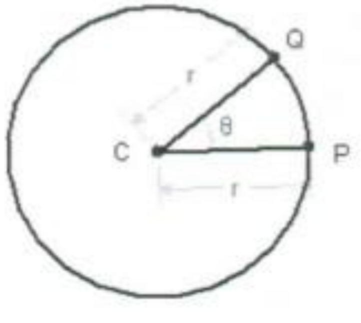
Aby narysować cały okrąg (wszystkie punkty) można wykonać następujące kroki.

7. Mierzymy kąt pomiędzy odcinkiem CP i CQ, w tym celu korzystamy z podmenu Deklaracje. W wyniku tego działania program wprowadzi zmienną θ wyrażającą wielkość tego kąta.

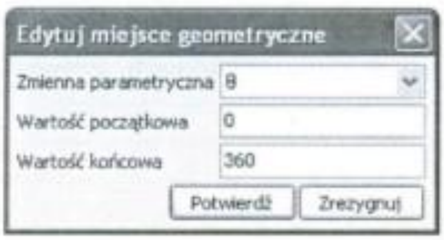
8. Dzięki opcji Miejsce geometryczne dostaniemy obraz drogi jaką przebędzie punkt Q w zależności



Rys. 1



Rys. 2



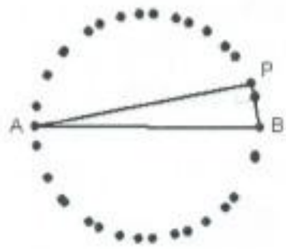
Rys. 3

od kąta θ (Rys.2). W tym celu zaznaczamy punkt Q i definiujemy wartości, jakie θ może przyjmować (patrz Rys.3)

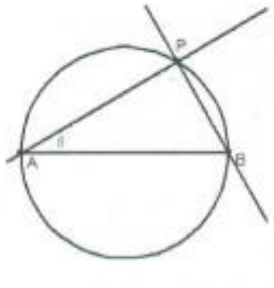
Program umożliwia także animację ruchu punktu Q (mamy komputerowy cyrkiel), co wśród uczniów budzi największe zainteresowanie. W tym celu należy w opcji Zmienne zaznaczyć zmienną Θ i za pomocą intuicyjnych strzałek uruchomić animację.

Definicja 2 (okrąg Talesa)

Okręgiem o średnicy AB nazywamy zbiór utworzony z punktów A i B oraz wszystkich punktów P płaszczyzny takich i tylko takich, dla których kąt APB jest kątem prostym.



Rys. 4



Rys. 5

Na początek spróbujmy narysować pojedynczy punkt P okręgu Talesa o średnicy AB. W **Geometry Expressions** można zrobić to w następujący sposób.

1. Odkładamy odcinek AB korzystając z opcji Odcinek w podmenu Elementy.

2. Z dowolnie wybranego punktu P prowadzimy odcinki PA i PB.

3. Za pomocą menu Deklaracje ustalamy kąt pomiędzy tymi odcinkami jako kąt prosty. Program samodzielnie dostosuje długości odcinków PA oraz PB.

4. Aby narysować cały okrąg jako miejsce geometryczne punktów wystarczy zmierzyć kąt pomiędzy odcinkami AB i AP.

5. Zaznaczamy punkt P i rysujemy jego miejsce geometryczne, w zależności od kąta θ podając zakres jego zmienności (wystarczy że θ zmienia się od 0 do 180°).

Konstrukcję punktu P okręgu Talesa o średnicy AB można przeprowadzić nieco inaczej (podejście konstrukcyjne).

1. Przez koniec A średnicy prowadzimy dowolną prostą.

2. Obliczamy kąt pomiędzy średnicą AB i tą prostą.

3. Konstruujemy prostopadłą przechodzącą przez drugi koniec B średnicy.

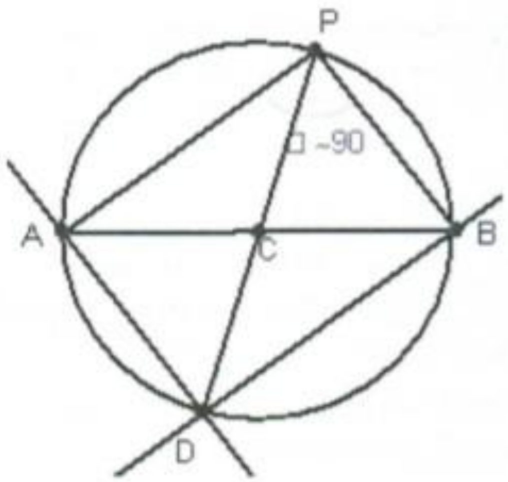
4. Punkt przecięcia tych dwóch prostopadłych prostych jest szukanym punktem P okręgu Talesa.

W tym przypadku okrąg Talesa jako miejsce geometryczne punktów P rysujemy jak poprzednio. w obu przypadkach można pokazać animację rysowania okręgu.

Co ma wspólnego okrąg Talesa o średnicy AB z okręgiem Euklidesa? Oczywiście prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Okrąg Talesa o średnicy AB jest okręgiem Euklidesa, którego środkiem jest środek C odcinka AB, a promień r jest równy $\frac{|AB|}{2}$.

Fakt ten można wykazać metodami geometrii szkolnej. Istotnie, jeśli dowolny punkt P płaszczyzny (różny zarówno od A jak i od B) jest odległy od C o r, to kąt PAC jest równy kątowi APC, zaś kąt CPB jest równy kątowi CBP, bo kąty naprzeciw równych boków w trójkącie są sobie równe. Zatem kąt APB jest kątem prostym, gdyż suma kątów w trójkącie APB wynosi 180°, co dowodzi, że punkt P jest punktem okręgu Talesa o średnicy AB.



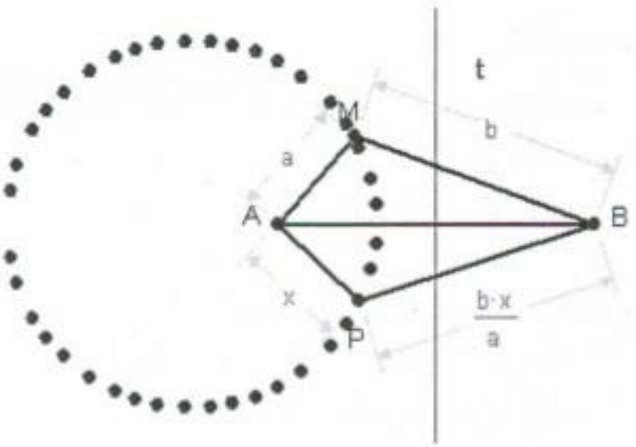
Rys. 6

Odwrotnie, załóżmy że punkt P płaszczyzny jest takim punktem, że kąt APB jest kątem prostym. Prowadząc przez punkty A i B proste równoległe odpowiednio do PB i PA otrzymamy czworokąt który jest prostokątem (patrz Rys.6). A ponieważ przekątne prostokąta połowią się to punkt P jest punktem okręgu Euklidesa o środku w punkcie C i promieniu długości $r = \frac{|AB|}{2}$.

Oczywiście przedstawione tu rozumowanie można zweryfikować eksperymentalnie w programie Geometry Expressions.

Definicja 3 (okrąg Apoloniusza).

Okręgiem wyznaczonym przez odcinek AB oraz punkt M nie leżący na jego symetralnej (równoważnie dwa pomocnicze odcinki różnych długości $a = |AM|$ oraz $b = |BM|$) nazywamy zbiór wszystkich punktów P płaszczyzny takich, że stosunek ich odległości od końca A do odległości od końca B danego odcinka jest równy stosunkowi $\frac{|AM|}{|AB|}\left(=\frac{a}{b}\right)$.



Rys. 7

Na początek spróbujmy narysować w Geometry Expressions pojedynczy punkt P okręgu Apoloniusza wyznaczonego przez odcinek AB i punkt M. Można zrobić to następująco.

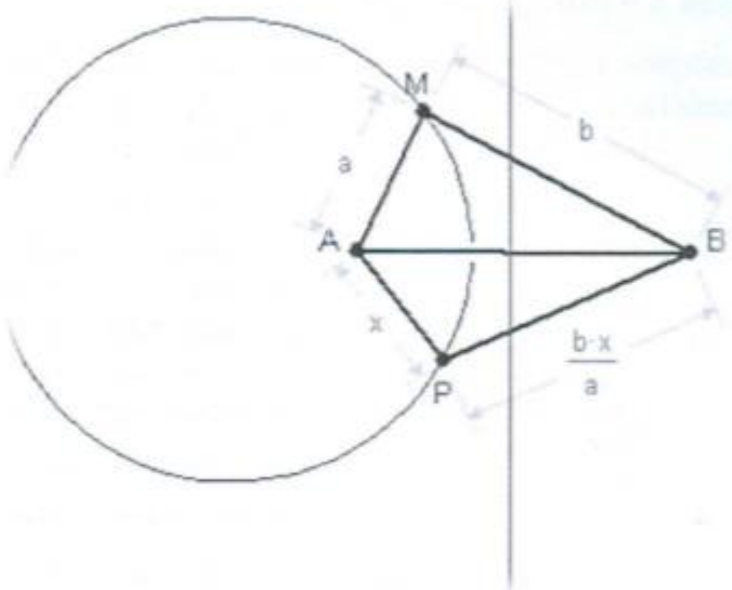
1. Korzystając z menu Elementy odkładamy odcinek AB, rysujemy symetralną t tego odcinka i wybieramy punkt M nie należący do tej symetralnej.

2. Mierzymy długości odcinków AM i BM, nadając im wartości odpowiednio a i b.

3. Zaznaczamy dowolny punkt P, rysujemy odcinek AP i mierzymy jego długość x.

4. Rysujemy odcinek PB i nadajemy mu długość $y = \frac{b \cdot x}{a}$ (wtedy oczywiście $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$). Program automatycznie dopasuje położenie punktu P.

Aby narysować cały okrąg Apoloniusza (wszystkie punkty P) wystarczy zmieniać wartości x długości odcinka AP (patrz Rys. 8). Można także obserwować animację rysowania okręgu dobierając zakresy x.



Rys. 8

Co okrąg Apoloniusza ma wspólnego z poprzednimi okręgami ?

Z eksperymentu widzimy, że okrąg Apoloniusza przecina prostą AB w dwóch punktach. Punkty te łatwo skonstruować. Niech K będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta wewnętrznego przy wierzchołku M trójkąta AMB z prostą AB, zaś L punktem przecięcia dwusiecznej kąta zewnętrznego tegoż trójkąta przy tym samym wierzchołku. Wtedy, odpowiednio z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego i zewnętrznego w trójkącie mamy $\frac{|KA|}{|KB|} = \frac{|MA|}{|MA|} = \frac{a}{b}$ i $\frac{|LA|}{|LB|} = \frac{|MA|}{|MA|} = \frac{a}{b}$. Oznacza to, że punkty K i L są punktami okręgu Apoloniusza, leżącymi na prostej AB. Co więcej, dwusieczne te są do siebie prostopadłe, a zatem punkt M jest punktem okręgu Talesa o średnicy KL. Jeśli P jest dowolnym punktem naszego okręgu Apoloniusza, to możemy dla niego powtórzyć analogiczne rozumowanie jak dla punktu M. Odpowiednie dwusieczne przetną prostą AB w tych samych punktach K i L (wynika to z jednoznaczności podziału w danym stosunku). A zatem każdy punkt naszego okręgu Apoloniusza jest punktem okręgu Talesa o średnicy KL.

Można udowodnić, że wynikanie odwrotne jest także prawdziwe, co z uwagi na konieczność prowadzenia dłuższych rozważań tu pominiemy. Ostatecznie mamy więc twierdzenie.

Okrąg Apoloniusza wyznaczony przez odcinek AB i punkt M jest okręgiem Talesa o średnicy KL.

Twierdzenie to daje wiele technicznych możliwości rysowania okręgu Apoloniusza, wystarczy zastosować to co robiliśmy wcześniej.

Zakończenie

Na zakończenie warto także wspomnieć o podejściu analitycznym, które umożliwia program. Zilustrujemy to właśnie w najbardziej skomplikowanym przypadku okręgu Apoloniusza.

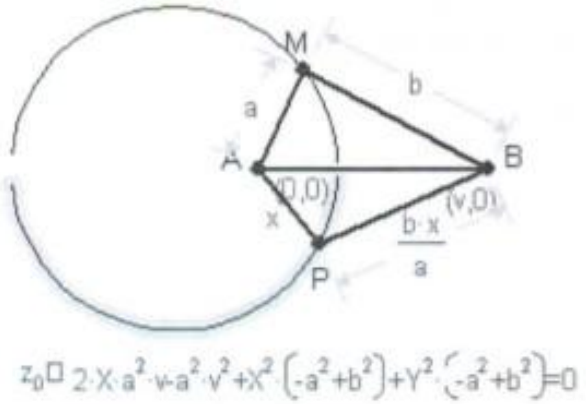
1. Dzięki możliwości wykonywania rachunków symbolicznych w programie można szybko wyznaczyć wzór okręgu, a także jego środek i promień. W tym celu wprowadzamy współrzędne punktów A i B. Dla uproszczenia przyjmijmy, że współrzędne punktu A = (0,0) zaś B = (v,0).

2. Zaznaczamy miejsce geometryczne wyznaczone przez punkt P, a następnie korzystamy z podmenu Wyliczenia. Przy pomocy opcji Równanie uwikłane wyznaczmy równanie okręgu (Rys.9).

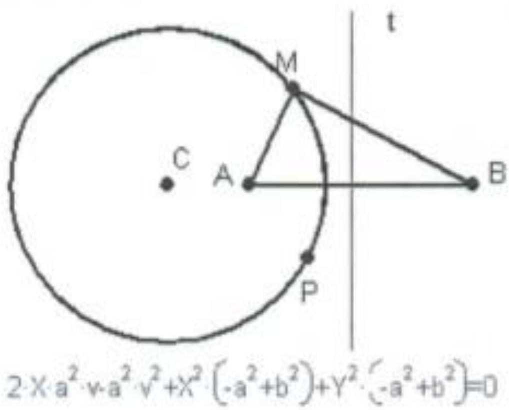
3. Korzystając z opcji Deklaracje rysujemy okrąg o równaniu wcześniej wyznaczonym (dla przejrzystości, aby rysunek był cały czas czytelny zostały ukryte pewne jego elementy) (Rys. 10)

4. Program samodzielnie wyznaczy nam środek C okręgu.

Zauważmy, że do wyznaczonego w ten sposób koła należy odpowiednio punkt A lub punkt B – zależy to od położenia punktu M (jeżeli punkt M znajduje się po lewej stronie prostej t – czyli długość odcinka |AM| < |BM| to do koła należy punkt A (rys. 10), jeśli natomiast |AM| > |BM| to koło zawiera punkt B).



Rys. 9



Rys. 10

Literatura

1. Eryk Kurcius, Równoważne definicje okręgu, kwartalnik Matematyka i komputery, nr 15.

2. Jerzy Bednarczuk, Urok przekształceń afinicznych, Biblioteczka Matematyczna, nr. 36, Warszawa 1978.

3. Materiały pobrane ze strony http://pl.wikipedia.org dnia 15.07.2008.