

---

Józef Mróz\*, Edward Preweda\*, Tadeusz Szczutko\*,

WYKORZYSTANIE NOWOCZESNEJ TECHNIKI  
POMIAROWO-OBLICZENIOWEJ W GEODEZYJNYCH  
POMIARACH ZBIORNIKÓW CYLINDRYCZNYCH\*\*

---

## 1. Wprowadzenie

Obecnie jesteśmy świadkami dynamicznego rozwoju zarówno sprzętu geodezyjnego, jak i informatycznego. Pojawiające się w seryjnej produkcji precyzyjne instrumenty geodezyjne, a zwłaszcza zintegrowane tachimetry elektroniczne, np. typu TC 2002 firmy Leica, gwarantują osiągnięcie wysokich dokładności pomiaru zarówno długości, jak i kątów. Wielką zaletą tych przyrządów jest automatyczna rejestracja obserwacji na różnych nośnikach informacji, które z kolei umożliwiają komunikację pomiędzy instrumentem a komputerem.

Nowoczesny sprzęt geodezyjny odgrywa istotną rolę w modernizacji dotychczasowych i tworzeniu nowych technologii pomiarowych, a w połączeniu z techniką komputerową umożliwia pełną automatyzację procesów pomiarowo-obliczeniowych wraz z graficzną prezentacją wyników pośrednich lub końcowych.

W niniejszej pracy przedstawiono wyniki uzyskane przy zastosowaniu omówionych powyżej technik pomiarowo-obliczeniowych w pracach związanych z badaniem zbiorników cylindrycznych.

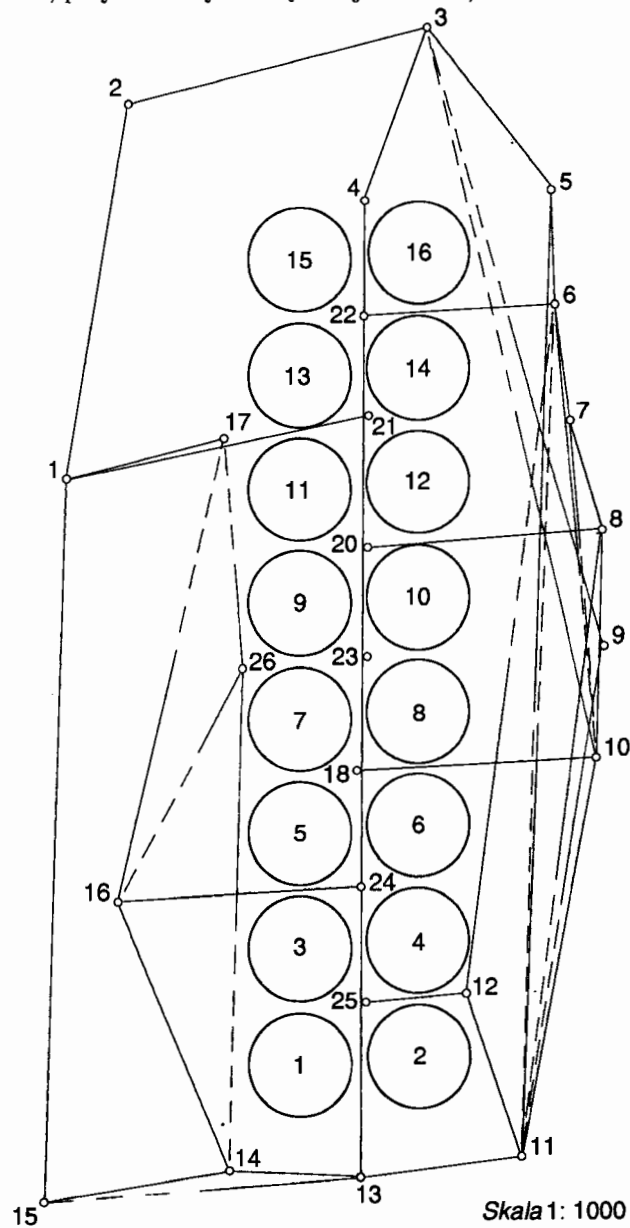
---

\*Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska

\*\*Pracę wykonano w ramach projektu badawczego nr 9 S 605 034 03 finansowanego przez KBN w latach 1993-95

## 2. Charakterystyka obiektu

Obiekt stanowi 16 zbiorników w kształcie walca ułożonych w dwóch rzędach po osiem (rys. 1). Wysokość każdego zbiornika bez zabudowy technologicznej na górze wynosi około 27 m, przy średnicy zewnętrznej około 19,5 m.



Rys. 1. Szkic osnowy pomiarowej obiektu

Zbiorniki, wykonane metodą ślizgową w początkach lat 60-tych, posadowione są na kielichach o nieco większej średnicy, ale nie zawsze współosiowo. Zewnętrzne ściany zbiorników wzmocnione są obręczami stalowymi, umieszczanymi przeważnie co 1,25 m. Elewacje zbiorników nie są tynkowane i stąd daje się zauważyć dużą porowatość, dochodzącą do  $\pm 1,5$  cm.

### 3. Przebieg pomiaru i obliczeń

Położenie obiektu, zabudowa zewnętrzna i widoczność profilów określiły kształt i formę osnowy. Założono lokalną poligonową sieć węzłową, składającą się z trzech ciągów oraz kilku punktów wyznaczonych wcięciami kąto-liniowymi, bazując na punktach poligonowych (rys. 1). Sieć pomiarową wyrównano metodą ścisłą w lokalnym układzie współrzędnych, przyjmując oś  $x$  wzdłuż rzędów zbiorników. Założono również kilka reperów roboczych, których wysokości wyznaczono z niwelacji geometrycznej, również w lokalnym układzie. Posłużyły one do wyznaczenia wysokości osi celowej tachimetru elektronicznego w czasie obserwacji zbiorników. Do sytuacyjno-wysokościowego wyznaczenia położenia punktów zastosowano metodę biegunową. Do pomiaru użyto precyzyjnego tachimetru TC 2002 firmy Leica, natomiast do sygnalizacji poszczególnych punktów na zbiorniku wykorzystano prototypowe urządzenie do pomiaru szyn suwnicowych, z zamocowanym reflektorem pryzmatycznym GPH1 z tarczą celowniczą. Urządzenie to dostawiano poziomo do ściany zbiornika z kosza drabiny strażackiej typu MAGIRUS na kolejnych punktach profilu pionowego, w odstępach co około 2,5 m (co druga obręcz). Na każdym zbiorniku, zgodnie z życzeniem zleceniodawcy, wykonano 4 profile – po dwa w płaszczyznach  $OXZ$  i  $OYZ$ , natomiast na zbiorniku nr 11 wykonano 12 profili równomiernie rozmieszczonych na obwodzie. Po zakończeniu pomiarów, w układzie współrzędnych zdefiniowanym powyżej, wyznaczono współrzędne  $x$ ,  $y$ ,  $z$  wszystkich punktów.

### 4. Algorytm wyznaczania parametrów geometrycznych zbiorników

Jak wiadomo, pomiary geodezyjne dostarczają informacji o obiekcie w postaci zbioru współrzędnych  $x$ ,  $y$ ,  $z$  punktów odpowiednio rozmieszczonych na jego powierzchni. W zależności od wymagań zleceniodawcy oraz od tego, jakie parametry obiektu należy kontrolować lub wyznaczać, liczba tych punktów może być zmienna. Będzie ona określać sposób rozwiązania zadania i zastosowanie odpowiedniego algorytmu. Wyznaczane parametry opisujące obiekt i ich dokładność pozostają w ścisłej zależności zarówno od liczby punktów, jak i dokładności obserwacji. W aspekcie powyższych uwag, poniżej, w krótkim zarysie zostaną podane dwa algorytmy opracowania wyników pomiarów zbiorników cylindrycznych.

#### 4.1. Obliczanie odchylenia osi obiektu od linii pionu

Najprostszym rozwiązaniem tego zagadnienia jest obliczenie współrzędnych  $X_{s,i}$ ,  $Y_{s,i}$  środków każdego z przekrojów poziomych  $Z_i$  oraz wektora  $\Delta_{s,i}$  odchylenia od linii pionu, przechodzącej przez środek przekroju odniesienia (zerowego).

Pierwsze z powyższych zadań sprowadza się do wpasowania okręgu w grupę punktów leżących na płaszczyźnie poziomej każdego z przekrojów. Poszukiwanymi parametrami są współrzędne  $X_s$ ,  $Y_s$  punktu środka okręgu oraz jego promień  $R$ .

Równanie okręgu:

$$(x - X_s)^2 + (y - Y_s)^2 = R^2 \quad (1)$$

lub jego rozwiniętą formę

$$x^2 - 2xX_s + X_s^2 + y^2 - 2yY_s + Y_s^2 - R^2 = 0 \quad (2)$$

możemy przedstawić w postaci parametrycznej:

$$x^2 + y^2 + xA + yB + C = 0 \quad (3)$$

w którym to równaniu

$$A = -2X_s,$$

$$B = -2Y_s,$$

$$C = X_s^2 + Y_s^2$$

Szukane parametry środka wyraża się wzorami:

$$X_s = -\frac{A}{2}, \quad Y_s = -\frac{B}{2}, \quad R = \sqrt{X_s^2 + Y_s^2 - C} \quad (4)$$

Dla liczby punktów większej od 3 wpasowanie okręgu wykonujemy metodą najmniejszej sumy kwadratów odchylek, wyznaczając parametry  $A$ ,  $B$  i  $C$  jako niewiadome układu równań błędów typu:

$$v_i = x_i A + y_i B + C + l_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

gdzie  $l_i = x_i^2 + y_i^2$ .

Po przejściu do równań normalnych i ich rozwiązaniu, korzystając ze wzorów (4) znajdujemy interesujące nas parametry.

Odchylenia osi obrotu od linii pionu oblicza się jako różnice pomiędzy współrzędnymi wyznaczonych środków przekrojów i współrzędnymi przekroju odniesienia (zerowego).

## 4.2. Estymacja parametrów położenia i kształtu powierzchni stopnia drugiego

### 4.2.1. Estymacja parametrów równania powierzchni

Równanie ogólne powierzchni stopnia drugiego ma postać:

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + a_{33}z^2 + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (6)$$

Przyjmując za stałe wartości odpowiednich parametrów równania powierzchni, można nakładać warunki brzegowe pozwalające na aproksymację powierzchni określonego typu. Wartości parametrów  $a_{ij}$  równania powierzchni określamy na podstawie współrzędnych  $x, y, z$  punktów reprezentujących powłokę obiektu. Eliminując z równania (6) jedną niewiadomą otrzymamy:

$$G(x, y, z) = x^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{14}x + b_{22}y^2 + 2b_{23}yz + 2b_{24}y + b_{33}z^2 + 2b_{34}z + b_{44} = 0 \quad (7)$$

przy czym:  $b_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{11}}$ ; ( $b_{11} = 1$ ).

Równania aproksymacyjne, zapisane w notacji macierzowej mają postać:

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{g} + \mathbf{v} \quad (8)$$

przy czym:

$$\mathbf{B}_{(n,u)} = \begin{bmatrix} 2x_1y_1 & 2x_1z_1 & \dots & 1 \\ 2x_2y_1 & 2x_2z_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 2x_ny_n & 2x_nz_n & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{(u,1)} = \begin{bmatrix} db_{12} \\ db_{13} \\ \vdots \\ db_{44} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

( $n$  – liczba obserwowanych punktów,  $u$  – liczba prametrów powierzchni).

Przyjmując współrzędne punktów za jednakowo dokładne, nieobciążony estymator  $\hat{\mathbf{x}}$  wektora niewiadomych szacujemy rozwiązując uogólnione liniowe zadanie najmniejszych kwadratów:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = (\mathbf{g} - \mathbf{B}\mathbf{x})^T (\mathbf{g} - \mathbf{B}\mathbf{x}) \rightarrow \text{minimum} \quad (9)$$

#### 4.2.2. Estymacja współrzędnych środka powłoki

Jak wiadomo [1], wszystkie średnice kwadryki centralnej przecinają się w jednym punkcie, zwanym środkiem kwadryki. Na podstawie składowych wektora normalnego do powierzchni stopnia drugiego, którego współrzędne dla punktu określającego środek symetrii będą równe zero, możemy zestawić układ równań:

$$\begin{aligned}x_0 + b_{12}y_0 + b_{13}z_0 + b_{14} &= 0 \\b_{21}x_0 + b_{22}y_0 + b_{23}z_0 + b_{24} &= 0 \\b_{31}x_0 + b_{32}y_0 + b_{33}z_0 + b_{34} &= 0\end{aligned}\tag{10}$$

którego rozwiązaniem są najbardziej prawdopodobne wartości współrzędnych środka  $(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0)$  wyaprosymowanej powierzchni.

W przypadku powierzchni niecentralnych współrzędne środka  $\hat{x}_0, \hat{y}_0$  można określić dla dowolnie ustalonej wartości  $z$  ( $z = \text{const}$ ), rozwiązując układ równań

$$\begin{aligned}x_0 + b_{12}y_0 + b_{13}z + b_{14} &= 0 \\b_{21}x_0 + b_{22}y_0 + b_{23}z + b_{24} &= 0\end{aligned}\tag{11}$$

#### 4.2.3. Estymacja póloli głównych

Wymiary póloli głównych aproksymowanych powierzchni wyznaczymy po przekształceniu funkcji (7) na postać kanoniczną. Transformacja ta polega na obrocie osi współrzędnych w taki sposób, aby każda z nowych osi była skierowana wzdłuż jednej z osi głównych oraz na przesunięciu początku układu współrzędnych do środka kwadryki. Kierunki osi głównych pokrywają się z kierunkami wektorów własnych macierzy utworzonej ze współczynników charakterystycznej formy kwadratowej równania (7):

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\tag{12}$$

Macierz  $\xi$  ma trzy wartości własne  $\lambda$ , wynikające z warunku

$$\xi = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda \end{bmatrix}\tag{13}$$

Korzystając z obliczonych pierwiastków charakterystycznych  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  równanie powierzchni można przedstawić w postaci kanonicznej.

Jeżeli niezmiennik  $K \neq 0$  (powierzchnie centralne) wówczas:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{L}{K} = 0\tag{14}$$

natomiast dla  $K = 0, J \neq 0$ , poprzez obrót i przesunięcie układu prostokątnego równanie powierzchni możemy sprowadzić do postaci:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{\frac{L}{J}}z = 0 \quad (15)$$

Niezmienniki  $J, K, L$  występujące we wzorach (14) i (15) mają postać:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \quad L = \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

$$K = \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \quad (16)$$

Wymiary osi głównych obliczymy, porównując równanie danej powierzchni z równaniem przedstawiającym ogólną postać kanoniczną równania kwadryki. W tabeli 1 przedstawiamy parametry hiperboloidy jednopowłokowej i walca eliptycznego, wyrażone przez niezmienniki i wartości własne macierzy (13).

Tabela 1

Powierzchnia	Równanie kanoniczne	Niezmienniki	Wartości własne	Parametry
Hiperboloida jednopowłokowa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$K < 0$ $K < 0$	$\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 > \lambda_3$	$a^2 = -\frac{1}{\lambda_2} \frac{L}{K}$ $b^2 = -\frac{1}{\lambda_1} \frac{L}{K}$ $c^2 = \frac{1}{\lambda_3} \frac{L}{K}$
Walec eliptyczny	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$K = 0, L = 0$ $J > 0$	$ \lambda_1  \geq  \lambda_2 $ $(\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$	$a^2 = \frac{1}{ \lambda_1 }$ $b^2 = \frac{1}{ \lambda_2 }$

#### 4.2.4. Estymacja kierunków osi głównych powierzchni modelowej

Wszystkie wyaproksymowane powierzchnie mają swoje kierunki główne w przyjętym układzie współrzędnych prostokątnych. Kosinusy kierunkowe osi głównych wyznaczamy na podstawie warunku:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 1 - \lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0] \quad (17)$$

#### 4.2.5. Wyznaczenie odchyłek kształtu powłoki rzeczywistej od modelowej

Rozwiązując układ równań aproksymacyjnych typu (8), możemy określić wektor wpasowania  $v$ , wyrażający niespełnienie przez punkty reprezentujące powłokę równania aproksymowanej powierzchni. Ze względów praktycznych przetransformujemy ten wektor na wektor normalny do powierzchni wyaproksymowanej.

Korzystając ze składowych  $N_x, N_y, N_z$  wektora normalnego  $N$  do powierzchni modelowej, można zapisać:

$$[x_m \ y_m \ z_m] = [x \ y \ z] + p[N_x \ N_y \ N_z] \quad (18)$$

lub:

$$[x_m \ y_m \ z_m] = [x \ y \ z] + [v_x \ v_y \ v_z] \quad (19)$$

gdzie:  $[x \ y \ z]$  – macierz współrzędnych punktów reprezentujących powłokę rzeczywistą,

$[x_m \ y_m \ z_m]$  – macierz współrzędnych punktów powłoki modelowej odpowiadająca macierzy  $[x \ y \ z]$ ,

$[v_x \ v_y \ v_z]$  – macierz składowych odchyłek kształtu pomiędzy powierzchnią wyaproksymowaną a rzeczywistą,

$[N_x \ N_y \ N_z]$  – macierz składowych wektora normalnego do powierzchni wyaproksymowanej w punktach obserwowanych  $P(x, y, z)$ ,

$p$  – wektor szukanych parametrów.

Zastępując w równaniach aproksymacyjnych współrzędne punktów obserwowanych współrzędnymi powierzchni modelowej określonymi według (19), a wektor niewiadomych  $x$  jego estymatorem  $\hat{x}$ , otrzymamy  $n$  niezależnych równań warunkowych, które po przekształceniach możemy zapisać następująco:

$$\begin{aligned} p_i^2 [N_{x_i}^2 + b_{22}N_{y_i}^2 + b_{33}N_{z_i}^2 + 2b_{12}N_{x_i}N_{y_i} + 2b_{13}N_{x_i}N_{z_i} + 2b_{23}N_{y_i}N_{z_i}] + \\ p_i [N_{x_i}^2 + N_{y_i}^2 + N_{z_i}^2] + x_i^2 + b_{22}y_i^2 + b_{33}z_i^2 + 2b_{12}x_iy_i + 2b_{13}x_iz_i + \\ 2b_{23}y_iz_i + 2(b_{14}x_i + b_{24}y_i + b_{34}z_i) + b_{44} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

czyli:

$$p_i^2 \mu_i^2 + p_i \eta_i + \nu_i = 0 \quad (21)$$

gdzie:

$$\mu_i = N_{x_i}^2 + b_{22}N_{y_i}^2 + b_{33}N_{z_i}^2 + 2b_{12}N_{x_i}N_{y_i} + 2b_{13}N_{x_i}N_{z_i} + 2b_{23}N_{y_i}N_{z_i}$$

$$\eta_i = N_{x_i}^2 + N_{y_i}^2 + N_{z_i}^2 = d_i^2$$



Rozwiązując  $n$  równań kwadratowych typu (21), wyznaczamy wektor parametrów  $p$ , przy czym:

$$p = \min \left\{ \left| \frac{-\eta - \sqrt{\eta^2 - 4\mu v}}{2\mu}, \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 - 4\mu v}}{2\mu} \right| \right\} = \left\{ \left| \frac{-\eta - \sqrt{\Delta}}{2\mu}, \frac{-\eta + \sqrt{\Delta}}{2\mu} \right| \right\} \quad (22)$$

Składowe  $v_x, v_y, v_z$  odległości obserwowanego punktu  $P$  od powłoki modelowej obliczamy według zależności:

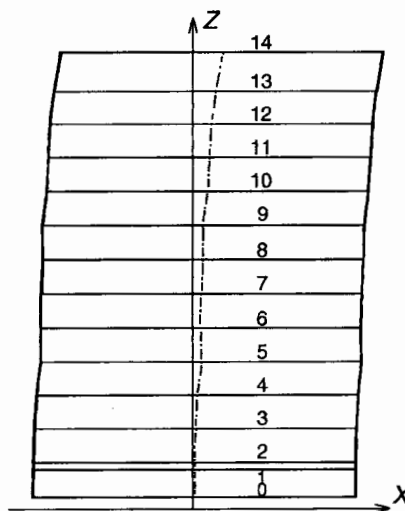
$$v_x = pN_x; \quad v_y = pN_y; \quad v_z = pN_z \quad (23)$$

zaś odległość przestrzenna wyraża się wzorem:

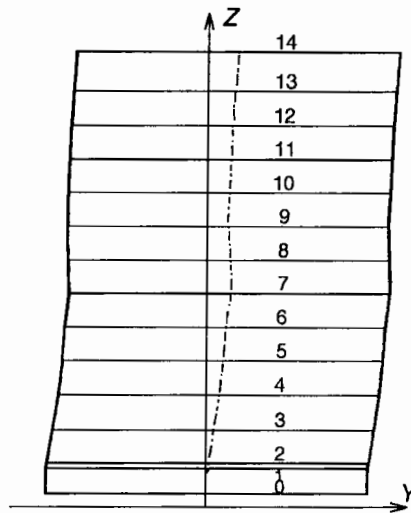
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = p\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} = p \cdot d \quad (24)$$

## 5. Opracowanie wyników pomiarów

Po zakończeniu pomiarów całość prac obliczeniowych związanych z wyrównaniem sieci pomiarowej, obliczeniem współrzędnych punktów na obiekcie oraz realizacją obydwu algorytmów wykonano według programów własnych autorów. W szczególności modułowy system KWADRYKA [2] umożliwił pełną automatyzację procesu wyznaczania cech geometrycznych obiektu i ich wizualizację.



**Rys. 2.** Wykres odchyłań środków przekrojów zbiornika od linii pionu w płaszczyźnie  $ZX$   
Skala wzdłuż osi  $Z$  i  $Y$  1 : 400 Skala odchyłań 1 : 20



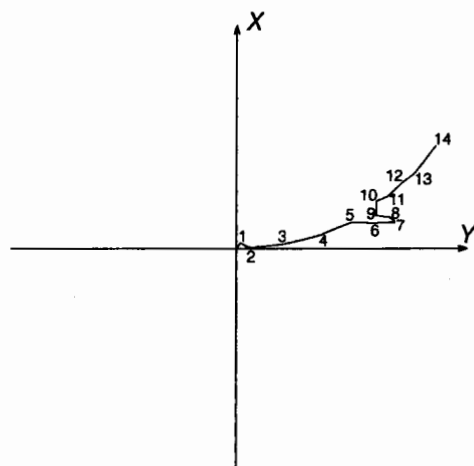
**Rys. 3.** Wykres odchyleń środków przekrojów zbiornika od linii pionu w płaszczyźnie ZY  
Skala wzdłuż osi Z i Y 1 : 400 Skala odchyleń 1 : 20

Ze względu na dużą objętość zestawionych tabelarycznie końcowych wyników obliczeń dotyczących opracowywanego zbiornika nr 11 (180 punktów) poniżej zostaje przedstawiona tylko ich forma graficzna.

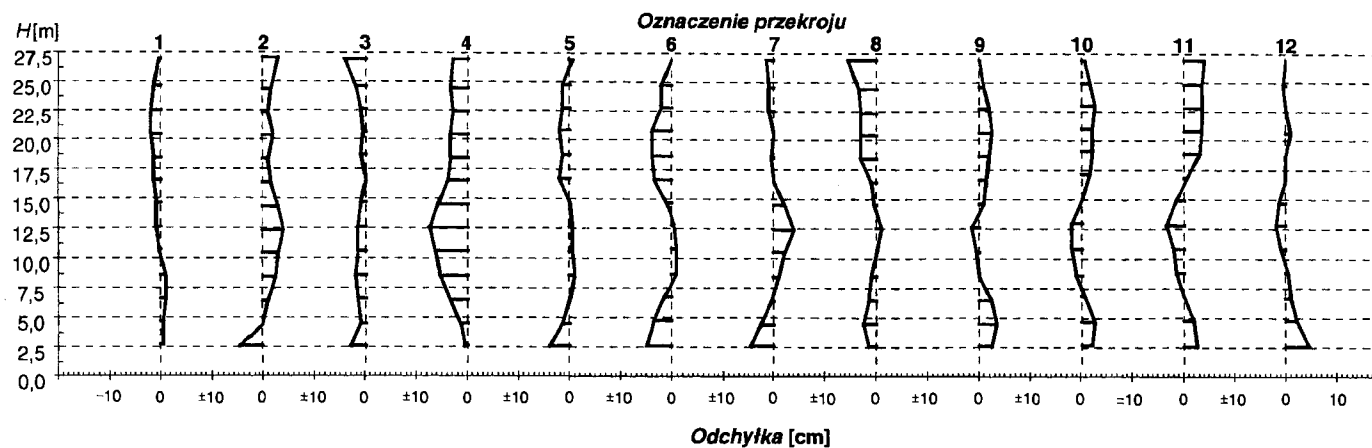
Na rysunkach 2, 3, 4 przedstawiono wyniki uzyskane z zastosowania pierwszego algorytmu. Parametry wyaprosymowanych powierzchni (bez uwzględnienia przekroju poziomego nr 0 i 1) programem KWADRYKA zestawiono w tabeli 2 a graficzną ilustrację odchylek kształtu powłoki obserwowanej względem czterech powierzchni modelowych zawierają rysunki 5-10.

**Tabela 2**

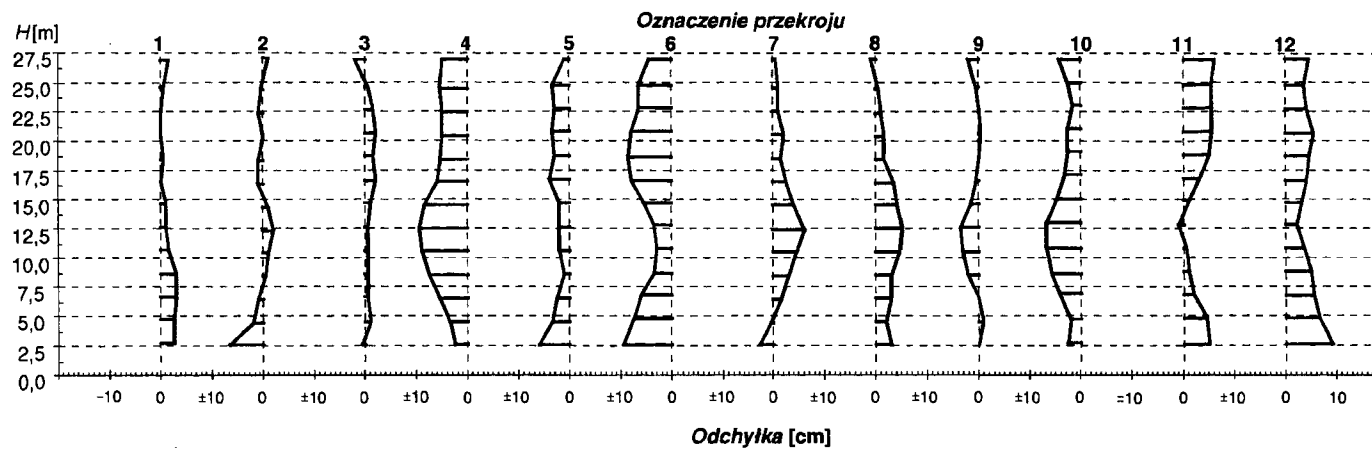
Parametry wyaprosymowanej powierzchni	WALEC ELIPSOIDALNY		HIPERBOLOIDA JEDNOPOWŁOKOWA	
	Swobodny	Obrotowy	Swobodna	Obrotowa
$x_0$ [m]	230,578	230,578	230,686	230,673
$y_0$ [m]	88,601	88,600	88,819	88,794
$z_0$ [m]	8,113	7,698	51,204	45,596
$a$ [m]	9,807	9,762	9,786	9,744
$b$ [m]	9,718	9,762	9,700	9,744
$c$	–	–	693,337	633,526
$\phi$ [g]	0,24	0,24	0,39	0,40
$Az_\phi$ [g]	122,23	122,83	65,60	64,94
$Az_a$ [g]	65,87	–	65,92	–
$v^T v$ [m]	0,8176	0,3341	0,0835	0,2258



**Rys. 4.** Wykres wektorów wychyleń środków przekrojów zbiornika w płaszczyźnie  $XY$  Skala wektorów 1 : 4



**Rys. 5.** Wykresy odchylek kształtu powłoki obserwowanej względem hiperboloidy jednopowłokowej swobodnej, w kierunku wektora normalnego do powierzchni modelowej



**Rys. 6.** Wykresy odchylek kształtu powłoki obserwowanej względem hiperboloidy jednopowłokowej obrotowej, w kierunku wektora normalnego do powierzchni modelowej





---

**Literatura**

- [1] Korn G.A., Korn T.M.: Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów, PWN, Warszawa, 1983
- [2] Preweda E.: System pomiaru, obliczeń i wizualizacji zmian geometrycznych obiektów powłokowych o powierzchni stopnia drugiego, Praca doktorska, AGH, Kraków, 1994.

Recenzent:

prof. dr hab. inż. Jan Gocał