

Elżbieta Jasińska, Edward Preweda

APROKSYMACJA POWIERZCHNI STOPNIA DRUGIEGO

APPROXIMATION OF THE QUADRATIC SURFACE PARAMETERS

Streszczenie

Na podstawie geodezyjnych, fotogrametrycznych czy radiowych obserwacji obiektów powłokowych określa się ich położenie, wymiary i kształt. Podstawą aproksymacji matematycznego modelu powierzchni, względem którego ocenia się stan geometryczny obiektu, są współrzędne przestrzenne punktów reprezentujących powłokę obiektu. W praktyce, wartości parametrów modelowych wyznacza się bez uwzględnienia dokładności tych współrzędnych. Macierz kowariancji dla współrzędnych punktów obserwowanych jest podstawą dla dokonania oceny dokładności wyznaczanych parametrów powierzchni i ich funkcji. W pracy przedstawiono algorytm umożliwiający ocenę dokładności estymowanych parametrów powierzchni. Określono miarę dopasowania modelu matematycznego do zaobserwowanego stanu geometrycznego powłoki, na podstawie którego można wnioskować o adekwatności modelu. Podano również metodę oszacowania estymatora wariancji jednostkowej odzwierciedlającego wpływ błędów tylko z tytułu pomiarów.

Słowa kluczowe: chłodnie kominowe, powierzchnie drugiego stopnia, modele statystyczne

Summary

On the base of geodetic, photogrammetric or radio observations of the sheet objects its position, dimensions and shape are determined. Approximation of mathematical model for the surface, used as a reference for estimation of geometric state of the object is based on the space co-ordinates of points representing the sheet of the object. In practice, the model parameter values are determined with-

out consideration of accuracy of these co-ordinates. However, the covariance matrix for co-ordinates of observed points constitutes a base to estimate accuracy of determined parameters and its functions. In this paper an algorithm enabling estimation of accuracy for the estimated parameters of the surface is presented. In addition, a measure of fitting of mathematical model to the observed geometric state of the sheet is determined. This parameter can be used to decide on adequacy of a model. A method of estimation of the unit variance estimator reflecting effect of measurement errors only is also described.

Key words: cooling towers, quadratic surface, statistical models

WSTĘP

Położenie, wymiary i kształt obiektów powłokowych określa się w oparciu o wyniki pomiarów geodezyjnych lub fotogrametrycznych. Obiekty te reprezentowane są przez zbiory punktów rozmieszczonych na ich zewnętrznej lub wewnętrznej powierzchni, obserwowanych z punktów odniesienia. Liczba i sposób rozmieszczenia punktów osnowy zależy od stosowanej techniki obserwacji powłoki, wymogów dokładnościowych i warunków terenowych.

Na podstawie współrzędnych przestrzennych punktów reprezentujących powłokę obiektu aproksymuje się powierzchnię stopnia drugiego.

Równanie ogólne tej powierzchni ma postać:

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + a_{33}z^2 + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (1)$$

W praktyce, wartości parametrów a_{ij} szacuje się bez uwzględnienia dokładności współrzędnych x , y , z . Tymczasem, macierz kowariancji $\mathbf{Cov}(x, y, z)$ dla współrzędnych punktów obserwowanych stanowi podstawę dla dokonania oceny dokładności wyznaczanych parametrów powierzchni i ich funkcji [Preweda 1995].

Równanie (1) można zapisać w postaci

$$G(x, y, z) = x^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{14}x + b_{22}y^2 + 2b_{23}yz + 2b_{24}y + b_{33}z^2 + 2b_{34}z + b_{44} = 0 \quad (2)$$

Gdzie:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{11}}; (b_{11} = 1);$$

W praktyce liczba punktów obserwowanych jest zawsze znacznie większa od liczby niewiadomych parametrów b_{11} , wobec czego zamiast układu równań typu (2) zestawia się odpowiednie równania aproksymacyjne:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = & x_i^2 + 2b_{12}x_iy_i + 2b_{13}x_iz_i + 2b_{14}x_i + b_{22}y_i^2 + \\ & 2b_{23}y_iz_i + 2b_{24}y_i + b_{33}z_i^2 + 2b_{34}z_i + b_{44} \end{aligned} \quad (3)$$

Dla zwiększenia dokładności obliczeń liniową względem niewiadomych funkcję (3) można rozwinąć w szereg [Głoub, Reinsch 1970].

Układ równań zapisany w notacji macierzowej przyjmuje wówczas postać:

$$\mathbf{Bx} = \mathbf{g} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

przy czym:

$$\mathbf{B}_{(n,u)} = \begin{bmatrix} 2x_1y_1 & 2x_1z_1 & \dots & \dots & 1 \\ 2x_2y_1 & 2x_2z_2 & \dots & \dots & 1 \\ 2x_3y_3 & 2x_3z_3 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2x_ny_n & 2x_nz_n & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{(u,1)} = \begin{bmatrix} db_{12} \\ db_{13} \\ db_{14} \\ \dots \\ \dots \\ db_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \dots \\ \dots \\ g_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \dots \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

(n - liczba obserwowanych punktów, u - liczba niewiadomych).

$\boldsymbol{\varepsilon}$ jest wektorem losowym o macierzy kowariancji $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})$, którą wyznaczymy z zależności

$$\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{N}^T \mathbf{Cov}(x,y,z) \mathbf{N} \quad (5)$$

Gdzie:

\mathbf{N} - jest macierzą utworzoną z pochodnych cząstkowych funkcji typu (2) względem współrzędnych x,y,z punktów obserwowanych (macierzą składowych wektorów normalnych do powierzchni),

$\mathbf{Cov}(x,y,z)$ - macierz kowariancji dla współrzędnych punktów reprezentujących powłokę.

Macierz \mathbf{N} określają zależności:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{N}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_{x_i} = 2(x_i + y_i\tilde{b}_{12} + z_i\tilde{b}_{13} + \tilde{b}_{14}) \\ N_{y_i} = 2(x_i\tilde{b}_{12} + y_i\tilde{b}_{22} + z_i\tilde{b}_{23} + \tilde{b}_{24}) \\ N_{z_i} = 2(x_i\tilde{b}_{13} + y_i\tilde{b}_{23} + z_i\tilde{b}_{33} + \tilde{b}_{34}) \end{bmatrix}$$

ESTYMACJA PUNKTOWA WEKTORA NIEWIADOMYCH

Nieobciążony estymator $\hat{\mathbf{x}}$ wektora niewiadomych oszacujemy rozwiązując uogólnione liniowe zadanie najmniejszych kwadratów:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{g} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \text{minimum} \quad (6)$$

Jeżeli współrzędne punktów odniesienia przyjmiemy za nieskorelowane, wówczas kowariancje dla wektora $\boldsymbol{\varepsilon}$ będą zerowe (nie uwzględniamy korelacji fizycznych), a macierz $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})$ - macierzą diagonalną (Lawson, Hanson 1965). Wobec tego, równanie (6) możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T [\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})]^{-1} \mathbf{v} = \left\| [\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})]^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{g} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}) \right\|^2 \rightarrow \text{minimum} \quad (7)$$

Jeżeli uwzględnimy korelacje pomiędzy współrzędnymi punktów odniesienia to macierz $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})$ będzie macierzą niediagonalną. Względy numeryczne przemawiają za tym, aby i w takim przypadku sprowadzić zadanie (6) do postaci typu (7). Można tego dokonać przez sprowadzenie macierzy $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})$ do postaci diagonalnej przy pomocy przekształceń ortogonalnych lub przez wcześniejsze sprowadzenie do postaci diagonalnej macierzy kowariancji $\mathbf{Cov}(X, Y, Z)$ punktów odniesienia.

PRZEKSZTAŁCENIA ORTOGONALNE MACIERZY

Dokonując rozkładu macierzy $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})$ względem wartości własnych uzyskamy

$$\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^T \quad (8)$$

Gdzie:

\mathbf{U} - macierz ortogonalna,

$\mathbf{S} = \text{diag}(\lambda_i)$.

Możemy zatem zapisać:

$$[\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})]^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{U} \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}^T \quad (9)$$

przy czym zachodzą związki

$$\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} = \text{diag}\left(\lambda_i^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (10)$$

$$\mathbf{Cov}(\varepsilon) = [\mathbf{Cov}(\varepsilon)]^{\frac{1}{2}} [\mathbf{Cov}(\varepsilon)]^{\frac{1}{2}}$$

Po przekształceniach

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{U}^T \mathbf{g}, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{U}^T \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{U}^T \mathbf{v} \quad (11)$$

otrzymujemy

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T [\mathbf{Cov}(\varepsilon)]^{-1} \mathbf{v} = \left\| \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} (\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{x}}) \right\|^2 \rightarrow \text{minimum} \quad (12)$$

Uwzględniając warunek $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ oraz przyjmując oznaczenia:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= [\mathbf{Cov}(\varepsilon)]^{-1} \frac{1}{\text{tr}\{[\mathbf{Cov}(\varepsilon)]^{-1}\}} \\ \mathbf{A} &= [\mathbf{Cov}(\varepsilon)]^{-\frac{1}{2}} \mathbf{B} \\ \mathbf{w} &= [\mathbf{Cov}(\varepsilon)]^{-\frac{1}{2}} \mathbf{g} \end{aligned} \right\} \text{ - jeżeli } \mathbf{Cov}(\varepsilon) \text{ jest macierzą diagonalną,}$$

natomiast

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{S}^{-1} \frac{1}{\text{tr}\{\mathbf{S}^{-1}\}} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{g}} \end{aligned} \right\} \text{ - jeżeli } \mathbf{Cov}(\varepsilon) \text{ nie jest macierzą diagonalną,}$$

otrzymujemy jednolitą postać zrównoważonego układu równań aproksymacyjnych:

$$\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{w} \quad (13)$$

rozwiązywanego przy warunku

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \left\| \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{w} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}) \right\|^2 \rightarrow \text{minimum} \quad (14)$$

SPROWADZENIE MACIERZY KOWARIANCJI DO POSTACI DIAGONALNEJ

Analizując przedstawiony algorytm może wydawać się, że jego praktyczne zastosowanie będzie kosztowne w przypadku dużej liczby punktów reprezentujących powłokę. Problem obliczeń numerycznych można uprościć przekształcając macierz kowariancji $\mathbf{Cov}(X, Y, Z)$ dla współrzędnych punktów osnowy w macierz kowariancji minimalnych $\mathbf{Cov}_{min}(X, Y, Z)$. Sposób postępowania może być tu analogiczny do przedstawionego powyżej. Wyznaczając wartości własne macierzy $\mathbf{Cov}(X, Y, Z)$, otrzymamy

$$\mathbf{Cov}_{min}(X, Y, Z) = \text{diag}(\lambda_i), i = 1 \dots 3 \times n \quad (15)$$

gdzie n - liczba punktów osnowy odniesienia.

Dzięki takiemu przekształceniu macierz $\mathbf{Cov}(\varepsilon)$ będzie zawsze macierzą diagonalną.

Wybór drogi prowadzącej do uzyskania diagonalnej macierzy $\mathbf{Cov}(\varepsilon)$ uzależnić należy od konkretnego zadania mając to na uwadze, że w drugim przypadku opieramy się na ekstremalnych wariancjach a zatem uniezależniamy się od przyjętej orientacji osnowy odniesienia.

ESTYMACJA PRZEDZIAŁOWA

Wektor estymowanych parametrów powierzchni oszacujemy za pomocą pseudoodwrotności macierzy.

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \mathbf{w} \quad (16)$$

Rozwiązanie to spełnia warunek (14) metody najmniejszych kwadratów. Zastosowanie do rozwiązania układu równań pseudoodwrotności Moore'a-Penrose'a jest uzasadnione możliwością wystąpienia defektu macierzy współczynników przy niekorzystnym rozmieszczeniu punktów na obserwowanej powłoce [Preweda 1995].

Empiryczną wartość estymatora wariancji $\hat{\sigma}_o^2$, stanowiącą punktową ocenę wartości rozwiązania (14), określa się według wzoru

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\left\| \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{w} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) \right\|^2}{n - u} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - u} \quad (17)$$

Przedział ufności dla wariancji opiera się na statystyce chi-kwadrat [Papoulis 1970]. Korzystając z estymatora wariancji, dla $(n-u)$ stopni swobody i ustalonego poziomu ufności $(1-\alpha)$ zachodzi związek

$$P\left\{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, n-u\right) < \frac{(n-u)\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} < \chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-u\right)\right\} = 1-\alpha$$

Rozwiązując powyższą nierówność względem σ_o^2 otrzymuje się

$$\frac{(n-u)\hat{\sigma}_o^2}{\chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-u\right)} < \sigma_o^2 < \frac{(n-u)\hat{\sigma}_o^2}{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, n-u\right)} \quad (18)$$

przy czym $\chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-u\right)$ i $\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, n-u\right)$ oznaczają kwantyle rzędu od-

powiednio $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ i $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ rozkładu χ^2 o $(n-u)$ stopniach swobody [Korn

G.A, Korn T.M, 1983].

Granice przedziału ufności dla odchylenia standardowego σ_o są pierwiastkami kwadratowymi lewej i prawej strony nierówności (18).

WNIOSKI

Należy zauważyć, że estymator odchylenia standardowego $\hat{\sigma}_o$ wyznaczony zależnością (17) jest jedynie miarą dopasowania modelu matematycznego do zaobserwowanego stanu geometrycznego powłoki i na jego podstawie możemy wnioskować tylko o adekwatności modelu. Parametr ten nie może wchodzić do oceny dokładności oszacowanych parametrów i ich funkcji, gdyż oprócz błędów pomiarowych uwzględnia też błędy montażu powłoki oraz jej deformacje. Ścisłe rozdzielanie tych błędów nie jest naturalnie możliwe. Dla dokonania oceny dokładności należy oszacować a priori wpływ błędów z tytułu pomiarów $\hat{\sigma}_{pom}^2$, i taką miarę przyjmując za estymator wariancji jednostkowej.

Wartość parametru $\hat{\sigma}_{pom}^2$ można oszacować na różne sposoby. Na przykład, można założyć, że odchyłka v_i z tytułu błędów pomiarowych jest równa błędowi określenia i-tego równania aproksymacyjnego.

Zgodnie z tym zapiszmy

$$|v_i^{apr}| = \mathbf{Cov}(\varepsilon_i)^{\frac{1}{2}} - \text{dla diagonalnej macierzy kowariancji } \mathbf{Cov}(\varepsilon)$$

oraz

$$|v_i^{apr}| = (\lambda_i)^{\frac{1}{2}} - \text{dla niediagonalnej macierzy kowariancji } \mathbf{Cov}(\varepsilon)$$

Stąd

$$(v^T P v)^{apr} = \text{tr} \left\{ \frac{1}{\text{tr}\{\mathbf{Cov}(\varepsilon)^{-1}\}} \mathbf{E} \right\} = \frac{n}{\text{tr}\{\mathbf{Cov}(\varepsilon)^{-1}\}}$$

Dla diagonalnej macierzy $\mathbf{Cov}(\varepsilon)$ otrzymujemy

$$\hat{\sigma}_{pom}^2 = \frac{n}{n-u} \times \frac{1}{\text{tr}\{\mathbf{Cov}(\varepsilon)^{-1}\}} \quad (19)$$

i analogicznie w przypadku niediagonalnej macierzy $\mathbf{Cov}(\varepsilon)$

$$\hat{\sigma}_{pom}^2 = \frac{n}{n-u} \times \frac{1}{\text{tr}\{\mathbf{S}^{-1}\}} \quad (20)$$

Tak wyznaczony parametr $\hat{\sigma}_{pom}^2$ może służyć nie tylko do oszacowania dokładności estymowanych parametrów i ich funkcji, ale również do sprawdzenia istotności parametru $\hat{\sigma}^2$.

Macierz kowariancji dla wektora niewiadomych $\bar{\mathbf{X}}$ wyraża się wzorem

$$\mathbf{Cov}(\hat{x}) = \hat{\sigma}_{pom}^2 \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^+)^T \quad (21)$$

Przedział ufności dla niewiadomych parametrów powierzchni wynika ze statystyki t-studenta. Korzystając z symetrycznych przedziałów dwustronnych można zapisać

$$\hat{x} = \pm t \left(1 - \frac{\alpha}{2}, n-u \right) \hat{\sigma}_x \quad (22)$$

$t \left(1 - \frac{\alpha}{2}, n-u \right)$ oznacza kwantyl rzędu $\left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$ rozkładu Studenta o $(n-u)$ stopniach swobody, zaś $\hat{\sigma}_x$ jest estymatorem odchylenia standardowego poszczegól-

gólnych niewiadomych. Elementy tego wektora obliczymy korzystając z macierzy (21)

$$\hat{\sigma}_{x_i} = \sqrt{[\text{Cov}(\hat{x})]_{i,i}} \quad (23)$$

BIBLIOGRAFIA

- Gloub G.H., Reinsch C.: *Singular Value Decomposition and Least Squares Solution*. Num, Math, 14, 1970: 403-420
- Korn G.A., Korn T.M. : *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*. PWN, Warszawa, 1983
- Lawson Ch. L. , Hanson R.J.: *Solving Least Squares Problems*. Prentice-Hall, Englewood, New Jersey, 1965
- Papoulis A. : *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*. WNT, Warszawa, 1970
- Preweda E. : *System pomiaru, obliczeń i wizualizacji zmian geometrycznych obiektów powłokowych o powierzchni drugiego stopnia*. Rozprawa doktorska, AGH, Kraków, 1994
- Jasińska E., Łacina W., Preweda E., Żygiel P. : *A modified algorithm of determining the shape of shell objects using the method of conical intersection*. Electronic Journal of Polish Agricultural Universities, Geodesy and Cartography, vol. 6, 2, 2003: 1-13
- Jasińska E., Preweda E.: *A few commentson determining the shapes of hyperboloid cooling towers by the means of ambient tangents method*. Geodezja, T. 10, z. 1, AGH, Kraków, 2004: 19-29
- Kawka T.: *System transmisji radiowej w monitoringu pracy chaodni kominowej*. Magazyn „Pod kontrolą”, 1, 2012, www.podkontrola.pl/biezacy/dobra_praktyka_s1.html.

Dr inż. Elżbieta Jasińska
Dr hab. inż. Edward Preweda, prof. AGH
Katedra Geomatyki
Akademia Górniczo – Hutnicza im. St. Staszica
al. A. Mickiewicza 30
30-059 Kraków
e-mail: jasinska@agh.edu.pl
preweda@agh.edu.pl

Artykuł powstał w ramach badań statutowych Katedry Geomatyki w roku 2012