

Małgorzata Makiewicz
Uniwersytet Szczeciński

O KULTURZE MATEMATYCZNEJ UCZNIĄ. EKSTERIORYZACJA WIEDZY MATEMATYCZNEJ ZA POMOCĄ FOTOGRAFII

A. L. Hammond zatytułował jeden ze swoich esejów prowokacyjnie: "Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura". Matematykę częściej zalicza się bowiem do nauk ścisłych, mało kto potrafi w niej odnaleźć wartości humanistyczne i składniki kultury człowieka. We wspomnianej pracy matematyka przedstawiona została jako materia żywa i rozwijająca się, pełna kontrowersji i pytań. Jakie są kryteria dobrej matematyki? Czy matematykę się tworzy – czy odkrywa? Czy jej dzieła zaliczamy do zdobyczy nauki czy sztuki¹? Na bazie tych pytań rysuje się nowa jakość i postulowany rezultat kształcenia szkolnego – kultura matematyczna.

Jak pisze Roman Duda, *matematyka odgrywała w kulturze greckiej, wśród elity intelektualnej, wielką rolę. Struktura nadana wówczas matematyce narzuciła innym dyscyplinom sposób ich uprawiania. Śledząc rozwój myśli matematycznej oglądamy rozwój techniki, cywilizacji*². Z pewnością jeśli mówimy o kimś człowieku o wysokiej kulturze matematycznej nie mamy na myśli jego biegłości w rachunkach. Oczaruje nas raczej umiejętność łączenia faktów, interpretowania ich przez pryzmat wiedzy, wnioskowanie, piękny język, zrozumienie na wyższym poziomie. O kulturze matematycznej zaświadcza bowiem nie encyklopedyczna wiedza z tej dziedziny i sprawność intelektualna w zakresie jej przetwarzania, lecz takie umiejętności jak: *rozumienie tekstu matematycznego, jasne wypowiadanie swoich myśli i poprawne ich zapisywanie*³. Proces jej kształtowania kultury matematycznej związany jest z codziennym obcowaniem człowieka w świecie matematycznym, *analiza reklamy lokaty bankowej czy szacowanie ilości cegieł do budowy garażu lub określanie ryzyka*

¹ A. L. Hammond, *Matematyka - nasza niedostrzegalna kultura*, [w:] L. A. Steen (red.), *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, WNT Warszawa 1983.

² R. Duda, *Dyskusja „Co to jest kultura matematyczna?”*, [w:] *Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie*. Nr 5/1990, s. 27.

³ S. Kopański, *W poszukiwaniu matematycznych talentów*, Wydawnictwo Dla Szkoły, Wilkowice 2003, s. 105 – 106.

inwestycji to sytuacje, w których kultura matematyczna rozdaje karty. Wygrywa nie ten, kto potrafi wyrecytować twierdzenie Talesa lub podać definicję stopy procentowej, ale ten, kto potrafi w użyteczny sposób zastosować i zinterpretować posiadaną wiedzę⁴. Istotnie, kultura matematyczna, budowana przez wieki na fundamentach kultury antycznej, to nie tylko pewna technika, sprawność, posługiwanie się formalnym językiem, dowodzenie czy rozwiązywanie problemów. W skład kultury matematycznej wchodzi również twórczość i wyobraźnia geometryczna, dobre rozumienie pojęć oraz postrzeganie piękna tej dyscypliny. Kultura matematyczna polega także na tym, że zauważa się pewne idee matematyczne, problemy, a nawet twierdzenia w otaczającym nas świecie, w przyrodzie martwej, ożywionej, w dziełach rąk ludzkich⁵.

Kulturę można rozumieć jako zjawisko niecodzienne, wyjątkowe, odświeżające ale w odniesieniu do matematyki i jej roli w kształtowaniu świadomego społeczeństwa proponuję zgodzić się z podejściem egalitarnym reprezentowanym m.in. przez Dorotę Klus-Stańską dostrzegającą kulturę w codziennych nawykowych zachowaniach, zwyczajności, odruchowym nadawaniu znaczeń otaczającej nas rzeczywistości. Otwiera nas na rozumienie tego, co nas otacza, ale też limituje horyzont dostępnych nam znaczeń i interpretacji. Życiodajna dla poznania i rozumienia świata, jest równocześnie współtworzona w tych procesach⁶. Kultura matematyczna, zdaniem Michała Szurka, mieszka w domu Uranii, w ogrodzie dziewięciu muz – córek Zeusa i bogini pamięci Mnemozyny⁷. Jej określenie jest jednak łatwiejsze, niż stosowanie: z kulturą w nauczaniu matematyki jest tak, jak z kulturą w życiu codziennym. Trudno teoretyzować, łatwo dać przykłady zachowań kulturalnych i niekulturalnych. (...) Umiejętności - to za mało. Trzeba je umieć stosować w sposób... kulturalny⁸. Kultura matematyczna może być rozpatrywana także jako kultura określonej grupy zawodowej - matematyków, ale z rugiej strony nie trzeba przecież być matematykiem, aby zyskać miano bogatego w kulturę matematyczną. Adam Grobler wskazuje wielość wyodrębnionych kultur na podstawie woluntarystycznego dążenia grup społecznych do własnej autonomii i tożsamości oraz przyjętego kryterium podziału. Uzyskane w ten sposób kategorie nie mają charakteru rozłącznego – np. nasza kultura zachodnia, wielkomijska, młodzieżowa. Zauważa przy tym, że swoje kodeksy kulturowe mają filateliści, brydżyści, fani muzyki metalowej i kinomani, kibice piłkarscy i maklerzy giełdowi. Własną kulturę wytwarzają grupy zawodowe i środowiska rodzinne⁹.

⁴ M. Makiewicz, *Elementy kultury matematycznej w fotografii*, KMDM US, Szczecin 2011, S.19.

⁵ M. Makiewicz, *Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczycieli*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego Szczecin 2010, s. 9.

⁶ D. Klus-Stańska, *Dzień jak co dzień. O barierach zmiany kultury szkoły*, W: M. Dudzikowa, M. Czerepaniak – Walczak, *Wychowanie. Pojęcia. Procesy. Konteksty*. Tom 5, s. 302.

⁷ M. Szurek, *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów t. 1*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe Gdańsk, 2005s. 28.

⁸ M. Szurek (2010), Wstęp do: M. Makiewicz, *Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczycieli*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego Szczecin, s. 7.

⁹ A. Grobler, *Nie o to chodzi, by złowić króliczka*, *Przegląd Filozoficzny*3/2001, s. 293.

O utrudnionym oglądzie przejawów swojej własnej kultury oraz jej wpływu na zachowanie, odczuwanie i myślenie¹⁰ pisze m.in. Dorota Klus-Stańska. Kulturę matematyczną człowieka można zatem rozpatrywać w kategorii samoświadomości. Najbardziej zewnętrzna (i widoczna) warstwa kultury matematycznej człowieka ujawnia się w podjęciu aktywności pod wpływem zaciekawienia, postawienia pytania lub na drodze konfliktu poznawczego. Jej wyrazem jest pragnienie zmierzenia się z problemem, gotowość na poszukiwanie rozwiązania. Kolejna warstwa związana jest ze zrozumieniem sytuacji. Niezbędne jest tu świadome i rozumne posługiwanie się językiem matematyki. Głębsze warstwy ściśle związane są z umiejętnościami i wyobraźnią oraz wykorzystaniem posiadanej wiedzy teoretycznej w sytuacji nowej. Jeszcze głębsze - z interpretacją, refleksją, odważnym przypuszczeniem, generowaniem wielu różnych odpowiedzi, modyfikowaniem, umiennianiem, metaforyzowaniem, jednym słowem zbliżaniem się do fenomenu twórczości¹¹. Zauważmy także, że kultura matematyczna toruje drogę do twórczości mini-t, a ta, zdaniem Jamsa Kauffmana i RONALDA BEGHETTO, prowadzi i wspiera osiągnięcie twórczości na wyższych poziomach: codziennej i wybitnej¹². Dzięki kulturze matematycznej może zrodzić się poznawcze dzieło twórcze na poziomie płynnym (obejmującym elementarne procesy poznawcze, emocjonalne i motywacyjne) lub skryzalizowanym (dokonującym się poprzez dążenie do celu, rozwiązanie problemu przy zrozumieniu jego struktury, znaczenia, kontekstu), ale także dzieło dojrzałe, a nawet wybitne¹³. Kultura matematyczna, tworząc się i rozwijając w pewnym środowisku, funkcjonuje w kategorii klimatu dla twórczości wg. koncepcji Gorana Ekvalla. Obejmuje takie elementy jak: wyzwanie i możliwość wywierania wpływu, wolność, otwartość, czas na realizację pomysłów, humor, konflikt, wsparcie pomysłów, debata, podejmowanie ryzyka i dynamizm¹⁴.

Problem jej pełnego określenia kultury podkreśla Witold Więśław zarówno pojęcie kultury, jak – w szczególności – kultury matematycznej - to pojęcia bardzo względne, a na pewno trudne do zdefiniowania¹⁵. Zadania tego, w odniesieniu do szerszej grupy osób, podjął się Frantisek Kurina. Podniósł on pozarachunkowe aspekty matematyki oraz określił elementy składowe rozważanego pojęcia, do których zaliczył:

1. Zdobycie sprawności matematycznej.
2. Zrozumienie ciągłego przejścia w poszczególnych dyscyplinach matematyki między matematyką-nauką i matematyką-przedmiotem nauczania.
3. Zrozumienie języka matematyki.
4. Umiejętność wybierania odpowiednich metod przy rozwiązywaniu zadań.

¹⁰ D. Klus-Stańska, *Dzień jak co dzień. O barierach zmiany kultury szkoły*, W: M. Dudzikowa, M. Czerepaniak – Walczak, *Wychowanie. Pojęcia. Procesy. Konteksty*. Tom 5, s. 303.

¹¹ M. Makiewicz, *Elementy kultury matematycznej w fotografii*, SKN MDM US, Szczecin 2011, s. 13.

¹² W. Limont, *Uczeń zdolny. Jak go rozpoznać i jak z nim pracować*. GWP, Sopot 2010, s. 177.

¹³ E. Nęcka, *Psychologia twórczości*. Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk 2001, s. 216 – 217.

¹⁴ Za: M. Karwowski, *Klimat dla kreatywności. Koncepcje, metody, działania*, Centrum Doradztwa i Informatyki Difin sp. z o.o., Warszawa 2009, s. 59.

¹⁵ W. Więśław, *Kultura matematyczna a kultura matematyków*, [w:] *Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie*. Nr 21/1998, s. 27.

5. Posiadanie dobrej wyobraźni geometrycznej.
6. Opanowanie techniki obliczeń.
7. Opanowanie umiejętności przeprowadzania dowodów.
8. Opanowanie umiejętności wprowadzania pojęć.
9. Możliwości uprawiania w pewnym stopniu twórczości matematycznej.
10. Postrzeganie piękna matematyki¹⁶”.

Zauważmy, jednak, że przytoczony dekalog nie do końca opisuje matematyczną kulturę ucznia. Świadczy o tym np. umiejętność postrzegania piękna matematyki (p.10), którą na poziomie szkolnym możemy rozumieć dosłownie i trywialnie. Do oczarowania niewidzialnym pięknem matematyki oddanym klarownością myśli, oryginalnością prowadzonego rozumowania potrzeba pewnej dojrzałości i dystansu wobec podręcznikowej wiedzy szkolnej. Ograniczenie w programie nauczania matematyki treści związanych z wielomianami oraz zmniejszenie znaczenia technik obliczeniowych w zestawieniu z powszechnością dostępu do urządzeń wykonujących algorytmy implikuje odrzucenie warunku dotyczącego opanowania techniki obliczeń (p.6). Poza tym, w kontekście tendencji redukowania programów nauczania trudno mówić o dziecięcej umiejętności dowodzenia (p. 7) czy o rozróżnieniu matematyki - przedmiotu nauczania i matematyki - dyscypliny naukowej (p.2). Podobnie umiejętność wprowadzania pojęć (p. 8) dedykowana jest przede wszystkim nauczycielom. Dlatego w rozważaniach na temat kultury matematycznej ucznia posługuję się modelem własnym¹⁷, uwzględniającym warunki konieczne (dobry język i sprawność matematyczną) oraz warunki sprzyjające (doświadczenie twórczości matematycznej, posiadanie dobrej wyobraźni geometrycznej oraz umiejętność wyboru najlepszej drogi rozwiązania problemu zwanej elegancją matematyczną) (tab. 1).

Tabela 1. Warunki konieczne i sprzyjające kultury matematycznej ucznia

Warunki konieczne kultury matematycznej ucznia	Warunki sprzyjające kulturze matematycznej ucznia
J - język matematyczny S - sprawność matematyczna	W - wyobraźnia przestrzenna T - twórczość matematyczna E - elegancja matematyczna

Źródło: Opracowanie własne, na podstawie: M. Makiewicz, *O fotografii w nauczaniu matematyki. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów*, SKNMDM US, Szczecin 2013.

Obszar J (język) dotyczy dwóch kierunków posługiwania się językiem matematyki: zrozumienia i interpretacji tekstu matematycznego oraz przekazywania myśli własnych za

¹⁶ F. Kurina (1991), *Kultura matematyczna nauczyciela matematyki*, [w:] Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie. Nr 6/1991, s. 30.

¹⁷ Model opisany jest szczegółowo w: M. Makiewicz, *O fotografii w nauczaniu matematyki. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów*, SKNMDM US, Szczecin 2013, s. 41-59.

pomocą matematycznych pojęć, wzorów i formuł. Język matematyczny związany jest bezpośrednio z tekstem matematycznym, który charakteryzuje się: *abstrakcyjną dziedziną przedmiotową, autonomicznym językiem, który nawet na poziomie matematyki elementarnej posiada wiele cech osobliwych, przewagą połączeń typu implikacyjnego nad połączeniami międzyzdaniowymi koniunkcyjnymi, szczególną rolę kwantyfikatorów, stosowaniem metod właściwych ze względu na charakter badanych przedmiotów oraz specyficzną formą redakcyjną*¹⁸.

Obszar S (sprawność) to wiedza i umiejętności matematyczne niezbędne podczas rozwiązywania zadań. Kategoria sprawności matematycznej ucznia w polskojęzycznej literaturze fachowej potraktowana jest skromnie i obejmuje głównie konstruowanie narzędzi diagnostycznych. W literaturze anglojęzycznej termin ten występuje znacznie częściej i rozumiany jest jako zręczność matematyczna (*skill*¹⁹), sprawność (*proficiency*²⁰) lub efektywność (*efficiency*²¹). Pojęcie sprawności matematycznej rozumiemy szerzej niż biegłość w wykonywaniu obliczeń na liczbach naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych oraz opanowaniu reguł rachunku algebraicznego. Sprawność obejmuje również syntezę i analizę, w pewnym stopniu abstrahowanie, umiejętność dokonywania wyboru, podejmowania decyzji. Jej miarą jest rozwiązywanie zadań zamkniętych w ograniczonym czasie, nastawienie na trafność szybko podejmowanych decyzji. Dydaktycy matematyki zgodni są tego, że *pewne minimum wiadomości, umiejętności i sprawności jest niezbędne na każdym etapie nauczania szkolnego. Bez nich nie można dalej się uczyć matematyki. Kształcenie sprawności rachunkowych nie może być celem samym w sobie; ma to być środek do opanowania umiejętności i sprawności znacznie ważniejszych. [...] Nauczanie nastawione tylko na wyuczenie sprawności prowadzi często do negatywnych reakcji emocjonalnych uczniów, stresów i frustracji*²². Dlatego sprawność, za Susan Jo Russell określam jako zespół trzech komponentów: *dokładności, giętkości i efektywności, które mają zapewnić szybkie*

¹⁸ J. Konior, *Budowa i lektura tekstu matematycznego. Podstawy nauki czytania tekstów matematycznych w szkole*, [w:] J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*. Cz. 4, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1998.

¹⁹ A.V. Borovik, T. Gardiner, *Mathematical Abilities and Mathematical Skills*, World Federation of National Mathematics Competitions Conference, Cambridge 2006; A. Z. Khairani, M. S. Nordin, *The development and construct validation of the mathematics proficiency test for 14-year-old students*, Asia Pacific Journal of Educators and Education, Vol. 26, No. 1, 2011, s. 33–50.

²⁰ A. H. Schoenfeld, *What is Mathematical Proficiency and How Can It Be Assessed?* [w:] A. H. Schoenfeld (red.) *Assessing Mathematical Proficiency* MSRI Publications Volume 53, Cambridge University Press, New York 2007, s. 59 - 74, R. J. Milgram, *What is Mathematical Proficiency?* [w:] A. H. Schoenfeld (red.) *Assessing Mathematical Proficiency* MSRI Publications Volume 53, Cambridge University Press, New York 2007, s. 31-58.

²¹ M. Prenzel, M. Stadler, A. Friedrich, K. Knickmeier, C. Ostermeier, *Increasing the efficiency of mathematics and science instruction (SINUS) - a large scale teacher professional development programme in Germany*, przekł. G. Newcombe, Leibniz - Insitute for Science Education, Kiel 2009; *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do Student Performance in Reading, Mathematics and Science* (Volume I), OECD 2010.

²² T. Rams, *Nieporozumienia związane z nauczaniem matematyki w szkole podstawowej*, Gradient 3(36)/1997, s. 161.

*i poprawne liczenie, udzielanie odpowiedzi na pytania i rozwiązywanie zadań*²³. Tak rozumiana - określa bowiem *poziom obycia matematycznego, rozumienia pojęć, ich własności i pewnych związków zachodzących pomiędzy nimi*.

Obszar **W** (wyobraźnia) związany jest ze zdolnością do wytwarzania wyobrażeń obrazowych²⁴, werbalnych i logicznych²⁵ związanych z obiektami matematycznymi oraz z możliwością manipulowania tymi wyobrażeniami. Pojęcie wyobraźni geometrycznej rozumiane jest jako modelowanie geometryczne lub tworzenie wyobrażeń tych obiektów bez konieczności odwoływania się do przestrzeni fizycznej²⁶. Pod pojęciem wyobraźni rozumieć będziemy dynamiczną *zdolność czynnego wytwarzania wyobrażeń będących odbiciem form przestrzennych, płaskich i liniowych oraz zdolność przekształcania tych obrazów poprzez operacje myślowe*²⁷.

Obszar **T** (twórczość) obejmuje zachowania twórcze ujawniane w obszarze matematyki rozumiane w kategoriach J.P. Guilforda²⁸ i K. K. Urbana²⁹ które dokonują się na poziomie płynnym lub skryształizowanym³⁰, z uwzględnieniem twórczości mini-t³¹ oraz podkreślanej przez Saundersa Mac Lane konstruowalności alternatywnych modeli matematycznych³².

Obszar **E** (elegancja) związany jest z umiejętnością dokonania wyboru optymalnej drogi podczas prowadzonego rozumowania matematycznego³³. Poszukiwanie tej drogi dobrze ilustruje praca programisty starającego się ograniczyć złożoność obliczeniową algorytmu. Pojęcie elegancji w rozwiązywaniu zadań matematycznych sporadycznie opisywana jest w publikacjach krajowych³⁴ i zagranicznych³⁵. Rozwiązanie eleganckie, podobnie jak w psychologii postaci, charakteryzuje się prostotą rozumowania ujmującą rozumowanie w jednolitą strukturę, nie zaś sumę poszczególnych jego części. Eleganckie rozwiązanie

²³ S. J. Russell, *Developing computational fluency with whole numbers in the elementary grades*, The New England Math Journal, 32(2)/ 2000, s. 40-54.

²⁴ T. Maruszewski, *Psychologia poznawcza. Sposoby rozumienia siebie i świata*, GWP, Gdańsk 2002, s. 252.

²⁵ A. Paivio, *The relationship between verbal and perceptual codes*, [w:] M.P. Friedman (red.), *Handbook of perception*. Tom 8 Perceptual coding, Academic Pres, New York 1978, s. 380.

²⁶ J. Tocki, *Dedukcja lokalna w nauczaniu geometrii w szkole średniej*, WN WSP, Rzeszów 1992.

²⁷ A. Pardała, *Wyobraźnia przestrzenna uczniów w warunkach nauczania szkolnej matematyki. Teoria, problemy, propozycje*, Wydawnictwo Oświatowe FOSZE, Rzeszów 1995, s. 66.

²⁸ J. P. Guilford, *Natura inteligencji człowieka*, przekł. B. Czarniawska, W. Kozłowski, J. Radzicki, PWN, Warszawa 1978.

²⁹ K. K. Urban, *Recent trends in creativity research and theory in Western Europe*, European Journal of High Ability, 1/1990, s. 99-113.

³⁰ E. Nęcka, *Psychologia twórczości*, GWP, Gdańsk 2001, s. 218.

³¹ J.C. Kaufman, R. A. Beghetto, *Beyond big and little: The four C model of creativity*, Review of General Psychology, 13,1, 2009, s. 1-12.

³² S. Mac Lane, *Mathematical models: A Sketch for the Philosophy of Mathematics*, American Mathematical Monthly, VII/VIII 1981, s.167.

³³ M. Aigner, *Die pure Eleganz der Mathematik*, Gegenworte. Hefte für den Disput über Wissen. Grenzen der Wissenschaft 12/2003, s. 11-15.

³⁴ M. Grabowski, *Podziw i zdumienie w matematyce i fizyce*, Prószyński i S-ka, Warszawa 2009.

³⁵ R. Schröder, *Mathe mit Pfiiff. Elegante Aufgaben zum Stoff der Mittelstufe*, Lehrer Selbst Verlag, Bonn 2009.

ujmuje swą estetyką poznawczą, przypomina dobrą figurę (w sensie Gestalt), która łączy prostotę, symetrię i regularność. Wypiera rozwiązanie *byle jakie*, podobnie jak *dobre figury* są zapamiętywane i kojarzone znacznie lepiej niż *figury złe*³⁶.

Pozostając w zgodzie z Zofią Krygowską pragnę podkreślić czynnościowy i egalitarny charakter kultury matematycznej: *kulturę muzyczną można zdobyć przez czynne słuchanie muzyki stworzonej dla innych; można odczuć piękno i sens muzyki, bez skomponowania choćby jednego akordu. Nie można natomiast zrozumieć piękna i sensu matematyki bez matematycznej twórczości. Na szczęście jest ona w odpowiedniej skali dostępna już dziecku zaczynającemu swą szkolną edukację, jeżeli tylko do tej twórczości umiemy je pobudzić*³⁷.

Jednym z działań dydaktycznych mających na celu przewyższanie badanych i opisywanych m.in. przez Edytę Gruszczyk - Kolczyńską trudności w pokonaniu bariery pomiędzy myśleniem dziecięcym a dojrzałym³⁸ jest koncepcja fotoedukacji, której skuteczność w zakresie wpływu na poszczególne składniki kultury matematycznej weryfikowana jest eksperymentalnie w Pracowni Dydaktyki Matematyki Instytutu Matematyki WMF Uniwersytetu Szczecińskiego. Podstawą fotoedukacji jest poznawcza koncepcja człowieka³⁹ oraz paradygmat konstruktywistyczny⁴⁰ oddający w zakresie tworzenia wiedzy matematycznej podmiotową rolę dziecka. Pojęcia matematyczne mają zdaniem Jeana Piageta charakter operatywny, są *wynikiem abstrakcji odczynnościowej*, możemy zatem *traktować jako schematy wykonywania określonych operacji według ustalonego we własnym zakresie przepisu*⁴¹. Fotografia znakomicie oddaje tę drogę ku samodzielności myślenia: wspomaga dwukierunkowy transfer pomiędzy światem idei a światem konkretnym. Zarówno wspiera proces interioryzacji prowadząc dziecko od tego, co zobaczone, do tego, co pomyślane, jak również od tego, co pomyślane - do tego, co zobaczone (eksterioryzacja). Pomaga utrwalac powstałe wyobrażenia natury wizualnej (imageny) oraz werbalnej (logogeny) związane z niezwykle istotnym w dydaktyce matematyki: nazywaniem, klasyfikowaniem, rozpatrywaniem sensu, ocenianiem, stawianiem pytań.

Teoria fotografii, w ujęciu socjologicznym, wskazuje na dwie podstawowe aktywności: *dekodowanie czyli interpretację zastanych materiałów fotograficznych za pomocą kategorii, modeli i teorii socjologicznych, która polega na swoistym nakładaniu na fotografię ramy i siatki pojęciowej socjologii i zadaniu pytania o przedstawione implikacje natury socjologicznej oraz podejście aktywne, ambitne polegające na samodzielnym wykonywaniu fotografii epizodów w sytuacjach społecznych z badawczą intencją ujawnienia zawartych*

³⁶ W.R. Garner, *The processing of information and structure*, Lawrence Erlbaum Associates, Maryland, Potomac, 1974.

³⁷ Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki, cz.2*, WSiP, Warszawa 1977, s. 13-14.

³⁸ E. Gruszczyk - Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, WSiP, Warszawa 1994.

³⁹ J. Koziński, *Koncepcje psychologiczne człowieka*, PIW, Warszawa 1976.

⁴⁰ D. Klus-Stańska, *Polska rzeczywistość dydaktyczna - paradygmatyczny taniec św. Wita*, [w:] L. Huryło, D. Klus-Stańska, M. Łojko (red.), *Paradygmaty współczesnej dydaktyki*, Impuls, Kraków 2009, s.

⁴¹ J. Piaget, *Studia z psychologii dziecka*, przekł. T. Kolakowska, PZWS, Warszawa 1966.

w niej znaczeń socjologicznych⁴². Dydaktyka matematyki, w zakresie fotoedukacji także uwzględni obydwie podejścia: zarówno czytanie gotowych materiałów wizualnych (interioryzacja) jak i tworzenie nowych (eksterioryzacja)⁴³. Interioryzacja, oddaje pierwszeństwo działaniom konkretnym (manipulacji) na przedmiotach materialnych lub ich reprezentacjach obrazowych i symbolicznych nad działaniami w płaszczyźnie wyobraźniowej, a następnie w słowno – pojęciowej. Dziecko posiada jednocześnie zdolność uzewnętrzniania (eksterioryzacji) znaków ikonicznych lub symboli słownych w działalności praktycznej lub zabawie⁴⁴.

Artykuł dotyczy przede wszystkim rozbudzania aktywności matematycznej uczniów poprzez samodzielne wykonywanie i opisywanie fotografii, czyli uwzględnia wizualne i werbalne eksterioryzowanie myśli związanych z matematycznymi pojęciami, prawidłowościami, problemami. Za pomocą fotografii i towarzyszącemu jej opisowi uczeń przekazuje innym własne przybliżenia abstraktu. Nauczyciel na podstawie podwójnych obrazowo - tekstowych kodów generowanych przez ucznia *dual coding*⁴⁵ może dokładnie określić nie tylko poziom, ale i jakość opanowania materiału. Oszacować odstępstwa reprezentanta od ideału i określić miejsce na drodze wiodącej dziecko do zrozumienia istoty pojęcia, twierdzenia czy dowodu. Jednocześnie może wykorzystać to samo narzędzie w diagnozowaniu płynności, giętkości i metaforyczności myślenia. Ilustracją procesu eksterioryzacji jest fot. 1. ilustrująca symetrię względem płaszczyzny jeziora, zatytułowana *Przepiękny okrąg*. Drogi autorki do wykonania fotografii, jej prezentacji wraz z autorskim tytułem określają następujące ogniwa:

1. Zainteresowanie konkursem fotograficznym⁴⁶. Matematyka w obiektywie (pragnienie odniesienia sukcesu, wzbogacenia wiedzy).
2. Odwołanie do własnej wiedzy zastanej (przypomnienie nazw oraz podstawowych własności symetrii płaszczyznowej, własności okręgu).
3. Wizualizacja (poszukiwanie najlepszej ilustracji symetrii względem płaszczyzny - poszukiwanie fotograficznych asocjacji, prezentowanie pomysłów, fotografowanie).
4. Dopracowanie idei własnej (efektywne wykonanie fotografii oraz postawienie problemu poprzez sformułowanie podpisu).

Uzewnętrznienie wiedzy matematycznej dotyczącej symetrii oddane obrazem przedstawiającym odbicie zwierciadlane mostu w tafli jeziora potęgowane jest autorskim tytu-

⁴² P. Stompka, *Wyobrażenia wizualna i socjologia*, [w:] *Fotospołeczeństwo. Antologia tekstów z socjologii wizualnej*, M. Bogunia- Borowska, P. Stompka (red.), Znak, Kraków 2012, s. 28.

⁴³ M. Makiewicz, *O fotografii w nauczaniu matematyki. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów*, SKNMDM US, Szczecin 2013, s. 70-72.

⁴⁴ M. Przetacznik – Gierowska, *Świat dziecka. Aktywność – Poznanie – Środowisko*, UJ, Kraków 1993.

⁴⁵ D. Draaisma, *Machina metafor. Historia pamięci*, przeł. R. Pucek, Aletheia, Warszawa 2009, s. 31.

⁴⁶ Projekt międzynarodowy MATHEMATIC IN FOCUS - www.mwo.usz.edu.pl realizowany jest od roku 2010 przez Uniwersytet Szczeciński. Jego zasadniczy cel to popularyzowanie matematyki i kultury matematycznej przez fotografię oraz promowanie poznawczego stylu życia.

łem pracy. Jeśli widziana krzywa rzeczywiście jest okręgiem, to możemy wnioskować o jednakowych odległościach jego środka od dowolnego punktu brzegowego.

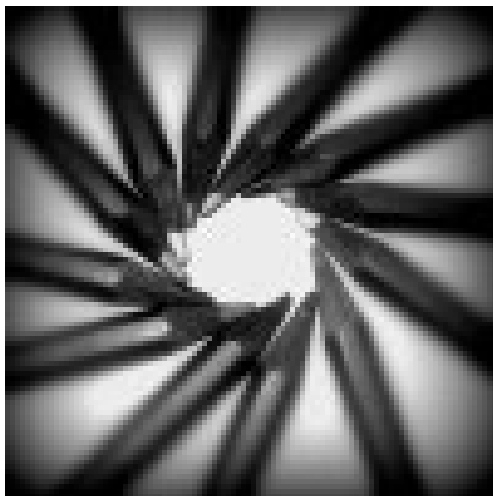


Fotografia 1. Przepiękny okrąg

Źródło: Agnieszka Zielińska

Kolejne fotografie stanowią przykłady wizualizacji konkretnych obiektów matematycznych. Ukazują tworzenie się u autorów nowych struktur poznawczych w wyniku procesu eksterioryzacji.

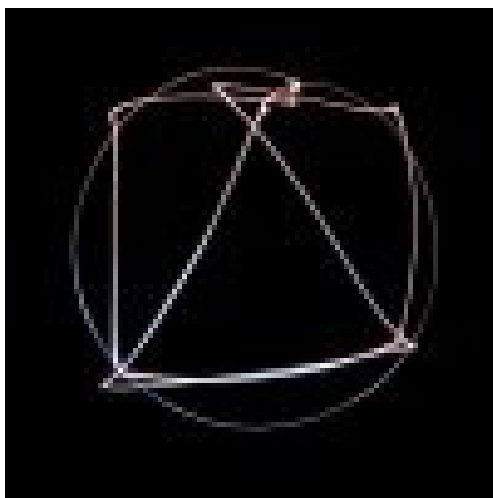
Fotografia Marty Strzelczyk (fot. 2) przedstawia dwanaście kredek położonych na płaszczyźnie stołu w taki sposób, że ich ostrza wyznaczają styczne do utworzonego w ten sposób okręgu. Fotografie można zaliczyć do wizualnych metafor orientacyjnych. Mamy tu do czynienia z lokalnym, subiektywnym odkryciem konstrukcji okręgu za pomocą stycznych. Fotografia wyróżnia się elegancją i harmonią kompozycji, a tytuł został dopasowany poprawnie.



Fotografia 2. Okrąg, Wyróżnienie STF w V edycji Matematyki w obiektywie www.mwo.usz.edu.pl

Źródło: Marta Strzelczyk

W fot. 3 autorstwa Michała Orlińskiego można doszukać się elementów artystycznej twórczości skryzalizowanej prowadzącej do odkrycia własności wielokątów wpisanych w okrąg. Obraz oryginalnie malowany światłem przy długim czasie naświetlenia. Harmonia kształtu, elegancja, ostrożny tytuł zapewniający poprawność.



Fotografia 3. Figury geometryczne, Wyróżnienie w V edycji Matematyki w obiektywie www.mwo.usz.edu.pl

Źródło: Michał Orliński

Praca (fot.4) Ewy Woźniak przedstawia wizualną metaforę ontologiczną⁴⁷ ukierunkowaną na rozpoznawanie aspektów środka odcinka. Niewidzialny na obrazie punkt środkowy gałązki przybliża pojęcie środka odcinka. Oryginalność obrazu i tytułu oddająca konkretne pojęcie matematyczne.



Fotografia 4. Środek odcinka, Wyróżnienie STF w V edycji Matematyki w obiektywie www.mwo.usz.edu.pl

Źródło: Ewa Woźniak

Wyniki prowadzonych co trzy lata przez Organizację Współpracy Gospodarczej i Rozwoju badań PISA oraz analizy wyników egzaminów maturalnych z matematyki odślaniają ponurą prawdę o słabym posługiwaniu się wiedzą matematyczną i rozwiązywaniem zadań niealgorytmicznych⁴⁸. Przyczyny takiej stagnacji związane są przede wszystkim z tym, że mimo zmian w podstawie programowej nadal dominuje schematyczny sposób uczenia oparty na powtarzaniu i odtwarzaniu czynności prezentowanych przez nauczyciela. Matematyka w dalszym ciągu wydaje się trudna, niezrozumiała, chłodna. Między innymi dlatego, że zbyt często skupiamy się na sprawności matematycznej zaniebując pozostałe składniki kultury matematycznej ucznia: wyobraźnię, twórczość, elegancję oraz język matematyki. Zagadnienia, jakie niesie ze sobą fotoedukacja uwzględniają strefy: aktualnego i najbliższego rozwoju dziecka⁴⁹. Wykonywanie i interpretowanie zdjęć wzmacnia i zwielokrotnia kontakt ucznia ze światem społecznym. Pozwala na mobilizowanie uwagi i wykształcenie wrażliwości na różne dostępne wizualne aspekty życia społecznego.

Oryginalność zarysowanej w pracy koncepcji fotoedukacji, oraz jej potężny walor dydaktyczny związany jest z tym, że obiekty matematyki są niewidzialne. To idee, platoń-

⁴⁷ G. Lakoff, M. Johnson, *Metafory w naszym życiu*, przeł. T. Krzeszowski, PIW, Warszawa 1988, s. 11.

⁴⁸ Relacje z najnowszych badań PISA przedstawiają w mediach. Z. Marciniak, J. Lech, A. Sułowska, W. Zawadowski, M Polak,

⁴⁹ L. S. Wygotski, *Myślenie i mowa*, PWN, Warszawa 1989, s. 167-168.

skie ideały, które można wyrazić w sposób ścisły jedynie za pomocą logicznego rozumowania. Problem, jednak w tym, że nie każdy uczeń jest gotowy do podjęcia rozumowania na tak wysokim poziomie abstrakcji, jego aktywność bezpośrednio zależy od aktualnego poziomu rozwoju: *dziecko przechodzi stopniowo od aktywności fizycznej, tj. czynności na przedmiotach materialnych, do aktywności wyobraźniowej, a następnie do aktywności typu logiczno - matematycznego, której wyrazem jest możliwość przeprowadzania przez nie operacji, czyli odwracalnych czynności umysłowych*⁵⁰.

Bibliografia

- Aigner M., *Die pure Eleganz der Mathematik*, Gegenworte. Hefte für den Disput über Wissen. Grenzen der Wissenschaft 12/2003.
- Borovik A.V., Gardiner T., *Mathematical Abilities and Mathematical Skills*, World Federation of National Mathematics Competitions Conference, Cambridge 2006;
- Draaisma D., *Machina metafor. Historia pamięci*, przeł. R. Pucek, Aletheia, Warszawa 2009.
- Duda R., *Dyskusja „Co to jest kultura matematyczna?”*, [w:] Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie. Nr 5/1990.
- Grabowski M., *Podziw i zdumienie w matematyce i fizyce*, Prószyński i S-ka, Warszawa 2009.
- Gruszczyk - Kolczyńska E., *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, WSiP, Warszawa 1994.
- Guilford J.P., *Natura inteligencji człowieka*, przekł. B. Czarniawska, W. Kozłowski, J. Radzicki, PWN, Warszawa 1978.
- Grobler A., *Nie o to chodzi, by złović króliczka*, Przegląd Filozoficzny 3/2001.
- Hammond A.L., *Matematyka - nasza niedostrzegalna kultura*, [w:] L.A. Steen (red.), *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, WNT Warszawa 1983.
- Kaufman J.C., Beghetto R. A., *Beyond big and little: The four C model of creativity*, Review of General Psychology, 13,1, 2009.
- Karwowski M., *Klimat dla kreatywności. Koncepcje, metody, działania*, Centrum Doradztwa i Informacji Difin sp. z o.o., Warszawa 2009.
- Khairani A. Z., Nordin M. S., *The development and construct validation of the mathematics proficiency test for 14-year-old students*, Asia Pacific Journal of Educators and Education, Vol. 26, No. 1.
- Klus-Stańska D., *Dzień jak co dzień. O barierach zmiany kultury szkoły*, [w:] M. Dudziko-wa, M. Czerepaniak - Walczak, *Wychowanie. Pojęcia. Procesy. Konteksty*. Tom 5.
- Klus-Stańska D., *Polska rzeczywistość dydaktyczna - paradygmatyczny taniec św. Wita*, [w:] L. Huryło, D. Klus-Stańska, M. Łojko (red.), *Paradygmaty współczesnej dydaktyki*, Impuls, Kraków 2009.

⁵⁰ J. Piaget, *Narodziny inteligencji dziecka*, przeł. M. Przetacznikowa, PWN, Warszawa 1966, s.565.

- Konior J., *Budowa i lektura tekstu matematycznego. Podstawy nauki czytania tekstów matematycznych w szkole*, [w:] J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*. Cz. 4, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1998.
- Kopański S., *W poszukiwaniu matematycznych talentów*, Wydawnictwo Dla Szkoły, Wilkowie 2003.
- Kozielecki J., *Koncepcje psychologiczne człowieka*, PIW, Warszawa 1976.
- Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, cz.2, WSiP, Warszawa 1977.
- Kurina F., *Kultura matematyczna nauczyciela matematyki*, W: *Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie*. Nr 6/1991.
- Lakoff G., Johnson M., *Metafory w naszym życiu*, przeł. T. Krzeszowski, PIW, Warszawa 1988.
- Limont W., *Uczeń zdolny. Jak go rozpoznać i jak z nim pracować*. GWP, Sopot 2010.
- Mac Lane S., *Mathematical models: A Sketch for the Philosophy of Mathematics*, *American Mathematical Monthly*, VII/VIII 1981.
- Makiewicz M., *Elementy kultury matematycznej w fotografii*, SKN MDM US, Szczecin 2011.
- Makiewicz M., *Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczycieli*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego Szczecin 2010.
- Makiewicz M., *O fotografii w nauczaniu matematyki. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów*, SKNMDM US, Szczecin 2013.
- Maruszewski T., *Psychologia poznawcza. Sposoby rozumienia siebie i świata*, GWP, Gdańsk 2002.
- Milgram R. J., *What is Mathematical Proficiency?* [w:] A. H. Schoenfeld (red.) *Assessing Mathematical Proficiency* MSRI Publications Volume 53, Cambridge University Press, New York 2007.
- Nęcka E., *Psychologia twórczości*, GWP, Gdańsk 2001.
- Paivio A., *The relationship between verbal and perceptual codes*, [w:] M.P. Friedman (red.), *Handbook of perception*. Tom 8 Perceptual coding, Academic Press, New York 1978.
- Pardała A., *Wyobrażenia przestrzenna uczniów w warunkach nauczania szkolnej matematyki. Teoria, problemy, propozycje*, Wydawnictwo Oświatowe FOSZE, Rzeszów 1995.
- Piaget J., *Narodziny inteligencji dziecka*, przeł. M. Przetacznikowa, PWN, Warszawa 1966.
- Piaget J., *Studia z psychologii dziecka*, przekł. T. Kołakowska, PZWS, Warszawa 1966.
- Prenzel M., Stadler M., Friedrich A., Knickmeier K., Ostermeier C., *Increasing the efficiency of mathematics and science instruction (SINUS) - a large scale teacher professional development programme in Germany*, przekł. G. Newcombe, Leibniz - Institute for Science Education, Kiel 2009; *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I)*, OECD 2010.
- Przetacznik – Gierowska M., *Świat dziecka. Aktywność – Poznanie – Środowisko*, UJ, Kraków 1993.

- Rams T., *Nieporozumienia związane z nauczaniem matematyki w szkole podstawowej*, Gradient 3(36)/1997.
- Russell S. J., Developing computational fluency with whole numbers in the elementary grades, *The New England Math Journal*, 32(2)/ 2000.
- Schoenfeld A. H., *What is Mathematical Proficiency and How Can It Be Assessed?* [w:] A. H. Schoenfeld (red.) *Assessing Mathematical Proficiency* MSRI Publications Volume 53, Cambridge University Press, New York 2007.
- Schröder R., *Mathe mit Pfiff. Elegante Aufgaben zum Stoff der Mittelstufe*, Lehrer Selbst Verlag, Bonn 2009.
- W.R. Garner, *The processing of information and structure*, Lawrence Erlbaum Associates, Maryland, Potomac, 1974.
- Stompka P., *Wyobraźnia wizualna i socjologia*, [w:] *Fotospołeczeństwo. Antologia tekstów z socjologii wizualnej*, M. Bogunia- Borowska, P. Stompka (red.), Znak, Kraków 2012.
- M. Szurek, *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów t. 1*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe Gdańsk 2005.
- Szurek M., Wstęp do: M. Makiewicz, *Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczycieli*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego Szczecin 2010.
- Tocki J., *Dedukcja lokalna w nauczaniu geometrii w szkole średniej*, WN WSP, Rzeszów 1992.
- Urban K.K., *Recent trends in creativity research and theory in Western Europe*, *European Journal of High Ability*, 1/1990.
- Więśław W., *Kultura matematyczna a kultura matematyków*. [w:] *Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie*. Nr 21/1998.
- Wygotski L. S., *Myslenie i mowa*, PWN, Warszawa 1989.

Małgorzata Makiewicz

O kulturze matematycznej ucznia. Eksterioryzacja wiedzy matematycznej za pomocą fotografii

Komentarz Hansa Freudenthala "ze wszystkich nauk humanistycznych matematyka jest najbardziej humanistyczna" zwraca uwagę na kulturotwórcze wartości królowej nauk. Kryzys uczenia się i nauczania matematyki wynika przede wszystkim z instrumentalnego traktowania tej dyscypliny oraz koncentracji na sprawności rachunkowej. Artykuł dotyczy kluczowego problemu w edukacji matematycznej - kształcenia kultury matematycznej ucznia (twórczości, wyobraźni, elegancji oraz języka matematycznego) za pomocą fotoedukacji. Zawiera szkic weryfikowanej eksperymentalnie koncepcji dydaktycznej opartej na dwukierunkowym zastosowaniu fotografii. Prezentuje drogę uewnętrzniania wiedzy dziecka za pomocą obrazu i towarzyszącego mu tekstu. Dzięki temu wzrasta poziom kultury matematycznej ucznia.

Słowa kluczowe: kultura matematyczna, fotografia poznawcza, fotoedukacja matematyczna, koncepcja nauczania matematyki

Mathematical Culture of Students. Communication of Mathematical Knowledge by Photography

Hans Freudenthal's comment "Of all the humanities mathematics is the most humanistic" points to the cultural values of mathematics. The crisis in learning and teaching this subject stems from the instrumental treatment of mathematics and the focus on mathematical competence. The article deals mainly with the key problem in mathematical education, i.e. the development of mathematical culture of students (creativity, imagination, elegance, and mathematical language) by means of photography. It contains an outline of the education concept (that is experimentally verified) based on the double use of photography. It presents the way in which a child expresses its knowledge by means of pictures and accompanying text. Thanks to it the mathematical culture level of students grows.

Keywords: mathematical culture, cognitive photography, mathematical photoeducation, the concept of teaching mathematics

Translated by Małgorzata Makiewicz